Geodésicas luz en variedades Lorentzianas compactas

Jornadas de Geometría diferencial y Teoría de Lie, Rosario

Pablo R. Montenegro

Departamento de Matemática, FCEIA-UNR

Septiembre, 2017

El grupo de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $SL(2,\mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2,\mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1$$

El grupo de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $SL(2,\mathbb{R})$ es el subgrupo de $GL(2,\mathbb{R})$ correspondiente a matrices reales de 2×2 con determinante igual a 1.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1$$

- Es un grupo de Lie de dimensión 3, conexo, no simplemente conexo. Topología relativa (sugrupo cerrado).

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

- La forma de Killing, B, de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ define una forma bilineal

$$B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

- La forma de Killing, B, de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ define una forma bilineal

$$B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$B(X,Y) = 4Tr(XY)$$

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

- La forma de Killing, B, de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ define una forma bilineal

$$B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$B(X,Y) = 4Tr(XY)$$

No degenerada Por ser $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ semisimple.

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

- La forma de Killing, B, de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ define una forma bilineal

$$B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$B(X,Y) = 4Tr(XY)$$

No degenerada Por ser $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ semisimple.
Tiene índice 1 Es decir, hay una base ortonormal de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ tal que $B(e_1,e_1) = -1$, $B(e_2,e_2) = 1$, $B(e_1,e_1) = 1$.

El álgebra de Lie $SL(2,\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ se identifica con las matrices reales de 2×2 de traza nula.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

- La forma de Killing, B, de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ define una forma bilineal

$$B : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$B(X,Y) = 4Tr(XY)$$

No degenerada Por ser $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ semisimple.
Tiene índice 1 Es decir, hay una base ortonormal de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ tal que $B(e_1,e_1) = -1$, $B(e_2,e_2) = 1$, $B(e_1,e_1) = 1$.
Bi-invariancia Al extender B a todo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ de forma invariante a izquierda resulta que también es invariante a derecha.

Variedades Lorentzianas

- La construccón anterior definde sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ una métrica Lorentziana bi-invariante.

Variedades Lorentzianas

- La construccón anterior definde sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ una métrica Lorentziana bi-invariante.
- Para obtener variedades lorentzianas compactas, de dimensión 3, cocientamos por subgrupos discretos cocompactos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Variedades Lorentzianas

- La construccón anterior definde sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ una métrica Lorentziana bi-invariante.
- Para obtener variedades lorentzianas compactas, de dimensión 3, cocientamos por subgrupos discretos cocompactos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Ejemplo $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma_{a,b}$

Variedades Lorentzianas

- La construccón anterior definde sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ una métrica Lorentziana bi-invariante.
- Para obtener variedades lorentzianas compactas, de dimensión 3, cocientamos por subgrupos discretos cocompactos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Ejemplo $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma_{a,b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ donde

$$\Gamma_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathbb{Z} \right\} \cap SL(2,\mathbb{R})$$

Variedades Lorentzianas

- La construccón anterior definde sobre $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ una métrica Lorentziana bi-invariante.
- Para obtener variedades lorentzianas compactas, de dimensión 3, cocientamos por subgrupos discretos cocompactos de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Ejemplo $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma_{a,b}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ donde

$$\Gamma_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} p + q\sqrt{a} & r + s\sqrt{a} \\ rb - sb\sqrt{a} & p - q\sqrt{a} \end{pmatrix} : p, q, r, s \in \mathbb{Z} \right\} \cap SL(2,\mathbb{R})$$

Cocompacto si y sólo si hay una única solución entera de

$$w^2 - ax^2 - by^2 + abz^2 = 0$$

Lattices de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Teorema [Fuchsian Groups, Svetlana katok]

Si Γ contiene elementos parabólicos no triviales, entonces no es cocompacto.

Parabólicos: Traza 2.

Variedad cociente

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\gamma$$

Proposición [Semi-Riemannian Geometry, O'neill]

Considerando en M la métrica cociente:

Variedad cociente

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\gamma$$

Proposición [Semi-Riemannian Geometry, O'neill]

Considerando en M la métrica cociente:
1) π es una submersión pseudo-riemanniana.

