Algebras Conformes Cuánticas.

Vanesa Meinardi, Carina Boyallian

FaMAF&CIEM

Jornadas de Geometría Diferencial y Teoría de Lie.

Rosario, Argentina

Algebras de vértices

Definición

Un álgebra de vértices consiste de un espacio vectorial V y un mapa lineal

$$Y(\cdot, x) : V \to (\text{End V})[[x, x^{-1}]]$$

$$v \to Y(v, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n x^{-n-1}.$$

También hay un elemento distinguido $\mathbf{1}$ de V (el vector vacío). Las siguientes condiciones son asumidas para $u, v \in V$:

- Condición de truncamiento:

$$u_n v = 0 \qquad para \qquad n >> 0, \tag{1.1}$$

esto es,

$$Y(u,x)v \in V((x)); \tag{1.2}$$

- Condición del vacío:

$$Y(\mathbf{1},x) = I_V; \tag{1.3}$$

- Propiedad de creación:

$$Y(v,x)\mathbf{1} \in V[[x]] \quad y \quad \lim_{x \to 0} Y(v,x)\mathbf{1} = v \tag{1.4}$$

- Condición de truncamiento:

$$u_n v = 0 \qquad para \qquad n >> 0, \tag{1.1}$$

esto es,

$$Y(u,x)v \in V((x)); \tag{1.2}$$

- Condición del vacío:

$$Y(\mathbf{1},x) = I_V; \tag{1.3}$$

- Propiedad de creación:

$$Y(v,x)\mathbf{1} \in V[[x]] \quad y \quad \lim_{x\rightarrow 0} Y(v,x)\mathbf{1} = v \tag{1.4}$$

- Condición de truncamiento:

$$u_n v = 0 \qquad para \qquad n >> 0, \tag{1.1}$$

esto es,

$$Y(u,x)v \in V((x)); \tag{1.2}$$

- Condición del vacío:

$$Y(\mathbf{1},x) = I_V; \tag{1.3}$$

- Propiedad de creación:

$$Y(v,x)\mathbf{1} \in V[[x]] \quad y \quad \lim_{x\to 0} Y(v,x)\mathbf{1} = v \tag{1.4}$$

- Existen $k \in \mathbb{Z}$, tal que para $u, v, w \in V$:

$$(x_1 - x_2)^k [Y(u, x_1), Y(v, x_2)] = 0 \tag{1.5}$$

(localidad débil)

$$(x_0 + x_2)^l Y(Y(u, x_0)v, x_2)w = (x_0 + x_2)^l Y(u, x_0 + x_2) Y(v, x_2)w \tag{1.6}$$

(asociatividad débil)

- Existen $k \in \mathbb{Z}$, tal que para $u, v, w \in V$:

$$(x_1 - x_2)^k [Y(u, x_1), Y(v, x_2)] = 0 \tag{1.5}$$

(localidad débil)

$$\begin{multline} (x_0 + x_2)^l Y(Y(u, x_0)v, x_2)w = \\ (x_0 + x_2)^l Y(u, x_0 + x_2) Y(v, x_2)w \end{multline} \tag{1.6}$$

(asociatividad débil)

Example

Si V es un álgebra asociativa conmmutativa unitaria con elemento unidad $\mathbf{1}$, y T es una derivación de V. Entonces

$$Y(a,z)b = (e^{zT}a)b, \qquad a,b \in V.$$

es un álgebra de vértices.

Algebras conformes y álgebras de vértices.

- $(V, \mathbf{1})$ un espacio vectorial punteado
- Y un estado-campo correspondencia. Es decir un mapa lineal que satisface los tres primeros axiomas de la definición de álgebras de vértices y existe $T \in EndV$ tal que

$$[T, Y(a,z)] = Y(Ta, z) = \partial_x Y(a,z).$$

(invariancia de la traslación)

- Si $(V, Y, \mathbf{1})$ es un álgebra de vértices $T(v) := v_{-2}\mathbf{1}$.
- Para $a, b \in V$, se define el λ-producto por la fórmula

$$a_\lambda b = Res_z e^{\lambda z} Y(a,z) b = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n b / n!$$

Algebras conformes y álgebras de vértices.

