Sobre el operador $L + \alpha|T|$ en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

Jornadas de Geometría Diferencial y Teoría de Lie
31 de agosto y 1ro. de septiembre de 2017
Celebramos los 50 años de la Licenciatura en Matemática
FCEIA - UNR

El *grupo de Heisenberg* de dimensión (real) $2n+1$ es el grupo de Lie

$$\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R},$$

con la ley de grupo dada por $(z,t)(z',t') = \left(z+z', t+t' - \frac{1}{2}\mathfrak{Im} B(z,z')\right)$, donde $B(z,z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z'_j}$.

$\mathbb{H}_n$, $\mathfrak{h}_n$ y $U(n)$: el grupo, el álgebra y la acción.

El *grupo de Heisenberg* de dimensión (real) $2n+1$ es el grupo de Lie

$$\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R},$$

con la ley de grupo dada por $(z,t)(z',t') = \left(z+z', t+t' - \frac{1}{2}\mathfrak{Im} B(z,z')\right)$, donde $B(z,z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z'_j}$.

El *álgebra de Heisenbeg* de dimensión (real) $2n+1$ es el álgebra de Lie asociada

$$\mathfrak{h}_n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R};$$

la base canónica viene dada por $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T\}$, con $[X_j, Y_j] = T$ los únicos corchetes no nulos.

El *grupo de Heisenberg* de dimensión (real) $2n+1$ es el grupo de Lie

$$\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R},$$

con la ley de grupo dada por $(z,t)(z',t') = \left(z+z', t+t' - \frac{1}{2}\mathfrak{Im}B(z,z')\right)$, donde $B(z,z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j'}$.

El *álgebra de Heisenbeg* de dimensión (real) $2n+1$ es el álgebra de Lie asociada

$$\mathfrak{h}_n = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R};$$

la base canónica viene dada por $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T\}$, con $[X_j, Y_j] = T$ los únicos corchetes no nulos.

El *grupo unitario* es el subgrupo

$$U(n) = \{g \in M_n(\mathbb{C}) : gB = Bg\}$$

actúa naturalmente sobre $\mathbb{H}_n$: $g \cdot (z,t) = (gz, t)$.

$(\mathbb{H}_n, U(n))$ y $\varphi_{\lambda,k}$: el par de Gelfand y las funciones esféricas.

$(\mathbb{H}_n, U(n))$ es un *par de Gelfand*: $L^1\left({}_{U(n)}\backslash \mathbb{H}_n /_{U(n)}\right)$ es una subálgebra de Banach conmutativa.

$(\mathbb{H}_n, U(n))$ es un *par de Gelfand*: $L^1\left({}_{U(n)}\backslash\mathbb{H}_n/{}_{U(n)}\right)$ es una subálgebra de Banach conmutativa.

Equivalentemente, la subálgebra del AUE $\mathcal{D}(\mathbb{H}_n)^{U(n)} = \text{span}\{L, T\}$ es conmutativa.

Aquí, $L = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2$ es el *sublaplaciano*.

$(\mathbb{H}_n, U(n))$ y $\varphi_{\lambda,k}$: el par de Gelfand y las funciones esféricas.

$(\mathbb{H}_n, U(n))$ es un *par de Gelfand*: $L^1\left({}_{U(n)}\backslash\mathbb{H}_n/_{U(n)}\right)$ es una subálgebra de Banach conmutativa.
Equivalentemente, la subálgebra del AUE $\mathcal{D}(\mathbb{H}_n)^{U(n)} = \operatorname{span}\{L, T\}$ es conmutativa.
Aquí, $L = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2$ es el *sublaplaciano*.
Las *funciones esféricas* asociadas al pdG pueden ser clasificadas en dos tipos (1992, [BJR]):

Tipo I restringidas al centro son caracteres no triviales

$$\varphi_{\lambda,k}(z,t) = \binom{k+n-1}{k}^{-1} e^{-i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2},$$

$\lambda \neq 0$ y $k \geq 0$, donde L_k^{n-1} es el polinomio de Laguerre de orden $n-1$ y grado k.

Tipo II constantes en el centro

$$\eta_w(z,t) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(|z||w|)^{n-1}} J_{n-1}(|z||w|),$$

con $w \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, donde J_{n-1} es la función de Bessel de orden $n-1$ de la primera clase, y

$$\eta_0(z,t) = 1.$$

$L + \alpha|T|$: el operador.