Variedad cociente

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\gamma$$

Proposición [Semi-Riemannian Geometry, O'neill]

Considerando en M la métrica cociente:
1) π es una submersión pseudo-riemanniana.
2) Las geodésicas que empiezan en $o := \pi(e)$ son las proyecciones por π de geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ que empiezan en $e \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

- Lema: Métrica bi-invariante $\rightarrow$ geodésicas por e son los subgrupos monoparamétricos : $\gamma_X(t) = exp(tX)$, con $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

- Lema: Métrica bi-invariante $\rightarrow$ geodésicas por e son los subgrupos monoparamétricos : $\gamma_X(t) = exp(tX)$, con $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

$$
\begin{array}{rcccc}
\textbf{espacio} & si & B(X,X) > 0 & o & X = 0 \\
\textbf{luz} & si & B(X,X) = 0 & y & X \neq 0 \\
\textbf{tiempo} & si & B(X,X) < 0 & &
\end{array}
$$

.

Geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

- Lema: Métrica bi-invariante $\rightarrow$ geodésicas por e son los subgrupos monoparamétricos : $\gamma_X(t) = exp(tX)$, con $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcccc} \textbf{espacio} & si & B(X,X) > 0 & o & X = 0 \\ \textbf{luz} & si & B(X,X) = 0 & y & X \neq 0 \\ \textbf{tiempo} & si & B(X,X) < 0 & & \end{array}$$

.

- *En general* Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica, $g_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = c$ constante, por lo que podemos hablar de geodésicas espacio, luz y tiempo según el signo de c.

Geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1+x_1 t & x_2 t \\ x_3 t & 1-x_1 t \end{pmatrix} \qquad \textbf{lightlike}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} cos(kt) & -sen(kt) \\ sen(kt) & cos(kt) \end{pmatrix} C \qquad \textbf{timelike}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} cosh(kt) & senh(kt) \\ senh(kt) & cosh(kt) \end{pmatrix} C \qquad \textbf{spacelike}$$

$C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$

Geodésicas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1+x_1 t & x_2 t \\ x_3 t & 1-x_1 t \end{pmatrix} \qquad \textbf{lightlike}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} cos(kt) & -sen(kt) \\ sen(kt) & cos(kt) \end{pmatrix} C \qquad \textbf{timelike}$$

$$C^{-1}\begin{pmatrix} cosh(kt) & senh(kt) \\ senh(kt) & cosh(kt) \end{pmatrix} C \qquad \textbf{spacelike}$$

$C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$

Motivación

Si Γ es un lattice cocompacto de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, luego toda geodésica luz de el espacio homogeneo Lorentziano $M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ es no cerrada.

Motivación

Resultado previo

[del Barco, Ovando, Vittone]

En dimensón 4, se cosideró el *grupo oscilador*, $Osc = \mathbb{R} \rtimes H_3(\mathbb{R})$, con una métrica Lorentziana bi-invariante: Para una familia de lattices cocompacptos, se obtiene que toda geodésica luz en Osc/Γ es periódica.

Por qué estos grupos

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

Sea $(G, \langle , \rangle)$ un grupo de Lie con métrica Lorentziana bi-invariante, decimos que tiene **álgebra de Lie indescomponible** si para todo ideal propio $I \subset \mathfrak{g}$, $\langle , \rangle_e|_I$ es degenerada.

Por qué estos grupos

- *GROUPES DE LIE MUNIS DE MÉTRIQUES BI-INVARIANTES, Alberto Medina, 1984*

Definición

Sea $(G, \langle , \rangle)$ un grupo de Lie con métrica Lorentziana bi-invariante, decimos que tiene **álgebra de Lie indescomponible** si para todo ideal propio $I \subset \mathfrak{g}$, $\langle , \rangle_e|_I$ es degenerada.

Teorema [A. Medina]

Si G es un grupo de Lie conexo munido de una métrica Lorentziana bi-invariante para la cual $\mathfrak{g}$ es indescomponible, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ o bien el cubrimiento universal de G es isomorfo a un grupo oscilador.

Por qué estos grupos

Dos posibilidades con G simplemente conexo:

$G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ o bien $G = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Por qué estos grupos

Dos posibilidades con G simplemente conexo:

$$G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \text{ o bien } G = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- Algunas $M = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ pueden realizarse como $M' = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma'$

Por qué estos grupos

Dos posibilidades con G simplemente conexo:

$$G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \text{ o bien } G = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- Algunas $M = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ pueden realizarse como $M' = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma'$ en las cuales ninguna geodésica luz es cerrada.

Por qué estos grupos

Dos posibilidades con G simplemente conexo:

$$G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \text{ o bien } G = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- Algunas $M = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ pueden realizarse como $M' = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma'$ en las cuales ninguna geodésica luz es cerrada. Resta ver si son todas.
- ¿Qué sucede en Osc/Γ

Por qué estos grupos

Dos posibilidades con G simplemente conexo:

$$G = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \text{ o bien } G = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- Algunas $M = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ pueden realizarse como $M' = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma'$ en las cuales ninguna geodésica luz es cerrada. Resta ver si son todas.
- ¿Qué sucede en Osc/Γ y en $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\Gamma$?