- $(V, \mathbf{1})$ un espacio vectorial punteado
- Y un estado-campo correspondencia. Es decir un mapa lineal que satisface los tres primeros axiomas de la definición de álgebras de vértices y existe $T \in EndV$ tal que

$$[T, Y(a,z)] = Y(Ta, z) = \partial_x Y(a,z).$$

(invariancia de la traslación)

- Si $(V, Y, \mathbf{1})$ es un álgebra de vértices $T(v) := v_{-2}\mathbf{1}$.
- Para $a, b \in V$, se define el λ-producto por la fórmula

$$a_\lambda b = Res_z e^{\lambda z} Y(a,z)b = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n b / n!$$

Algebras conformes y álgebras de vértices.

- $(V, \mathbf{1})$ un espacio vectorial punteado
- Y un estado-campo correspondencia. Es decir un mapa lineal que satisface los tres primeros axiomas de la definición de álgebras de vértices y existe $T \in EndV$ tal que

$$[T, Y(a,z)] = Y(Ta, z) = \partial_x Y(a,z).$$

(invariancia de la traslación)

- Si $(V, Y, \mathbf{1})$ es un álgebra de vértices $T(v) := v_{-2}\mathbf{1}$.
- Para $a, b \in V$, se define el λ-producto por la fórmula

$$a_\lambda b = Res_z e^{\lambda z} Y(a,z)b = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n b / n!$$

Algebras conformes y álgebras de vértices.

- $(V, \mathbf{1})$ un espacio vectorial punteado
- Y un estado-campo correspondencia. Es decir un mapa lineal que satisface los tres primeros axiomas de la definición de álgebras de vértices y existe $T \in EndV$ tal que

$$[T, Y(a, z)] = Y(Ta, z) = \partial_x Y(a, z).$$

(invariancia de la traslación)

- Si $(V, Y, \mathbf{1})$ es un álgebra de vértices $T(v) := v_{-2}\mathbf{1}$.
- Para $a, b \in V$, se define el λ-producto por la fórmula

$$a_\lambda b = Res_z e^{\lambda z} Y(a, z) b = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n b / n!$$

- También tenemos el (-1)-producto en V:

$$a \cdot b = Res_z z^{-1} Y(a,z) b = a_{(-1)} b.$$

- El axioma del vacío implica:

$$\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1}, \tag{2.1}$$

- El axioma de invariancia de traslación muestra que:

$$T(a \cdot b) = T(a) \cdot b + a \cdot T(b) \tag{2.2}$$

$$T(a_\lambda b) = (Ta)_\lambda b + a_\lambda (Tb), \quad (Ta)_\lambda b = -\lambda a_\lambda b \tag{2.3}$$

para todo $a, b \in V$.

- También tenemos el (-1)-producto en V:

$$a \cdot b = Res_z z^{-1} Y(a,z) b = a_{(-1)} b.$$

- El axioma del vacío implica:

$$\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1}, \tag{2.1}$$

- El axioma de invariancia de traslación muestra que:

$$T(a \cdot b) = T(a) \cdot b + a \cdot T(b) \tag{2.2}$$

$$T(a_\lambda b) = (Ta)_\lambda b + a_\lambda (Tb), \quad (Ta)_\lambda b = -\lambda a_\lambda b \tag{2.3}$$

para todo $a, b \in V$.

- También tenemos el (-1)-producto en V:

$$a \cdot b = Res_z z^{-1} Y(a,z)b = a_{(-1)}b.$$

- El axioma del vacío implica:

$$\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1}, \tag{2.1}$$

- El axioma de invariancia de traslación muestra que:

$$T(a \cdot b) = T(a) \cdot b + a \cdot T(b) \tag{2.2}$$

$$T(a_\lambda b) = (Ta)_\lambda b + a_\lambda (Tb), \quad (Ta)_\lambda b = -\lambda a_\lambda b \tag{2.3}$$

para todo $a, b \in V$.

Recíprocamente, dados:

- Un operador lineal T,
- Un λ-producto,
- Un $\cdot$-producto en V,

satisfaciendo las propiedades (2.1)-(2.3), podemos reconstruir un estado-campo correspondencia Y por las fórmulas:

$$Y(a,z)_{+} = (e^{zT}a)b, \quad Y(a,z)_{-}b = (a_{\partial_z b})(z^{-1}),$$

donde $Y(a,z) = Y(a,z)_{+} + Y(a,z)_{-}$. Un $\mathbb{C}[T]$-módulo V, junto con un mapa lineal $V \otimes V \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes V$, $a \otimes b \to a_\lambda b$ satisfaciendo (2.3) es llamada $(\mathbb{C}[\mathbb{T}])$-álgebra conforme . Por el otro lado con respecto al $\cdot$-producto, V es una $\mathbb{C}[T]$-álgebra diferencial.