Las funciones esféricas de tipo I son autofunciones simultáneas de L y T:

$$\begin{aligned} L\varphi_{\lambda,k} =& -|\lambda|(2k+n)\varphi_{\lambda,k}, \\ T\varphi_{\lambda,k} =& i\lambda\varphi_{\lambda,k}, \end{aligned}$$

Las funciones esféricas de tipo I son autofunciones simultáneas de L y T:

$$\begin{aligned} L\varphi_{\lambda,k} &= -|\lambda|(2k+n)\varphi_{\lambda,k}, \\ T\varphi_{\lambda,k} &= i\lambda\varphi_{\lambda,k}, \end{aligned}$$

y proveen de una descomposición espectral de $L^2(\mathbb{H}_n)$ así como de una *fórmula de inversión*: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda. \qquad (FI)$$

Las funciones esféricas de tipo I son autofunciones simultáneas de L y T:

$$\begin{aligned} L\varphi_{\lambda,k} =& -|\lambda|(2k+n)\varphi_{\lambda,k}, \\ T\varphi_{\lambda,k} =& i\lambda\varphi_{\lambda,k}, \end{aligned}$$

y proveen de una descomposición espectral de $L^2(\mathbb{H}_n)$ así como de una *fórmula de inversión*: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda. \qquad (FI)$$

Esto nos permite definir el operador $|T|$ a través de sus autovalores:

$$|T|\varphi_{\lambda,k} = |\lambda|\varphi_{\lambda,k},$$

y de la FI podemos escribir

$$|T|f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|(f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda.$$

Las funciones esféricas de tipo I son autofunciones simultáneas de L y T:

$$\begin{aligned} L\varphi_{\lambda,k} =& -|\lambda|(2k+n)\varphi_{\lambda,k}, \\ T\varphi_{\lambda,k} =& i\lambda\varphi_{\lambda,k}, \end{aligned}$$

y proveen de una descomposición espectral de $L^2(\mathbb{H}_n)$ así como de una *fórmula de inversión*: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} (f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda. \qquad (FI)$$

Esto nos permite definir el operador $|T|$ a través de sus autovalores:

$$|T|\varphi_{\lambda,k} = |\lambda|\varphi_{\lambda,k},$$

y de la FI podemos escribir

$$|T|f(z,t) = \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|(f * \varphi_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda.$$

Finalmente definimos el operador $A_\alpha = L + \alpha|T|$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$A_\alpha\varphi_{\lambda,k} = -|\lambda|(2k+n-\alpha)\varphi_{\lambda,k}.$$

Φ?: El problema.

En este contexto definimos como una *solución fundamental* para un operador D a una distribución temperada Φ tal que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$, el operador definido como $Kf = f * \Phi$ verifique

$$K \circ Df = D \circ Kf = f.$$

En este contexto definimos como una *solución fundamental* para un operador D a una distribución temperada Φ tal que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$, el operador definido como $Kf = f * \Phi$ verifique

$$K \circ Df = D \circ Kf = f.$$

El problema consiste en calcular explícitamente una solución fundamental para el operador A_α. Para resolverlo se nos presentan dos caminos. Antes de tomar alguno de ellos, revisemos el pasado.

En este contexto definimos como una *solución fundamental* para un operador D a una distribución temperada Φ tal que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$, el operador definido como $Kf = f * \Phi$ verifique

$$K \circ Df = D \circ Kf = f.$$

El problema consiste en calcular explícitamente una solución fundamental para el operador A_α. Para resolverlo se nos presentan dos caminos. Antes de tomar alguno de ellos, revisemos el pasado.
Antecedentes:

- En $\mathbb{H}_n$ bajo la acción de $U(n)$: Folland, Folland-Stein y otros calcularon por diferentes métodos la SF para L y $L + i\alpha T$,
- En $\mathbb{H}_n$ bajo la acción de $U(p,q)$: Godoy-Saal calcularnon la SF L, y en [CS] la adaptamos para $L + i\alpha T$.
- En grupos de tipo H bajo la acción de un grupo unitario: Kaplan calcula la SF, en [CS] adaptamos el método de [GS] para obtenerla, con cálculos explícitos para $N(p,q,\mathbb{H})$ bajo la acción de $U(p,q,\mathbb{H})$.

Camino 1: el método del candidato de Godoy-Saal.

Motivación para introducir el operador A_α: el método de Godoy y Saal para calcular la SF de L_α.

