G_2-estructuras solitones en álgebras de Lie nilpotentes

Marina Nicolini
Fa.M.A.F. - U.N.C.

Jornadas de geometría diferencial y teoría de Lie
Rosario - 2017

G_2-estructuras

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía?

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía? $\rightsquigarrow$ G_2

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía? $\rightsquigarrow$ G_2

[Bryant, 1987]: Ejemplos locales.

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía? $\rightsquigarrow G_2$

[Bryant, 1987]: Ejemplos locales.

[Bryant y Salamon, 1989]: Ejemplos completos.

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía? $\rightsquigarrow G_2$

[Bryant, 1987]: Ejemplos locales.

[Bryant y Salamon, 1989]: Ejemplos completos.

[Joyce, 1995]: Existencia de ejemplos compactos.

G_2-estructuras

[Berger, 1955]: M variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible.¿grupos de holonomía? $\rightsquigarrow G_2$

[Bryant, 1987]: Ejemplos locales.

[Bryant y Salamon, 1989]: Ejemplos completos.

[Joyce, 1995]: Existencia de ejemplos compactos.

Definición

M^7 variedad diferenciable, $\varphi \in \Omega^3 M$ es una G_2-estructura si $\forall p \in M$

$$\varphi_p := e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245},$$

para alguna base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ de $T_p M$.

φ una G_2-estructura

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

M compacta

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\begin{gathered} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{gathered}$$

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\left.\begin{array}{c} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{array}\right\} \mathrm{Hol}(M, g_\varphi) \subset G_2.$$

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\left.\begin{array}{c} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{array}\right\} \mathrm{Hol}(M, g_\varphi) \subset G_2.$$

[Bryant, 1992] Flujo Laplaciano:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)}$$

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\left.\begin{array}{c} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{array}\right\} \mathrm{Hol}(M, g_\varphi) \subset G_2.$$

[Bryant, 1992] Flujo Laplaciano:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)}$$

donde $\Delta_\varphi = -d \ *_\varphi d \ *_\varphi + *_\varphi d \ *_\varphi d$.

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\left.\begin{array}{c} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{array}\right\} \mathrm{Hol}(M, g_\varphi) \subset G_2.$$

[Bryant, 1992] Flujo Laplaciano:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)}$$

donde $\Delta_\varphi = -d \ *_\varphi d \ *_\varphi + *_\varphi d \ *_\varphi d$.

- $\varphi(t) = c(t) f(t)^* \varphi, \quad c(t) \in \mathbb{R}^*$ y $f(t) \in \mathrm{Diff}(M)$.

φ una G_2-estructura $\rightsquigarrow$ métrica riemanniana g_φ y orientación.

$$\left.\begin{array}{c} M \text{ compacta} \\ \Delta_\varphi \varphi = 0 \end{array}\right\} \mathrm{Hol}(M, g_\varphi) \subset G_2.$$

[Bryant, 1992] Flujo Laplaciano:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)}$$

donde $\Delta_\varphi = -d \ *_\varphi d \ *_\varphi + *_\varphi d \ *_\varphi d$.

- $\varphi(t) = c(t) f(t)^* \varphi, \quad c(t) \in \mathbb{R}^*$ y $f(t) \in \mathrm{Diff}(M)$.
- $\Delta_\varphi \varphi = \lambda\varphi + \mathcal{L}_X \varphi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M)$ (completo).

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

$X_D \in \mathfrak{X}(G)$, asociado a $D \in$ Der$(\mathfrak{g})$.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

$X_D \in \mathfrak{X}(G)$, asociado a $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

[CF]: $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{12}$.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

$X_D \in \mathfrak{X}(G)$, asociado a $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

[CF]: $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{12}$.

[FFM]: $\mathfrak{n}_i \to \varphi_i$.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

$X_D \in \mathfrak{X}(G)$, asociado a $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

[CF]: $\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_{12}$.

[FFM]: $\mathfrak{n}_i \to \varphi_i$.

Pregunta: ¿$(\mathfrak{n}_i, \varphi_i)$ solitón de Laplace?

G_2-estructuras en álgebras de Lie

G grupo de Lie simplemente conexo $\rightsquigarrow$ Lie(G)=$\mathfrak{g}$.

φ una 3-forma invariante a izquierda en G.

