Soluciones Equivariantes de la Ecuación de Yamabe

Guillermo Henry

UBA - CONICET

Jornadas de Geometría Diferencial y Teoría de Lie, UNR
31 de agosto y 1 de septiembre de 2017, Rosario.

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada $(n \geq 3)$ y sea $G \subset I(M,g)$ un subgrupo compacto de isometrías.

Una solución $G-$equivariante de la ecuación de Yamabe de (M,g) es una función f $G-$invariante $(f \circ \sigma = f \ \forall \sigma \in G)$ que satisface para algún $c \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{\frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g f + s_g f}_{L_g(f)} = c|f|^{\frac{4}{n-2}} f \qquad (Ec.Y),$$

donde s_g es la curvatura escalar de (M,g).

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana cerrada $(n \geq 3)$ y sea $G \subset I(M, g)$ un subgrupo compacto de isometrías.

Una solución $G-$equivariante de la ecuación de Yamabe de (M, g) es una función f $G-$invariante $(f \circ \sigma = f \ \forall \sigma \in G)$ que satisface para algún $c \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{\frac{4(n-1)}{(n-2)}\Delta_g f + s_g f}_{L_g(f)} = c|f|^{\frac{4}{n-2}} f \qquad (Ec.Y),$$

donde s_g es la curvatura escalar de (M, g).

Si $f > 0$ es una solución de $(Ec.Y)$, entonces

$$h = f^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$$

es una métrica conforme a g, de curvatura escalar constante c y $G-$invariante $(G \subset I(M, h))$.

Existencia de soluciones $G-$invariantes positivas

$$L_g(f) = c|f|^{\frac{4}{n-2}} f$$

- Si $G = Id_M \Longrightarrow$ clásico problema de Yamabe.

Yamabe (1960), Trüdinger (1968), Aubin (1976) y Schoen (1984):

Existe una solución positiva de la Ec. de Yamabe sii

$$signo(c) = signo\Big(Y(M,[g])\Big)$$

Existencia de soluciones $G-$invariantes positivas

$$L_g(f) = c|f|^{\frac{4}{n-2}}f$$

- Si $G = Id_M \Longrightarrow$ clásico problema de Yamabe.

Yamabe (1960), Trüdinger (1968), Aubin (1976) y Schoen (1984):

Existe una solución positiva de la Ec. de Yamabe sii

$$signo(c) = signo\Big(Y(M,[g])\Big)$$

- Si existe $h \in [g]$ tal que $s_h \leq 0$ (sii $Y(M,[g]) \leq 0$)

Escencialmente hay solución única $\Longrightarrow$ invariante por $I(M,g) \Longrightarrow$ solución positiva $G-$invariante.

Constante equivariante de Yamabe.

Sea el funcional

$$f \in C_G^{\infty}(M) - \{0\} \longrightarrow J(f) = \frac{\int_M a_n |\nabla f|^2 + s_g f^2 dv_g}{\left(\int_M f^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

La constante $G-$equivariante de Yamabe de (M, g) es

$$Y_G(M, g) := \inf_{f \in C_G^{\infty}(M) - \{0\}} J(f).$$

Si $Y_G(M, g) = J(f) \Longrightarrow f$ es solución $G-$equivariante de (Ec. Y).

- Si $G = \{Id_M\}$, $Y_G(M,g) = Y(M,g)$

$$Y(M,g) \leq Y(S^n, g_0^n) = n(n-1)vol(S^n, g_0^n)^{\frac{2}{n}} = Y(S^n)$$

Si $(M,g) \neq (S^n, g_0^n) \implies Y(M,g) < Y(S^n)$.

En el caso general se tiene que:

Si $O_G(P)$ es la órbita de $P \in M$, sea

$$\Lambda_G := \inf_{P\in M}\{\# O_G(P)\}.$$

La constante esta acotada por

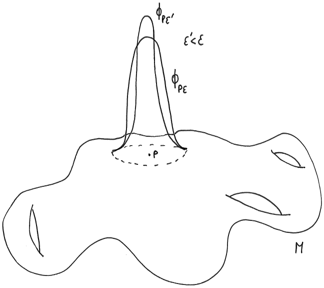
$$Y(M,g) \leq Y_G(M,g) \leq Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}}.$$

Si $Y_G(M,g) \leq 0$ o $\Lambda_G = +\infty$, se satisface la desigualdad estricta.