Camino 1: el método del candidato de Godoy-Saal.

Motivación para introducir el operador A_α: el método de Godoy y Saal para calcular la SF de L_α.
Ventaja: a partir de la FI se puede proponer un candidato natural. En este caso sería

$$< \Phi_\alpha, f >= \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-|\lambda|(2k+n-\alpha)} < \varphi_{\lambda,k}, f > |\lambda|^n d\lambda,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$.

Camino 1: el método del candidato de Godoy-Saal.

Motivación para introducir el operador A_α: el método de Godoy y Saal para calcular la SF de L_α.
Ventaja: a partir de la FI se puede proponer un candidato natural. En este caso sería

$$< \Phi_\alpha, f >= \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-|\lambda|(2k+n-\alpha)} < \varphi_{\lambda,k}, f > |\lambda|^n d\lambda,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$.
Dificultades que se nos han presentado:

- La buena definición. ¿Tiene sentido nuestra expresión formal? El método utiliza en esta instancia de la prueba la representación derivada, que en este caso no está disponible *pues* $|T|$ *no es un elemento del AUE*.

Camino 1: el método del candidato de Godoy-Saal.

Motivación para introducir el operador A_α: el método de Godoy y Saal para calcular la SF de L_α.
Ventaja: a partir de la FI se puede proponer un candidato natural. En este caso sería

$$< \Phi_\alpha, f >= \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-|\lambda|(2k+n-\alpha)} < \varphi_{\lambda,k}, f > |\lambda|^n d\lambda,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$.
Dificultades que se nos han presentado:

- La buena definición. ¿Tiene sentido nuestra expresión formal? El método utiliza en esta instancia de la prueba la representación derivada, que en este caso no está disponible *pues* $|T|$ *no es un elemento del AUE*.
- El candidato propuesto ¿nos proporciona realmente una solución fundamental para L_α? Deberíamos justificar el comportamiento del operador A_α frente a la convolución, pero nuevamente $|T|$ *no es un elemento del AUE*.

Motivación para introducir el operador A_α: el método de Godoy y Saal para calcular la SF de L_α.

Ventaja: a partir de la FI se puede proponer un candidato natural. En este caso sería

$$< \Phi_\alpha, f >= \sum_{k\geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-|\lambda|(2k+n-\alpha)} < \varphi_{\lambda,k}, f > |\lambda|^n d\lambda,$$

para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$.

Dificultades que se nos han presentado:

- La buena definición. ¿Tiene sentido nuestra expresión formal? El método utiliza en esta instancia de la prueba la representación derivada, que en este caso no está disponible *pues* $|T|$ *no es un elemento del AUE*.
- El candidato propuesto ¿nos proporciona realmente una solución fundamental para L_α? Deberíamos justificar el comportamiento del operador A_α frente a la convolución, pero nuevamente $|T|$ *no es un elemento del AUE*.
- Finalmente, ¿puede expresarse Φ_α con una fórmula explícita? En casos particulares de n y α podemos hacer algunos cálculos formales, pero no está claro que una fórmula general pueda deducirse.

Sin atender a cuestiones de convergencia... Tenemos que

$$-\Phi_\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+n-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2}}_{\varphi_{\lambda,k}} |\lambda|^{n-1} d\lambda,$$

Sin atender a cuestiones de convergencia... Tenemos que

$$-\Phi_\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+n-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2}}_{\varphi_{\lambda,k}} |\lambda|^{n-1} d\lambda,$$

y el lema de Abel nos permitiría escribir

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|\lambda|} e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2} |\lambda|^{n-1} d\lambda.$$

Camino 1, paso 1: el Lema de Abel.

Sin atender a cuestiones de convergencia... Tenemos que

$$-\Phi_\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+n-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2}}_{\varphi_{\lambda,k}} |\lambda|^{n-1} d\lambda,$$

y el lema de Abel nos permitiría escribir

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|\lambda|} e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2} |\lambda|^{n-1} d\lambda.$$

Y podemos calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|\lambda|} e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2} |\lambda|^{n-1} d\lambda = 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it+4\epsilon)^k}{(|z|^2-4it+4\epsilon)^{n+k}}\right),$$

con $\beta_n = (-1)^n 4^n (n-1)!$ y $\alpha_k = (-1)^k \binom{k+n-1}{n-1}$ (cf [GS1]).