Teorema

Dar una estructura de álgebra de vértices en un espacio vectorial punteado $(V, \mathbf{1})$ *es lo mismo que tener una estructura en* V *de* $\mathbb{C}[T]$*-álgebra de Lie conforme y una estructura* $\mathbb{C}[T]$*-álgebra diferencial simétrica a izquierda con cierta compatibilidad adicional entre esas dos estructuras.*

Γ-álgebras de vértices.

Definición

Sea Γ un subgrupo de C^*. Una Γ-álgebra de vértices consiste de un espacio vectorial V y un mapa lineal

$$Y_\alpha(\cdot, x) : V \to (\text{End V})[[x, x^{-1}]]$$

$$v \to Y_\alpha(v, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{n,\alpha} x^{-n-1}$$

para $\alpha \in \Gamma$ y un elemento distinguido $\mathbf{1}$ de V (el vector vacío). Las siguientes condiciones son asumidas para $u, v \in V, \alpha \in \Gamma$:

$$Y_\alpha(\mathbf{1}, x) = I_V \tag{3.1}$$

$$Y_\alpha(v, x)\mathbf{1} \in V[[x]] \quad y \quad \lim_{x \to 0} Y_{\mathbf{1}}(v, x)\mathbf{1} = v \tag{3.2}$$

Existen $k \in \mathbb{Z}$, tal que para $u, v, w \in V, \alpha, \beta \in \Gamma$:

$$(x_1 - \beta^{-1}\alpha x_2)^k [Y_\alpha(u, x_1), Y_\beta(v, x_2)] = 0 \tag{3.3}$$

(localidad débil)

$$(x_0 + \beta^{-1}\alpha x_2)^l Y_\beta(Y_{\beta^{-1}\alpha}(u, x_0)v, x_2)w = (x_0 + \beta^{-1}\alpha x_2)^l Y_\alpha(u, x_0 + x_2) Y_\beta(v, x_2) w \tag{3.4}$$

(asociatividad débil)

Lemma

Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ una Γ-álgebra de vértices. Para $\alpha \in \Gamma$ se define $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ por

$$R_\alpha(v) = Res_x x^{-1} Y_\alpha(v,x)\mathbf{1} = \lim_{x \to 0} Y_\alpha(v,x)\mathbf{1}$$

para $v \in V$. Sea $T \in End_{\mathbb{C}} V$ definido por

$$Tv = Res_x x^{-2} Y_{\mathbf{1}}(v,x)\mathbf{1}$$

para $v \in V$. Entonces

$$Y_\alpha(Tv,x) = \partial_x Y_\alpha(v,x), \tag{3.5}$$

$$[T, Y_\alpha(v,x)] = \alpha Y_\alpha(v,x) \tag{3.6}$$

$$R_\alpha Y_\beta(v,x) = Y_{\alpha\beta}(v,x) R_\alpha \quad para \quad \alpha, \beta \in \Gamma, v \in V \tag{3.7}$$

Teorema

Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ *una* Γ*-álgebra de vértices y sea* $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$, *para* $\alpha \in \Gamma$ *definida como en el Lema. Entonces* $(V, \{Y_{\mathbf{1}}\}, \mathbf{1})$ *es un álgebra de vértices y el mapa* $\alpha \in \Gamma \rightarrow R_\alpha$ *es una representación de* Γ *en* V *con* $R_\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ *para* $\alpha \in \Gamma$. *Más aún*

$$Y_\alpha(v, x) = R_\alpha Y_{\mathbf{1}}(v, x) R_{\alpha^{-1}} = Y_{\mathbf{1}}(R_\alpha v, \alpha^{-1} x) \qquad (4.1)$$

Por otro lado, sea V *un álgebra de vértice ordinaria. Supongamos que* V *es un* Γ*-módulo con* $\alpha \in \Gamma$ *actuando como* $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ *tal que y*

$R_\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ y

$$R_\alpha Y(v,x) R_{\alpha^{-1}} = Y(R_\alpha v, \alpha^{-1} x), \quad para \quad \alpha \in \Gamma, v \in V. \tag{4.2}$$

Para $\alpha \in \Gamma$, se define $Y_\alpha \in (EndV)[[x, x^{-1}]]$ por

$$Y_\alpha(v,x) = R_\alpha Y(v,x) R_{\alpha^{-1}} = Y(R_\alpha v, \alpha^{-1} x) \tag{4.3}$$

- Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ una Γ-álgebra de vértices y sea $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ y $Tv = v_{-2}\mathbf{1}$.
- Tenemos asociada un álgebra de vértice ordinaria $(V, \{Y_{\mathbf{1}}\}, \mathbf{1})$,
- Un álgebra de vértice es lo mismo que una $\mathbb{C}[T]$-álgebra de Lie conforme con un λ-producto y una estructura de $\mathbb{C}[T]$-álgebra diferencial con un $\cdot$-producto.
- La relación

$$Y_\alpha(v, x) = R_\alpha Y_{\mathbf{1}}(v, x) R_{\alpha^{-1}} = Y_{\mathbf{1}}(R_\alpha v, \alpha^{-1} x)$$

implica

$$R_\alpha(a_\lambda b) = (R_\alpha a_{\alpha^{-1}\lambda} R_\alpha b) \tag{5.1}$$

$$R_\alpha(ab) = R_\alpha a \cdot R_\alpha b \tag{5.2}$$

Es decir R_α es un homo respecto del $\cdot$-producto.

- Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ una Γ-álgebra de vértices y sea $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ y $Tv = v_{-2}\mathbf{1}$.
- Tenemos asociada un álgebra de vértice ordinaria $(V, \{Y_{\mathbf{1}}\}, \mathbf{1})$,
- Un álgebra de vértice es lo mismo que una $\mathbb{C}[T]$-álgebra de Lie conforme con un λ-producto y una estructura de $\mathbb{C}[T]$-álgebra diferencial con un $\cdot$-producto.
- La relación

$$Y_\alpha(v, x) = R_\alpha Y_{\mathbf{1}}(v, x) R_{\alpha^{-1}} = Y_{\mathbf{1}}(R_\alpha v, \alpha^{-1} x)$$

implica

$$R_\alpha(a_\lambda b) = (R_\alpha a_{\alpha^{-1}\lambda} R_\alpha b) \tag{5.1}$$

$$R_\alpha(ab) = R_\alpha a \cdot R_\alpha b \tag{5.2}$$

Es decir R_α es un homo respecto del $\cdot$-producto.

- Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ una Γ-álgebra de vértices y sea $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ y $Tv = v_{-2}\mathbf{1}$.
- Tenemos asociada un álgebra de vértice ordinaria $(V, \{Y_{\mathbf{1}}\}, \mathbf{1})$,
- Un álgebra de vértice es lo mismo que una $\mathbb{C}[T]$-álgebra de Lie conforme con un λ-producto y una estructura de $\mathbb{C}[T]$-álgebra diferencial con un $\cdot$-producto.
- La relación

$$Y_\alpha(v, x) = R_\alpha Y_{\mathbf{1}}(v, x) R_{\alpha^{-1}} = Y_{\mathbf{1}}(R_\alpha v, \alpha^{-1} x)$$

implica

$$R_\alpha(a_\lambda b) = (R_\alpha a_{\alpha^{-1}\lambda} R_\alpha b) \tag{5.1}$$

$$R_\alpha(ab) = R_\alpha a \cdot R_\alpha b \tag{5.2}$$

Es decir R_α es un homo respecto del $\cdot$-producto.

- Sea $(V, \{Y_\alpha\}, \mathbf{1})$ una Γ-álgebra de vértices y sea $R_\alpha \in End_{\mathbb{C}} V$ y $Tv = v_{-2}\mathbf{1}$.
- Tenemos asociada un álgebra de vértice ordinaria $(V, \{Y_{\mathbf{1}}\}, \mathbf{1})$,
- Un álgebra de vértice es lo mismo que una $\mathbb{C}[T]$-álgebra de Lie conforme con un λ-producto y una estructura de $\mathbb{C}[T]$-álgebra diferencial con un $\cdot$-producto.
- La relación

$$Y_\alpha(v, x) = R_\alpha Y_{\mathbf{1}}(v, x) R_{\alpha^{-1}} = Y_{\mathbf{1}}(R_\alpha v, \alpha^{-1} x)$$

implica

$$R_\alpha(a_\lambda b) = (R_\alpha a_{\alpha^{-1}\lambda} R_\alpha b) \tag{5.1}$$

$$R_\alpha(ab) = R_\alpha a \cdot R_\alpha b \tag{5.2}$$

Es decir R_α es un homo respecto del $\cdot$-producto.