Grupos osciladores

Los grupos osciladores $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son grupos de Lie simplemente conexos, solubles de dimensión par, con conjunto base $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ y producto dado por

$$(x, u, t).(y, v, s) = (x + y + \frac{1}{2} u^T N_{(1,\ldots,1)} e^{tN_\lambda} v, u + e^{tN_\lambda} v, t + s),$$

con $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., n$,

Grupos osciladores

Los grupos osciladores $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son grupos de Lie simplemente conexos, solubles de dimensión par, con conjunto base $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ y producto dado por

$$(x, u, t).(y, v, s) = (x + y + \frac{1}{2} u^T N_{(1,\ldots,1)} e^{tN_\lambda} v, u + e^{tN_\lambda} v, t + s),$$

con $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., n$,

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{\lambda_n} \end{pmatrix}, J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix},$$

Grupo oscilador en dimensión 4

En las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^4$, el producto en $Osc_1(1)$ resulta

$$(z,x,y,t).(z',x',y',t') =$$

$$(z+z'+\frac{1}{2}(x(Cos(t)x'-Sin(t))y'-y(Sin(t)x'+Cos(t)y')),$$

$$x+Cos(t)x'-Sin(t)y', y+Sin(t)x'+Cos(t)y', t+t')$$

Grupo oscilador en dimensión 4

En las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^4$, el producto en $Osc_1(1)$ resulta

$$(z,x,y,t).(z',x',y',t') =$$

$$(z+z'+\frac{1}{2}(x(Cos(t)x'-Sin(t))y'-y(Sin(t)x'+Cos(t)y')),$$

$$x+Cos(t)x'-Sin(t)y', y+Sin(t)x'+Cos(t)y', t+t')$$

y la métrica

$$g = dzdt + dx^2 + dy^2 + \frac{1}{2}(ydxdt - xdydt)$$

resulta bi-invariante y Lorentziana

Geodésicas de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Geodésicas de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

y

$$\alpha(s) = (a_3 s, a_1 s, a_2 s, 0) \text{ para } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Geodésicas de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

y

$$\alpha(s) = (a_3 s, a_1 s, a_2 s, 0) \text{ para } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Las geodésicas son tipos **luz, tiempo o espacio** si $a_1^2 + a_2^2 + 2a_0a_3$ es $= 0$, < 0 or > 0 respectivamente.

Geodésicas luz de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Geodésicas luz de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

y

$$\alpha(s) = (a_3 s, a_1 s, a_2 s, 0) \text{ para } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Geodésicas luz de $Osc_1(1)$

$$
\begin{aligned}
z(s) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{a_2^2}{a_0}+2a_3\right)s-\left(\frac{a_2^2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\sin a_0 s\right],\\
x(s) &= \frac{a_1}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\cos a_0 s-\frac{a_2}{a_0},\\
y(s) &= -\frac{a_1}{a_0}\cos a_0 s+\frac{a_2}{a_0}\sin a_0 s+\frac{a_1}{a_0},\\
t(s) &= a_0 s,
\end{aligned}
$$

para $0 \neq a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

y

$$\alpha(s) = (a_3 s, a_1 s, a_2 s, 0) \text{ para } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Las geodésicas son tipos **luz, tiempo o espacio** si $a_1^2 + a_2^2 + 2a_0a_3$ es $= 0$, < 0 or > 0 respectivamente.

Lattices $Osc_1(1)$

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los lattices de $Osc_1(1)$ salvo automorfismos del grupo ambiente son los subgrupos

$$L(r, \lambda, x, y, \xi_0) =$$

$$< \left\{(0, \tfrac{1}{\sqrt{y}}, 0, 0), (0, \tfrac{x}{\sqrt{y}}, \sqrt{y}, 0), (1/r, 0, 0, 0), (0, \xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \lambda)\right\} >$$

Lattices $Osc_1(1)$

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los lattices de $Osc_1(1)$ salvo automorfismos del grupo ambiente son los subgrupos

$$L(r, \lambda, x, y, \xi_0) =$$

$$< \left\{(0, \tfrac{1}{\sqrt{y}}, 0, 0), (0, \tfrac{x}{\sqrt{y}}, \sqrt{y}, 0), (1/r, 0, 0, 0), (0, \xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \lambda)\right\} >$$

para ciertos parametros $x, y, \xi, r \in \mathbb{Z}$ y λ.