Para $P \in M$ y $\delta > 0$, sea

$$\phi_{P,\varepsilon}(Q) = C_\varepsilon \eta(Q) \Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + d_g^2(Q,P)} \Big)^{\frac{n-2}{2}},$$

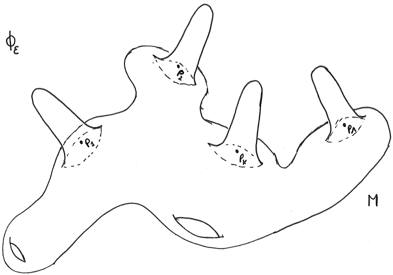
donde η es una función cut-off centrada en P.



$$J(\phi_{P,\varepsilon}) \longrightarrow_{\varepsilon \to 0} Y(S^n).$$

Si $\Lambda_G < +\infty$ y $\{P_1, \ldots, P_{\Lambda_G}\}$ una orbita minimal.

$$\phi_\varepsilon(Q) := \sum_{i=1}^{\Lambda_G} \phi_{P_i,\varepsilon}(Q),$$



ϕ_ε es G invariante,

$$J(\phi_\varepsilon) \longrightarrow_{\varepsilon \to 0} Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}}.$$

Luego,

$$Y_G(M, g) \leq Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}}.$$

Hebey y Vaugon (1993) probaron que

$$\text{Si } Y_G(M,g) < Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}} \Longrightarrow Y_G(M,g) \text{ se realiza.}$$

Conjetura de Hebey-Vaugon

Si (M,g) no es conforme a la esfera o G actua sin puntos fijos, entonces

$$Y_G(M,g) < Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}}.$$

Hebey y Vaugon (1993) probaron que

$$\text{Si } Y_G(M,g) < Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}} \Longrightarrow Y_G(M,g) \text{ se realiza.}$$

Conjetura de Hebey-Vaugon

Si (M,g) no es conforme a la esfera o G actua sin puntos fijos, entonces

$$Y_G(M,g) < Y(S^n)\Lambda_G^{\frac{2}{n}}.$$

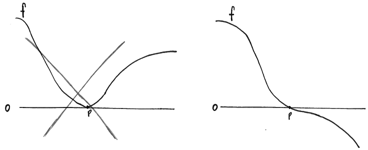
La conjetura es cierta si vale el Teorema de Masa Positiva en todas las dimensiones (Hebey-Vaugon (1993)-Madani 2012)

Soluciones Nodales

Si f es solución de la Ec. Yamabe de (M, g), M conexa,

$$L_g(f) = c|f|^{\frac{4}{n-2}} f$$

y para algún $P \in M$ $f(P) = 0$,



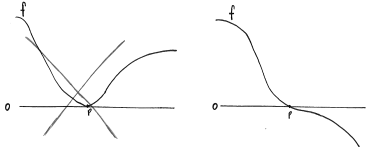
por el principio fuerte del máximo, $f \equiv 0$ o cambia de signo, es decir f es nodal.

Soluciones Nodales

Si f es solución de la Ec. Yamabe de (M, g), M conexa,

$$L_g(f) = c|f|^{\frac{4}{n-2}} f$$

y para algún $P \in M$ $f(P) = 0$,



por el principio fuerte del máximo, $f \equiv 0$ o cambia de signo, es decir f es nodal.

• Para (S^n, g_0^n) no existen soluciones nodales radiales. (Pohozaev (1965)). Pero sí, cuando $G = O(k) \times O(n+1-k)$ (Ding (1986)). Otras, Jourdain (1999), Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia (2010).

Ammann-Humbert (2006):

Si (M^n, g) no es localmente conforme plana (n.l.c.p.) y $Y(M,g) \geq 0$, entonces existe una solución nodal de (Ec. Y)

- si $Y(M,g) > 0$ y $n \geq 11$
- si $Y(M,g) = 0$ y $n \geq 9$.

Ammann-Humbert (2006):

Si (M^n, g) no es localmente conforme plana (n.l.c.p.) y $Y(M,g) \geq 0$, entonces existe una solución nodal de (Ec. Y)

- si $Y(M,g) > 0$ y $n \geq 11$
- si $Y(M,g) = 0$ y $n \geq 9$.

El espectro de L_g,

$$\underbrace{\lambda_1(g)}_{\text{signo de } Y(M,g)} < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \nearrow +\infty,$$

Ammann-Humbert (2006):

Si (M^n, g) no es localmente conforme plana (n.l.c.p.) y $Y(M,g) \geq 0$, entonces existe una solución nodal de (Ec. Y)

- si $Y(M,g) > 0$ y $n \geq 11$
- si $Y(M,g) = 0$ y $n \geq 9$.