$X_D \in \mathfrak{X}(G)$, asociado a $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

[CF]: $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{12}$.

[FFM]: $\mathfrak{n}_i \to \varphi_i$.

Pregunta: ¿$(\mathfrak{n}_i, \varphi_i)$ solitón de Laplace?

$$\boxed{\Delta_{\varphi_i}\varphi_i = \lambda\varphi_i + \mathcal{L}_{X_D}\varphi_i}$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{n}_3^*$,

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$,

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\varphi_3 := e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*.$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\varphi_3 := e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3 \mathfrak{n}_3^*.$$

$$¿d\varphi_3 = 0?$$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\varphi_3 := e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*.$$

$$¿d\varphi_3 = 0?$$

$d\varphi_3 = (a - b - c)e^{1237}$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*,\ D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\varphi_3 := e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*.$$

$$¿d\varphi_3 = 0?$$

$d\varphi_3 = (a - b - c)e^{1237} = 0$

$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a, b, c)$

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6.$$

$$\Leftrightarrow de^4 = ae^{12}, \quad de^5 = be^{13}, \quad de^6 = ce^{23}.$$

$\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\varphi_3 := e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*.$$

$$¿\, d\varphi_3 = 0?$$

$d\varphi_3 = (a - b - c)e^{1237} = 0 \Leftrightarrow$ **a=b+c**.

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta\varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta\varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = ?$$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta \varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = ?$$

Si D diagonal $\Rightarrow \mathcal{L}_{X_D} e^{ijk} = (D_{ii} + D_{jj} + D_{kk})e^{ijk}$.

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta\varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = ?$$

Si D diagonal $\Rightarrow \mathcal{L}_{X_D} e^{ijk} = (D_{ii} + D_{jj} + D_{kk})e^{ijk}$.
$\rightsquigarrow D = (b^2 + c^2 + bc)\,\mathrm{Diag}(-1, -1, -1, -2, -2, -2, -2)$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta\varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = ?$$

Si D diagonal $\Rightarrow \mathcal{L}_{X_D} e^{ijk} = (D_{ii} + D_{jj} + D_{kk})e^{ijk}$.
$\rightsquigarrow D = (b^2 + c^2 + bc)\,\mathrm{Diag}(-1, -1, -1, -2, -2, -2, -2)$
$\rightsquigarrow \lambda = 5(c^2 + b^2 + bc) > 0.$

$$\boxed{\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi}$$

Si φ_3 es cerrada,

$$\Delta\varphi_3 = -d * d * \varphi_3 = 2(b^2 + c^2 + bc)e^{123}.$$

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = ?$$

Si D diagonal $\Rightarrow \mathcal{L}_{X_D} e^{ijk} = (D_{ii} + D_{jj} + D_{kk})e^{ijk}$.
$\rightsquigarrow D = (b^2 + c^2 + bc)\,\mathrm{Diag}(-1, -1, -1, -2, -2, -2, -2)$
$\rightsquigarrow \lambda = 5(c^2 + b^2 + bc) > 0.$
$\Rightarrow (\mathfrak{n}_3(b + c, b, c), \varphi_3)$ es solitón de Laplace de expansión, $\forall b, c \in \mathbb{R}^*$.

$\mathfrak{n}_3(1, 1-t, t), \quad t \in (0, \frac{1}{2})$

$\mathfrak{n}_3(1, 1-t, t), \quad t \in (0, \frac{1}{2})$

$$\mathrm{Ric}_t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-(1-t)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-t)^2-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{n}_3(1, 1-t, t), \quad t \in (0, \frac{1}{2})$

$$\mathrm{Ric}_t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-(1-t)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-t)^2-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{t^2}{2} < \frac{(1-t)^2}{2} < \frac{1}{2}.$$

$\mathfrak{n}_3(1, 1-t, t), \quad t \in (0, \frac{1}{2})$

$$\mathrm{Ric}_t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1-(1-t)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-t)^2-t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{t^2}{2} < \frac{(1-t)^2}{2} < \frac{1}{2}.$$

$$\mathfrak{n}_3(1, 1-t_1, t_1) \not\simeq \mathfrak{n}_3(k, k(1-t_2), kt_2), \quad \forall t_1 \neq t_2 \in (0, \tfrac{1}{2}), \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

$\Rightarrow \mathfrak{n}_3$ admite una familia continua de solitones de Laplace salvo equivalencia y múltiplo por escalar.