Sin atender a cuestiones de convergencia... Tenemos que

$$-\Phi_\alpha = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+n-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2}}_{\varphi_{\lambda,k}} |\lambda|^{n-1} d\lambda,$$

y el lema de Abel nos permitiría escribir

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|\lambda|} e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2} |\lambda|^{n-1} d\lambda.$$

Y podemos calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon|\lambda|} e^{i\lambda t} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}|z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda|}{4}|z|^2} |\lambda|^{n-1} d\lambda = 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it+4\epsilon)^k}{(|z|^2-4it+4\epsilon)^{n+k}}\right),$$

con $\beta_n = (-1)^n 4^n (n-1)!$ y $\alpha_k = (-1)^k \binom{k+n-1}{n-1}$ (cf [GS1]).
Próximo paso: deshacernos del límite en ϵ.

Camino 1, paso 2: resolvemos el límite en ϵ.

Tomando (¡formalmente!) límite en ϵ:

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it)^k}{(|z|^2-4it)^{n+k}} \right).$$

Camino 1, paso 2: resolvemos el límite en ϵ.

Tomando (¡formalmente!) límite en ϵ:

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it)^k}{(|z|^2-4it)^{n+k}} \right).$$

Esta expresión es en el sentido de las distribuciones, luego escribimos

$$< -\Phi_\alpha, f >= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha}$$

$$\int_{\mathbb{H}_n} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{|z|^2+4it}{|z|^2-4it} \right)^{k+\frac{n}{2}} \frac{1}{(|z|^4+16t^2)^n} f(z,t)dzdt.$$

Tomando (¡formalmente!) límite en ϵ:

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it)^k}{(|z|^2-4it)^{n+k}} \right).$$

Esta expresión es en el sentido de las distribuciones, luego escribimos

$$< -\Phi_\alpha, f >= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha}$$
$$\int_{\mathbb{H}_n} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{|z|^2+4it}{|z|^2-4it} \right)^{k+\frac{n}{2}} \frac{1}{(|z|^4+16t^2)^n} f(z,t)dzdt.$$

Pasando a coordenadas esféricas obtenemos la siguiente expresión:

$$< -\Phi_\alpha, f >= \frac{\beta_n|S^{2n-1}|}{4} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} \alpha_k$$
$$\mathfrak{Re} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^\infty e^{i(2k+n)\theta} f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) \cos^{n-1}\theta d\rho d\theta \right).$$

Camino 1, paso 2: resolvemos el límite en ϵ.

Tomando (¡formalmente!) límite en ϵ:

$$-\Phi_\alpha = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{(|z|^2+4it)^k}{(|z|^2-4it)^{n+k}} \right).$$

Esta expresión es en el sentido de las distribuciones, luego escribimos

$$< -\Phi_\alpha, f >= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha}$$

$$\int_{\mathbb{H}_n} 2\mathfrak{Re}\beta_n\alpha_k \left(\frac{|z|^2+4it}{|z|^2-4it} \right)^{k+\frac{n}{2}} \frac{1}{(|z|^4+16t^2)^n} f(z,t)dzdt.$$

Pasando a coordenadas esféricas obtenemos la siguiente expresión:

$$< -\Phi_\alpha, f >= \frac{\beta_n|S^{2n-1}|}{4} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k\geq 0} \frac{r^{2k+n-\alpha}}{2k+n-\alpha}\alpha_k$$

$$\mathfrak{Re} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^\infty e^{i(2k+n)\theta} f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) \cos^{n-1}\theta d\rho d\theta \right).$$

Próximo paso: deshacernos del límite en r.

Tomando (¡formalmente!) límite en r:

$$< -\Phi_\alpha, f > = \widetilde{\beta_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \mathfrak{Re}\,\phi_\alpha(\theta) Kf(\theta) \cos^{n-1}\theta d\theta,$$

donde

$$\phi_\alpha(\theta) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}, \qquad \text{y}$$

$$Kf(\theta) = \int_0^\infty f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) d\rho.$$

Camino 1, paso 3: resolvemos el límite en r.

Tomando (¡formalmente!) límite en r:

$$< -\Phi_\alpha, f >= \widetilde{\beta_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \mathfrak{Re}\phi_\alpha(\theta) Kf(\theta) \cos^{n-1}\theta d\theta,$$

donde

$$\phi_\alpha(\theta) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}, \qquad \text{y}$$

$$Kf(\theta) = \int_0^\infty f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) d\rho.$$

Para calcular $\mathfrak{Re}\phi_\alpha$ tomemos $\phi'_\alpha(\theta) = i \sum_{k\geq 0} \alpha_k \frac{2k+n}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}$.