El espectro de L_g,

$$\underbrace{\lambda_1(g)}_{\text{signo de } Y(M,g)} < \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \nearrow +\infty,$$

El Sayed (2013) (M^n, g) y $Y(M,g) < 0$

- si $\lambda_2(g) \leq 0$ existe solución nodal.
- si $\lambda_2(g) > 0$, (M,g) n.l.c.p. y $\dim(M) \geq 6$ existe solución nodal.

Sea W el tensor de Weyl de (M, g).

(M, g) es localmente conforme plano sii $W \neq 0$.

Definimos $\omega : M \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

$$\omega(x) := \begin{cases} \inf\{l \in \mathbb{N}_0 : \ \nabla^l W(x) \neq 0\} \\ +\infty \text{ si } \nabla^l W(x) = 0 \ \forall \ l. \end{cases}$$

(M, g) localmente conforme plana $\implies \ \omega \equiv +\infty.$

(M, g) no es localmente conforme plana $\implies \ \exists \ P \in \omega(P) = 0.$

Teorema [H-Madani] (2016)

Sea $G \subset I(M,g)$ compacto y $Y_G(M,g) \geq 0$, entonces existe un solución nodal $G-$equivariante de la (Ec. Y) de (M,g) si

a) $\Lambda_G = +\infty$.

b) Existe P de orbita minimal tal que $\omega(P) \leq \frac{n-2}{6}$ y
  - $n \geq 11$ si $Y_G(M,g) > 0$.
  - $n \geq 9$ si $Y_G(M,g) = 0$.

Teorema [H-Madani] (2016)

Sea $G \subset I(M,g)$ compacto y $Y_G(M,g) \geq 0$, entonces existe un solución nodal $G-$equivariante de la (Ec. Y) de (M,g) si

a) $\Lambda_G = +\infty$.

b) Existe P de orbita minimal tal que $\omega(P) \leq \frac{n-2}{6}$ y
   - $n \geq 11$ si $Y_G(M,g) > 0$.
   - $n \geq 9$ si $Y_G(M,g) = 0$.

Si restringimos L_g a $H^2_{1,G}(M)$, su espectro es

$$\lambda_{1,G}(g) \leq \lambda_{2,G}(g) \leq \lambda_{3,G}(g) \leq \cdots \leq \lambda_{g,k}(g) \nearrow +\infty, \subset (Spect(L_g))$$

$[g]_G$ métricas $G-$invariantes en $[g]$.

Segunda constante equivariante de Yamabe.

$$Y_G^2(M,[g]_G) := \inf_{h\in[g]_G} \lambda_{2,G}(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}}.$$

Si $Y_G^2(M,[g]_G)$ se realiza $\Longrightarrow$ minimizantes nos dan soluciones nodales.

Pero $Y_G^2(M,[g]_G)$ no se realiza en métricas Riemannianas. Para obtener minimizantes debemos extender $[g]_G$:

$$[g]_{G,gen} := \left\{ u^{\frac{4}{n-2}} g : \; u \in L_{G,\geq 0}^{\frac{2n}{n-2}} - \{0\} \right\}$$ (métricas generalizadas)

$$Y_G^2(M,[g]_G) := \inf_{h\in[g]_{G,gen}} \lambda_{2,G}(h) vol(M,h)^{\frac{2}{n}}.$$

Teorema [H-Madani] (2016)

Si $Y_G(M,[g]_G) > 0$ y se realiza por una métrica general $h = u^{\frac{4}{n-2}} g$ ($\|u\|_{\frac{2n}{n-2}} = 1$), entonces $u = |v|$, donde v es una solución nodal $G-$ equivariante de (Ec. Y)

$$L_g(v) = Y_G^2(M,[g]_G)|v|^{\frac{4}{n-2}} v.$$

Teorema [H-Madani] (2016)

Si $Y_G(M,[g]_G) > 0$ y se realiza por una métrica general $h = u^{\frac{4}{n-2}} g$ ($\|u\|_{\frac{2n}{n-2}} = 1$), entonces $u = |v|$, donde v es una solución nodal $G-$ equivariante de (Ec. Y)

$$L_g(v) = Y_G^2(M,[g]_G)|v|^{\frac{4}{n-2}} v.$$

La constante se realizará si se cumple

$$Y_G^2(M,[g]_G) < \left(Y_G(M,[g]_G)^{\frac{n}{2}} + Y(S^n)^{\frac{n}{2}} \Lambda_G \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Evita fenómenos de concentración. Es decir, podemos encontrar una sucesión de métricas generalizadas que no convergen a cero.