Resultados

• Encontramos un solitón de Laplace en cada una de las siete primeras álgebras $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_7$.

• Todos los solitones encontrados son de expansión y ninguno es una autoforma (i. e. $\Delta_\varphi \varphi = \lambda\varphi$).

• $\mathfrak{n}_3$ admite una familia continua de solitones de Laplaces salvo equivalencia y múltiplo por escalar.

• En los casos $\mathfrak{n}_4, \ldots, \mathfrak{n}_7$ la derivarción D involucrada no es diagonal y su transpuesta D^t no es derivación. Es decir, son solitones semi-algebraicos.

Estructuras extremally Ricci pinched (ERP)

M^7 variedad diferenciable.

Estructuras extremally Ricci pinched (ERP)

M^7 variedad diferenciable.
φ una G_2-estructura en M.

Estructuras extremally Ricci pinched (ERP)

M^7 variedad diferenciable.
φ una G_2-estructura en M.
R la curvatura escalar y Ric el operador de Ricci de $\mathfrak{g}_\varphi$.

Estructuras extremally Ricci pinched (ERP)

M^7 variedad diferenciable.
φ una G_2-estructura en M.
R la curvatura escalar y Ric el operador de Ricci de $\mathfrak{g}_\varphi$.

Teorema (Bryant)

Si M compacta y φ cerrada, entonces

$$\int_M R^2 * 1 \leq 3 \int_M |\operatorname{Ric}|^2 * 1,$$

y la igualdad se da si y sólo si $d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6} * (\tau \wedge \tau)$.

Estructuras extremally Ricci pinched (ERP)

M^7 variedad diferenciable.
φ una G_2-estructura en M.
R la curvatura escalar y Ric el operador de Ricci de $\mathfrak{g}_\varphi$.

Teorema (Bryant)

Si M compacta y φ cerrada, entonces

$$\int_M R^2 * 1 \leq 3 \int_M |\operatorname{Ric}|^2 * 1,$$

y la igualdad se da si y sólo si $d\tau = \frac{1}{6}|\tau|^2\varphi + \frac{1}{6} * (\tau \wedge \tau)$.

Las estructuras para las cuales se da el igual se llaman **extremally Ricci pinched** (ERP).

Consideramos la funcional

$$F := \frac{R^2}{|\operatorname{Ric}|^2},$$

en el espacio de todas las G_2-estructuras homogeneas no flat.

Consideramos la funcional

$$F := \frac{R^2}{|\operatorname{Ric}|^2},$$

en el espacio de todas las G_2-estructuras homogeneas no flat.
F mide cuán lejos está una métrica de ser Einstein.

Consideramos la funcional

$$F := \frac{R^2}{|\operatorname{Ric}|^2},$$

en el espacio de todas las G_2-estructuras homogeneas no flat.
F mide cuán lejos está una métrica de ser Einstein.

Se satisface que $0 \leq F \leq 7$.

Consideramos la funcional

$$F := \frac{R^2}{|\operatorname{Ric}|^2},$$

en el espacio de todas las G_2-estructuras homogeneas no flat.
F mide cuán lejos está una métrica de ser Einstein.

Se satisface que $0 \leq F \leq 7$.

Pregunta: La desigualdad $F \leq 3$, ¿se mantiene para cualquier G_2-estructura homogénea cerrada?

Respuesta: No.

Ejemplo

$\mathfrak{g}$ álgebra de Lie soluble con base $\{e_1, \dots, e_7\}$, con
$\mathfrak{h} := \langle e_1, e_2 e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ ideal 2-pasos nilpotente con corchete de Lie:

$$[e_1, e_4] = -e_5, \quad [e_1, e_3] = -e_6, \quad [e_2, e_3] = -e_5, \quad [e_2, e_4] = -e_6 \text{ y}$$

$$ade_7|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Diag}(a, a, \tfrac{1}{2} - a, \tfrac{1}{2} - a, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h}), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}.$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{(-4a^2 + 2a - 7)^2}{16a^4 - 16a^3 + 28a^2 - 12a + 11}, \qquad F(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{81}{17} \approx 4{,}76.$$

¡MUCHAS GRACIAS!