Definiendo $\eta(\theta) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{i(2k+n)\theta} = \left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n$, tendremos que

Camino 1, paso 3: resolvemos el límite en r.

Tomando (¡formalmente!) límite en r:

$$< -\Phi_\alpha, f >= \widetilde{\beta_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \mathfrak{Re}\phi_\alpha(\theta) Kf(\theta) \cos^{n-1}\theta d\theta,$$

donde

$$\phi_\alpha(\theta) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}, \qquad \text{y}$$

$$Kf(\theta) = \int_0^\infty f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) d\rho.$$

Para calcular $\mathfrak{Re}\phi_\alpha$ tomemos $\phi'_\alpha(\theta) = i \sum_{k\geq 0} \alpha_k \frac{2k+n}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}$.

Definiendo $\eta(\theta) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{i(2k+n)\theta} = \left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n$, tendremos que

$$\phi'_\alpha - i\alpha\phi_\alpha = i\eta,$$

Camino 1, paso 3: resolvemos el límite en r.

Tomando (¡formalmente!) límite en r:

$$< -\Phi_\alpha, f >= \widetilde{\beta_n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \Re\mathfrak{e}\,\phi_\alpha(\theta) Kf(\theta) \cos^{n-1}\theta d\theta,$$

donde

$$\phi_\alpha(\theta) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}, \qquad \text{y}$$

$$Kf(\theta) = \int_0^\infty f(\rho\cos\theta, \frac{\rho}{4}\sin\theta) d\rho.$$

Para calcular $\Re\mathfrak{e}\,\phi_\alpha$ tomemos $\phi'_\alpha(\theta) = i\sum_{k\geq 0} \alpha_k \frac{2k+n}{2k+n-\alpha} e^{i(2k+n)\theta}$.

Definiendo $\eta(\theta) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{i(2k+n)\theta} = \left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n$, tendremos que

$$\phi'_\alpha - i\alpha\phi_\alpha = i\eta,$$

y multiplicando por el factor integrante $e^{-i\alpha\theta}$ resulta

$$(e^{-i\alpha\theta}\phi_\alpha)' = ie^{-i\alpha\theta}\eta.$$

Fin del camino 1 para casos particulares.

Integrando, resulta:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha =& e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\eta(\omega)d\omega = e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n d\omega\\ =& ie^{i\alpha\omega}\int t^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt.\end{aligned}$$

Integrando, resulta:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha =& e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\eta(\omega)d\omega = e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n d\omega\\ =& ie^{i\alpha\omega}\int t^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt.\end{aligned}$$

En algunos casos, por ejemplo si $n-\alpha-1=2m+1$ con $\alpha<n$, podemos describir el integrando y calcular ϕ_α. Volviendo atrás los cambios de coordenadas,:

$$< -\Phi_\alpha, f > = \gamma_n < \frac{\mathcal{P}_{2m+1}}{(\frac{1}{16}|z|^2+t^2)^{m+1}}, f >,$$

donde $\mathcal{P}_{2m+1}$ es un polinomio homogéneo de grado $2m+1$.

Fin del camino 1 para casos particulares.

Integrando, resulta:

$$
\begin{aligned}
\phi_\alpha =& e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\eta(\omega)d\omega = e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n d\omega \\
=& ie^{i\alpha\omega}\int t^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt.
\end{aligned}
$$

En algunos casos, por ejemplo si $n-\alpha-1=2m+1$ con $\alpha<n$, podemos describir el integrando y calcular ϕ_α. Volviendo atrás los cambios de coordenadas,:

$$
< -\Phi_\alpha, f > = \gamma_n < \frac{\mathcal{P}_{2m+1}}{(\frac{1}{16}|z|^2+t^2)^{m+1}}, f >,
$$

donde $\mathcal{P}_{2m+1}$ es un polinomio homogéneo de grado $2m+1$.

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando no le sale un problema?

Fin del camino 1 para casos particulares.