- $R_\alpha T R_{\alpha^{-1}} = \alpha T$, osea Γ actúa en $\mathbb{C}[T]$ por automorfismos donde $\alpha \cdot T = R_\alpha T R_{\alpha^{-1}}$.
- Por otro lado las álgebra de Lie conforme introducidas por V.Kac son lo mismo que las $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebras de Lie , donde $\mathbb{C}[\partial]$ es un álgebra de Hopf. La relación entre el λ-corchete y el pseudo-corchete está dado por

$$[a_\lambda b] = \sum p_i(\lambda) c_i \Leftrightarrow [a_* b] = \sum p_i(-\partial) \otimes 1 \otimes_{\mathbb{C}[\partial]} c_i$$

- Luego V es una $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebra, y (5.1) implica que el pseudocorchete es compatible con la acción de Γ

- $R_\alpha T R_{\alpha^{-1}} = \alpha T$, osea Γ actúa en $\mathbb{C}[T]$ por automorfismos donde $\alpha \cdot T = R_\alpha T R_{\alpha^{-1}}$.
- Por otro lado las álgebra de Lie conforme introducidas por V.Kac son lo mismo que las $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebras de Lie , donde $\mathbb{C}[\partial]$ es un álgebra de Hopf. La relación entre el λ-corchete y el pseudo-corchete está dado por

$$[a_\lambda b] = \sum p_i(\lambda) c_i \Leftrightarrow [a_* b] = \sum p_i(-\partial) \otimes 1 \otimes_{\mathbb{C}[\partial]} c_i$$

- Luego V es una $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebra, y (5.1) implica que el pseudocorchete es compatible con la acción de Γ

- $R_\alpha T R_{\alpha^{-1}} = \alpha T$, osea Γ actúa en $\mathbb{C}[T]$ por automorfismos donde $\alpha \cdot T = R_\alpha T R_{\alpha^{-1}}$.
- Por otro lado las álgebra de Lie conforme introducidas por V.Kac son lo mismo que las $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebras de Lie , donde $\mathbb{C}[\partial]$ es un álgebra de Hopf. La relación entre el λ-corchete y el pseudo-corchete está dado por

$$[a_\lambda b] = \sum p_i(\lambda) c_i \Leftrightarrow [a_* b] = \sum p_i(-\partial) \otimes 1 \otimes_{\mathbb{C}[\partial]} c_i$$

- Luego V es una $\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebra, y (5.1) implica que el pseudocorchete es compatible con la acción de Γ

- Finalmente ser V una$\mathbb{C}[\partial]$-pseudoalgebra donde el pseudo-corchete es compatible con la acción del Γ es $\Leftrightarrow$ a ser V una- H-pseudoalgebra (donde H es el smah producto de $\mathbb{C}[T]$ con el álgebra de grupo $\mathbb{C}[\Gamma]$ y Γ actúa en $\mathbb{C}[T]$ por automorfismos) $\Leftrightarrow$ a ser V una Γ-álgebra conforme .

Algebras conformes cuánticas

Definición

Un álgebra de vértices cuántica débiles un álgebra de vértices no local la cual satisface S-localidad en el sentido que para $u, v \in V$ existen

$$u^{(i)}, v^{(i)} \in V, f_i(x) \in \mathbb{C}((x))\,(i = 1, \cdots, r)$$

tal que

$$(x_1 - x_2)^k Y(u, x_1) Y(v, x_2) = \\ (x_1 - x_2)^k f_i(x_2 - x_1) Y(v^{(i)}, x_2) Y(u(i), x_1) \quad (6.1)$$

B. Bakalov and V. Kac, Field algebras, *Internat. Math. Res. Notices* 3 (2003) 123-159.

P. Etingof, I. Frenkel, and A. Kirillov, Jr., *Lectures on Representation Theory and Knizhnik-Zamolodchikov Equations*, Math. Surveys and Monographs, V. 58, AMS, 1998.

I. Frenkel and N. Jing, Vertex operator representations of quantum affine algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA 85 (1988) 9373-9377.

M. Golenisheva-kutuzova and V.Kac, Γ-conformal algebras *J. Math.Phys.* 39(1998), 2290-2305.

H.-S. Li, Nonlocal vertex algebras generated by formal vertex operators, *Selecta Math. (New Series)* 11 (2005) 349-397.