En general, si $Y_G(M,g)$ se alcanza, se puede ver que la 2da constante equivariante está acotada por

$$2^{\frac{2}{n}} Y_G(M,[g]_G) \leq Y_G^2(M,[g]_G) \leq \left(Y_G(M,[g]_G)^{\frac{n}{2}} + Y(S^n)^{\frac{n}{2}} \Lambda_G \right)^{\frac{2}{n}}.$$

la desigualdad estricta se da

$$Y_G^2(M,[g]_G) < \left(Y_G(M,[g]_G)^{\frac{n}{2}} + Y(S^n)^{\frac{n}{2}} \Lambda_G \right)^{\frac{2}{n}}.$$

se da en las condiciones del Teorema, es decir.

a) $\Lambda_G = +\infty$.

b) Existe P de orbita minimal tal que $\omega(P) \leq \frac{n-2}{6}$ y
- $n \geq 11$ si $Y_G(M,g) > 0$.
- $n \geq 9$ si $Y_G(M,g) = 0$.

Caracterización min-max:

$$Y_G^2(M,[g]_G) = \inf_{u\in L_G^{p_n}(M)\geq 0} \sup_{v\in V-\{0\}} \frac{\int_M a|\nabla v|^2_{g+th} + s_g v^2 dv_g}{\int_M u^{\frac{4}{n-2}} v^2 dv_g}$$

$$\times \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{2}{n}}.$$

donde V un subespacio de $H_{1,G}^2(M)$ con $\dim(V) = 2$ en $H_{1,G}^2(M - \{u = 0\})$, $a = 4(n-1)/(n-2)$.

Para probar la desigualdad hay que encontrar u y V adecuados.

Caracterización min-max:

$$Y_G^2(M,[g]_G) = \inf_{u\in L_G^{p_n}(M)\geq 0} \sup_{v\in V-\{0\}} \frac{\int_M a|\nabla v|^2_{g+th} + s_g v^2 dv_g}{\int_M u^{\frac{4}{n-2}} v^2 dv_g}$$

$$\times (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g)^{\frac{2}{n}}.$$

donde V un subespacio de $H^2_{1,G}(M)$ con $\dim(V) = 2$ en $H^2_{1,G}(M - \{u = 0\})$, $a = 4(n-1)/(n-2)$.

Para probar la desigualdad hay que encontrar u y V adecuados.

Métrica test:

Por ej., para $Y_G(M,g) > 0$, $\Lambda_G < +\infty$
Sea φ tal que

$$J(\varphi) = Y_G(M,g)$$

$$u_\varepsilon := J(\phi_\varepsilon)^{\frac{n-2}{4}}\phi_\varepsilon + Y_G(M,g)^{\frac{n-2}{4}}\varphi$$

y

$$V_\varepsilon = span\Big(\phi_\varepsilon, \varphi\Big)$$

Sea P de orbita minimal $O_G(P)$, dado

$$\phi_{P,\varepsilon}(Q) := \eta_{P,\delta}\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + d^2(P,Q)}\Big)^{\frac{n-2}{2}}$$

definimos

$$\psi_{P,\varepsilon}(Q) := (1 + r^{\omega+2}\sum_{k=1}^{[\frac{\omega}{2}]} c_k\varphi_k(\xi))\phi_{P,\varepsilon}(Q)$$

Finalmente,

$$\phi_\varepsilon := \sum_{\sigma\in G/H} \psi_{P,\varepsilon}\circ\sigma^{-1}$$

donde $H \subset G$ es el estabilizador de P.

$$u_\varepsilon := Y(\phi_\varepsilon)^{\frac{n-2}{4}}\phi_\varepsilon + Y_G(M,g)^{\frac{n-2}{4}}\varphi$$

$$V_\varepsilon = span\{\phi_\varepsilon, \varphi\}$$

para ε suficientemente chico y $\omega(P) \leq (n-2)/6$.

$$Y_G^2(M,[g]_G) \leq \sup_{v \in V_\varepsilon - \{0\}} \frac{\int_M a|\nabla v|^2_{g+th} + s_g v^2 dv_g}{\int_M u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}} v^2 dv_g}$$

$$\times\left(\int_M u_\varepsilon^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{2}{n}} < \left[Y_G(M,g)^{\frac{n}{2}} + Y(S^n)^{\frac{n}{2}}\Lambda_G\right]^{\frac{2}{n}}.$$

¡Muchas Gracias!