Integrando, resulta:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha =& e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\eta(\omega)d\omega = e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n d\omega\\ =& ie^{i\alpha\omega}\int t^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt.\end{aligned}$$

En algunos casos, por ejemplo si $n-\alpha-1=2m+1$ con $\alpha<n$, podemos describir el integrando y calcular ϕ_α. Volviendo atrás los cambios de coordenadas,:

$$< -\Phi_\alpha, f > = \gamma_n < \frac{\mathcal{P}_{2m+1}}{(\frac{1}{16}|z|^2+t^2)^{m+1}}, f >,$$

donde $\mathcal{P}_{2m+1}$ es un polinomio homogéneo de grado $2m+1$.

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando no le sale un problema?
¡Transforma según Fourier!

Integrando, resulta:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha =& e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\eta(\omega)d\omega = e^{i\alpha\theta}\int ie^{-i\alpha\omega}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i2\theta}}\right)^n d\omega\\ =& ie^{i\alpha\omega}\int t^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt.\end{aligned}$$

En algunos casos, por ejemplo si $n-\alpha-1=2m+1$ con $\alpha<n$, podemos describir el integrando y calcular ϕ_α. Volviendo atrás los cambios de coordenadas,:

$$< -\Phi_\alpha, f > = \gamma_n < \frac{\mathcal{P}_{2m+1}}{(\frac{1}{16}|z|^2+t^2)^{m+1}}, f >,$$

donde $\mathcal{P}_{2m+1}$ es un polinomio homogéneo de grado $2m+1$.

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando no le sale un problema?
¡Transforma según Fourier!

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\ \mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\ \mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Luego también

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L_\alpha f)(z,\xi) =& (L-\alpha\xi)\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) =& (L+\alpha|\xi|)\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\ \mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Luego también

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L_\alpha f)(z,\xi) =& (L-\alpha\xi)\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) =& (L+\alpha|\xi|)\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} L_\alpha = L + i\alpha T \quad &\overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L - \alpha\xi, \\ A_\alpha = L + \alpha|T| \quad &\overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L + \alpha|\xi| = L + \alpha \operatorname{sgn}(\xi)\xi. \end{aligned}$$

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\
\mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\
\mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi).
\end{aligned}$$

Luego también

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(L_\alpha f)(z,\xi) =& (L-\alpha\xi)\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\
\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) =& (L+\alpha|\xi|)\mathcal{F}(f)(z,\xi).
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}
L_\alpha = L + i\alpha T \quad &\overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L-\alpha\xi, \\
A_\alpha = L + \alpha|T| \quad &\overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L+\alpha|\xi| = L+\alpha\,\mathrm{sgn}(\xi)\xi.
\end{aligned}$$

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando ve la función signo?

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\ \mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Luego también

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L_\alpha f)(z,\xi) =& (L-\alpha\xi)\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) =& (L+\alpha|\xi|)\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} L_\alpha = L + i\alpha T \quad & \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L - \alpha\xi, \\ A_\alpha = L + \alpha|T| \quad & \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L + \alpha|\xi| = L + \alpha \operatorname{sgn}(\xi)\xi. \end{aligned}$$

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando ve la función signo?
¡Transforma según Fourier!

Camino 2: comparar operadores.

Consideremos la transformada de Fourier en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$,

$$\mathcal{F}(f)(z,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(z,t)dt.$$

Haciendo los cálculos en coordenadas podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lf)(z,\xi) =& L\mathcal{F}(f)(z,\xi), \\ \mathcal{F}(Tf)(z,\xi) =& i\xi\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(|T|f)(z,\xi) =& |\xi|\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Luego también

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L_\alpha f)(z,\xi) =& (L-\alpha\xi)\mathcal{F}(f)(z,\xi) \text{ y} \\ \mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) =& (L+\alpha|\xi|)\mathcal{F}(f)(z,\xi). \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} L_\alpha = L + i\alpha T \quad & \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L - \alpha\xi, \\ A_\alpha = L + \alpha|T| \quad & \overset{\mathcal{F}}{\rightsquigarrow} \quad L + \alpha|\xi| = L + \alpha \operatorname{sgn}(\xi)\xi. \end{aligned}$$

TRIVIA: ¿Qué hace un analista cuando ve la función signo?
¡Transforma según Fourier! (la transformada de Hilbert).

Consideremos la transformada de Hilbert en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$

$$\mathcal{H}f(z,\xi) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{t} * f(z,t) \right)(z,\xi).$$

Consideremos la transformada de Hilbert en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$

$$\mathcal{H}f(z,\xi) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{t} * f(z,t) \right) (z,\xi).$$

Las transformadas de Fourier y Hilbert se relacionan según

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(z,\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi) \mathcal{F}f(z,\xi).$$

Camino 2: las piezas del rompecabezas.