Lattices $Osc_1(1)$

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los lattices de $Osc_1(1)$ salvo automorfismos del grupo ambiente son los subgrupos

$$L(r, \lambda, x, y, \xi_0) =$$

$$< \left\{(0, \tfrac{1}{\sqrt{y}}, 0, 0), (0, \tfrac{x}{\sqrt{y}}, \sqrt{y}, 0), (1/r, 0, 0, 0), (0, \xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \lambda)\right\} >$$

para ciertos parametros $x, y, \xi, r \in \mathbb{Z}$ y λ.

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los automorfismos de $Osc_1(1)$ están dados por

$$\phi(z, \xi, t) =$$

$$\left(az + \tfrac{1}{2}w(S\xi, e^{t\mu N_1}b + b) + mt + \tfrac{1}{2}w(e^{t\mu N_1}b, b), S\xi + e^{t\mu N_1}b - b, \mu t)\right)$$

Lattices $Osc_1(1)$

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los lattices de $Osc_1(1)$ salvo automorfismos del grupo ambiente son los subgrupos

$$L(r, \lambda, x, y, \xi_0) =$$

$$< \left\{(0, \tfrac{1}{\sqrt{y}}, 0, 0), (0, \tfrac{x}{\sqrt{y}}, \sqrt{y}, 0), (1/r, 0, 0, 0), (0, \xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \lambda)\right\} >$$

para ciertos parametros $x, y, \xi, r \in \mathbb{Z}$ y λ.

Lattices of Oscillator Groups [M. Fischer, 2017]

Los automorfismos de $Osc_1(1)$ están dados por

$$\phi(z, \xi, t) =$$

$$\left(az + \tfrac{1}{2}w(S\xi, e^{t\mu N_1}b + b) + mt + \tfrac{1}{2}w(e^{t\mu N_1}b, b), S\xi + e^{t\mu N_1}b - b, \mu t)\right)$$

$$a \neq 0$$

Geodésicas luz en $Osc_1(1)/\Gamma$

Resultado 1

Sea Γ un lattice de $Osc_1(1)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = Osc_1(1)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Geodésicas luz en $Osc_1(1)/\Gamma$

Resultado 1

Sea Γ un lattice de $Osc_1(1)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = Osc_1(1)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Resultado 2

Todo lattice en $Osc(1)$ tiene un representante en la clase de lattices salvo automorfismos del grupo ambiente para el cual todas las geodésicas luz son cerradas

Geodésicas luz en $Osc_1(1)/\Gamma$

Resultado 1

Sea Γ un lattice de $Osc_1(1)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = Osc_1(1)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Resultado 2

Todo lattice en $Osc(1)$ tiene un representante en la clase de lattices salvo automorfismos del grupo ambiente para el cual todas las geodésicas luz son cerradas

Demostración 1: Analizar las clases de lattices de la lista.

Geodésicas luz en $Osc_1(1)/\Gamma$

Resultado 1

Sea Γ un lattice de $Osc_1(1)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = Osc_1(1)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Resultado 2

Todo lattice en $Osc(1)$ tiene un representante en la clase de lattices salvo automorfismos del grupo ambiente para el cual todas las geodésicas luz son cerradas

Demostración 1: Analizar las clases de lattices de la lista. *Podemos hacer algo mejor.*

Geodésicas luz en $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Toerema

Sea Γ un lattice de $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Geodésicas luz en $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Toerema

Sea Γ un lattice de $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Para la demostración:
1) $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ admite lattices cocompactos si y sólo si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ generan un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}$.

Geodésicas luz en $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Toerema

Sea Γ un lattice de $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Para la demostración:
1) $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ admite lattices cocompactos si y sólo si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ generan un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}$. Nos dice que la última componente de los elementos de Γ son multiplos racionales de π.

Geodésicas luz en $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Toerema

Sea Γ un lattice de $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, y consideresé el espacio homogeneo Lorentziano compacto $M = \mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\Gamma$, luego ocurre una de las siguientes posibilidades

- Toda geodésica luz de M es cerrada, o
- Hay una dirección para la cual las geodésicas luz de M son cerradas y el resto no lo son.

Para la demostración:
1) $\mathrm{Osc_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ admite lattices cocompactos si y sólo si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ generan un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}$. Nos dice que la última componente de los elementos de Γ son multiplos racionales de π.
2) Mostrar que toda geodésica se cierra si y sólo si existe en el lattice Γ un elemento de la forma $(0, ..., 0, 2\pi k)$.

Muchas gracias