Consideremos la transformada de Hilbert en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$

$$\mathcal{H}f(z,\xi) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{t} * f(z,t) \right) (z,\xi).$$

Las transformadas de Fourier y Hilbert se relacionan según

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(z,\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\mathcal{F}f(z,\xi).$$

Luego, si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ es tal que $(\mathcal{F}g) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_0^+$, entonces

$$\mathcal{F}(A_\alpha g) = (L + \alpha \ \mathrm{sgn}(\xi)\xi)\mathcal{F}(g) = (L + \alpha\xi)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g),$$

Consideremos la transformada de Hilbert en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$

$$\mathcal{H}f(z,\xi) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{t} * f(z,t) \right)(z,\xi).$$

Las transformadas de Fourier y Hilbert se relacionan según

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(z,\xi) = -i\ \mathrm{sgn}(\xi)\mathcal{F}f(z,\xi).$$

Luego, si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ es tal que $(\mathcal{F}g) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_0^+$, entonces

$$\mathcal{F}(A_\alpha g) = (L + \alpha\ \mathrm{sgn}(\xi)\xi)\mathcal{F}(g) = (L + \alpha\xi)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g),$$

y análogamente si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ es tal que $(\mathcal{F}h) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_0^-$, entonces

$$\mathcal{F}(A_\alpha h) = (L + \alpha\ \mathrm{sgn}(\xi)\xi)\mathcal{F}(h) = (L - \alpha\xi)\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(L_\alpha h).$$

Camino 2: las piezas del rompecabezas.

Consideremos la transformada de Hilbert en el centro: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$

$$\mathcal{H}f(z,\xi) = \frac{1}{\pi} v.p. \left(\frac{1}{t} * f(z,t) \right)(z,\xi).$$

Las transformadas de Fourier y Hilbert se relacionan según

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(z,\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi) \mathcal{F}f(z,\xi).$$

Luego, si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ es tal que $(\mathcal{F}g) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_0^+$, entonces

$$\mathcal{F}(A_\alpha g) = (L + \alpha \ \mathrm{sgn}(\xi)\xi)\mathcal{F}(g) = (L + \alpha\xi)\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g),$$

y análogamente si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ es tal que $(\mathcal{F}h) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_0^-$, entonces

$$\mathcal{F}(A_\alpha h) = (L + \alpha \ \mathrm{sgn}(\xi)\xi)\mathcal{F}(h) = (L - \alpha\xi)\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(L_\alpha h).$$

Entonces descomponemos a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_n)$ como $f = g + h$ donde g y h son como arriba, de la siguiente forma:

$$g(z,t) = \frac{1}{2}\left(f(z,t) + i\mathcal{H}f(z,t)\right), \text{ y}$$
$$h(z,t) = \frac{1}{2}\left(f(z,t) - i\mathcal{H}f(z,t)\right).$$

Camino 2: lo desconocido en función de lo conocido.

Con la anterior, podemos escribir

$$\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g)(z,\xi) + \mathcal{F}(L_\alpha h)(z,\xi),$$

luego invirtiendo Fourier (si esto fuera posible), resultaría

$$A_\alpha f = L_{-\alpha} g + L_\alpha h. \tag{1}$$

Con la anterior, podemos escribir

$$\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g)(z,\xi) + \mathcal{F}(L_\alpha h)(z,\xi),$$

luego invirtiendo Fourier (si esto fuera posible), resultaría

$$A_\alpha f = L_{-\alpha} g + L_\alpha h. \tag{1}$$

La solución fundamental para L_α es conocida ([F], [FS], [K], y muchísimos etc.):

$$\Psi_\alpha(z,t) = c_\alpha \frac{1}{(|z|^2 - 4it)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{1}{(|z|^2 + 4it)^{\frac{n-\alpha}{2}}}\,, \qquad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{2-2n}\pi^{n+1}}.$$

Con la anterior, podemos escribir

$$\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g)(z,\xi) + \mathcal{F}(L_\alpha h)(z,\xi),$$

luego invirtiendo Fourier (si esto fuera posible), resultaría

$$A_\alpha f = L_{-\alpha} g + L_\alpha h. \tag{1}$$

La solución fundamental para L_α es conocida ([F], [FS], [K], y muchísimos etc.):

$$\Psi_\alpha(z,t) = c_\alpha \frac{1}{(|z|^2 - 4it)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{1}{(|z|^2 + 4it)^{\frac{n-\alpha}{2}}}\ , \qquad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{2-2n}\pi^{n+1}}.$$

Poniendo (1) en términos de soluciones fundamentales tenemos que

$$< \Phi_\alpha, f > = < \Psi_{-\alpha}, g > + < \Psi_\alpha, h >, \text{ o sea}$$

$$< \Phi_\alpha, f > = < \Psi_{-\alpha} + \Psi_\alpha, \frac{1}{2} f > + < \Psi_{-\alpha} - \Psi_\alpha, \frac{i}{2}\mathcal{H} f > .$$

Con la anterior, podemos escribir

$$\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g)(z,\xi) + \mathcal{F}(L_\alpha h)(z,\xi),$$

luego invirtiendo Fourier (si esto fuera posible), resultaría

$$A_\alpha f = L_{-\alpha} g + L_\alpha h. \tag{1}$$

La solución fundamental para L_α es conocida ([F], [FS], [K], y muchísimos etc.):

$$\Psi_\alpha(z,t) = c_\alpha \frac{1}{(|z|^2 - 4it)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{1}{(|z|^2 + 4it)^{\frac{n-\alpha}{2}}}, \qquad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{2-2n}\pi^{n+1}}.$$

Poniendo (1) en términos de soluciones fundamentales tenemos que

$$< \Phi_\alpha, f >= < \Psi_{-\alpha}, g > + < \Psi_\alpha, h >, \text{ o sea}$$
$$< \Phi_\alpha, f >= < \Psi_{-\alpha} + \Psi_\alpha, \frac{1}{2} f > + < \Psi_{-\alpha} - \Psi_\alpha, \frac{i}{2}\mathcal{H} f > .$$

Tenemos que

$$\Psi_{-\alpha} \pm \Psi_\alpha = \frac{c_\alpha}{(|z|^4 + 16t^2)^{\frac{n+\alpha}{2}}} (|z|^2 - 4it)^\alpha \pm (|z|^2 + 4it)^\alpha).$$

Camino 2: lo desconocido en función de lo conocido.

Con la anterior, podemos escribir

$$\mathcal{F}(A_\alpha f)(z,\xi) = \mathcal{F}(L_{-\alpha} g)(z,\xi) + \mathcal{F}(L_\alpha h)(z,\xi),$$

luego invirtiendo Fourier (si esto fuera posible), resultaría

$$A_\alpha f = L_{-\alpha} g + L_\alpha h. \tag{1}$$

La solución fundamental para L_α es conocida ([F], [FS], [K], y muchísimos etc.):

$$\Psi_\alpha(z,t) = c_\alpha \frac{1}{(|z|^2 - 4it)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \frac{1}{(|z|^2 + 4it)^{\frac{n-\alpha}{2}}}\,, \qquad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{2-2n}\pi^{n+1}}.$$

Poniendo (1) en términos de soluciones fundamentales tenemos que

$$< \Phi_\alpha, f > = < \Psi_{-\alpha}, g > + < \Psi_\alpha, h >, \text{ o sea}$$
$$< \Phi_\alpha, f > = < \Psi_{-\alpha} + \Psi_\alpha, \frac{1}{2} f > + < \Psi_{-\alpha} - \Psi_\alpha, \frac{i}{2}\mathcal{H} f > .$$

Tenemos que

$$\Psi_{-\alpha} \pm \Psi_\alpha = \frac{c_\alpha}{(|z|^4 + 16t^2)^{\frac{n+\alpha}{2}}} (|z|^2 - 4it)^\alpha \pm (|z|^2 + 4it)^\alpha).$$

S.O.S.!!

Referencias

BJR C. Benson, J. Jenkins and G. Ratcliff, *Bounded $K-$spherical functions on Heisenberg groups*, J. Funct. Anal. 105, 1992, 409-443.

GS1 T. Godoy, L. Saal, *L^2 spectral decomposition on the Heisenberg group associated to the action of $U(p, q)$*, Pac. J. Math., 2000, vol 193 nro 2, 327-353.

GS2 T. Godoy, L. Saal, *On the relative fundamental solutions for a second order differential operator on the Heisenberg group*, Stud. Math., 2001, vol 145 nro 2, 143-164.

¡¡Gracias a todos por venir!!