El comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en grupos de Lie

Romina M. Arroyo
FaMAF & CIEM, **Córdoba**, Argentina
Trabajo en conjunto con Ramiro Lafuente

Jornadas de Geometría Diferencial y Teoría de Lie
Rosario
Agosto 2017

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Definiciones

Dada una variedad compleja (M^{2n}, J), una métrica J-hermitiana g con 2-forma fundamental $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ se dice SKT (strong Kähler with torsion) o pluriclosed si $\partial\bar{\partial}\omega = 0$.

Definiciones

Dada una variedad compleja (M^{2n}, J), una métrica J-hermitiana g con 2-forma fundamental $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ se dice SKT (strong Kähler with torsion) o pluriclosed si $\partial\bar{\partial}\omega = 0$.

[a] $(M^{2n}, J, g) \rightsquigarrow \exists! \nabla^B$ (conexión de Bismut)

- $\nabla^B g = 0, \nabla^B J = 0$ (Hermitiana), y
- $c(X, Y, Z) = g(X, T^B(Y, Z))$ es una 3-forma,

donde T^B es la torsión de ∇^B.

[a] Jean-Michael Bismut (1989). "A local index theorem for non Kahler manifolds". *Math. Ann.* 284, pp. 681–699.

Definiciones

Dada una variedad compleja (M^{2n}, J), una métrica J-hermitiana g con 2-forma fundamental $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ se dice SKT (strong Kähler with torsion) o pluriclosed si $\partial\bar{\partial}\omega = 0$.

[a] $(M^{2n}, J, g) \rightsquigarrow \exists! \nabla^B$ (conexión de Bismut)

- $\nabla^B g = 0, \nabla^B J = 0$ (Hermitiana), y
- $c(X, Y, Z) = g(X, T^B(Y, Z))$ es una 3-forma,

donde T^B es la torsión de ∇^B.

[a] Jean-Michael Bismut (1989). "A local index theorem for non Kahler manifolds". *Math. Ann.* 284, pp. 681–699.

$$\omega \text{ es } SKT \iff dc = 0.$$

Flujo pluriclosed y sus solitones

[a] Dada una variedad compleja (M^{2n}, J) y una métrica J-hermitiana g_0 SKT ($\leftsquigarrow\!\rightsquigarrow \omega_0$), el flujo pluriclosed es la ecuación de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -\left(\rho^B\right)^{1,1}, \qquad \omega(0) = \omega_0,$$

donde ρ^B es la forma de Ricci de la conexión de Bismut.

[a] Jeffrey Streets and Gang Tian (2010). "A Parabolic Flow of Pluriclosed Metrics". *IMRN* 2010.16, pp. 3101–3133.

Flujo pluriclosed y sus solitones

[a] Dada una variedad compleja (M^{2n}, J) y una métrica J-hermitiana g_0 SKT ($\leftsquigarrow\!\rightsquigarrow \omega_0$), el flujo pluriclosed es la ecuación de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -\left(\rho^B\right)^{1,1}, \qquad \omega(0) = \omega_0,$$

donde ρ^B es la forma de Ricci de la conexión de Bismut.

[a] Jeffrey Streets and Gang Tian (2010). "A Parabolic Flow of Pluriclosed Metrics". *IMRN* 2010.16, pp. 3101–3133.

Dada (M^{2n}, J), una métrica g ($\leftsquigarrow\!\rightsquigarrow \omega$) es un solitón si $\exists\ X$ holomorfo tal que

$$\left(\rho^B\right)^{1,1} = c\omega + L_X\omega.$$

Flujo pluriclosed y sus solitones

[a] Dada una variedad compleja (M^{2n}, J) y una métrica J-hermitiana g_0 SKT ($\leftrightsquigarrow \omega_0$), el flujo pluriclosed es la ecuación de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -\left(\rho^B\right)^{1,1}, \qquad \omega(0) = \omega_0,$$

donde ρ^B es la forma de Ricci de la conexión de Bismut.

[a] Jeffrey Streets and Gang Tian (2010). "A Parabolic Flow of Pluriclosed Metrics". *IMRN* 2010.16, pp. 3101–3133.

Dada (M^{2n}, J), una métrica g ($\leftrightsquigarrow \omega$) es un solitón si $\exists$ X holomorfo tal que

$$\left(\rho^B\right)^{1,1} = c\omega + L_X\omega.$$

ω solitón $\Leftrightarrow \omega(t) = c(t)\phi_t^*\omega$ es una solución del flujo pluriclosed.

Resultados previos

Objetivo: Estudiar el flujo pluriclosed en métricas SKT homogéneas. Más precisamente, (M^{2n}, J, g) es un grupo de Lie simplemente conexo G, y (J, g) son invariantes a izquierda en G.

[1] Jess Boling (2016). "Homogeneous solutions of pluriclosed flow on closed complex surfaces". *J. Geom. Anal.* 26.3, pp. 2130–2154.

[2] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

[3] Anna Fino and Luigi Vezzoni (2015). "Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds". *J. Geom. Phys.* 91, pp. 40–53.

Resultados previos

Objetivo: Estudiar el flujo pluriclosed en métricas SKT homogéneas. Más precisamente, (M^{2n}, J, g) es un grupo de Lie simplemente conexo G, y (J, g) son invariantes a izquierda en G.

Resultados previos:

- [1] En 4-variedades cerradas.

[1]Jess Boling (2016). "Homogeneous solutions of pluriclosed flow on closed complex surfaces". *J. Geom. Anal.* 26.3, pp. 2130–2154.

[2]Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

[3]Anna Fino and Luigi Vezzoni (2015). "Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds". *J. Geom. Phys.* 91, pp. 40–53.

Resultados previos

Objetivo: Estudiar el flujo pluriclosed en métricas SKT homogéneas. Más precisamente, (M^{2n}, J, g) es un grupo de Lie simplemente conexo G, y (J, g) son invariantes a izquierda en G.

Resultados previos:

- [1] En 4-variedades cerradas.
- [2] En nilvariedades 2-pasos nilpotentes: Las soluciones son inmortales.

[1] Jess Boling (2016). "Homogeneous solutions of pluriclosed flow on closed complex surfaces". *J. Geom. Anal.* 26.3, pp. 2130–2154.

[2] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

[3] Anna Fino and Luigi Vezzoni (2015). "Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds". *J. Geom. Phys.* 91, pp. 40–53.

Resultados previos

Objetivo: Estudiar el flujo pluriclosed en métricas SKT homogéneas. Más precisamente, (M^{2n}, J, g) es un grupo de Lie simplemente conexo G, y (J, g) son invariantes a izquierda en G.

Resultados previos:

- [1] En 4-variedades cerradas.
- [2] En nilvariedades 2-pasos nilpotentes: Las soluciones son inmortales.
- [3] En una clase de solvariedades de dimensión 6: Las soluciones son inmortales.

[1] Jess Boling (2016). "Homogeneous solutions of pluriclosed flow on closed complex surfaces". *J. Geom. Anal.* 26.3, pp. 2130–2154.

[2] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

[3] Anna Fino and Luigi Vezzoni (2015). "Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds". *J. Geom. Phys.* 91, pp. 40–53.

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t))$

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_t)$

Flujo de corchetes

$$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot \rangle_0)$$

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot \rangle_0) \simeq (G_{h(t)\cdot\mu_0}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot\rangle_0) \simeq (G_{h(t)\cdot\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_0) = (G_{\mu(t)}, J, g_0)$, para todo t.

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot\rangle_0) \simeq$
$(G_{h(t)\cdot\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_0) = (G_{\mu(t)}, J, g_0)$, para todo t.
Aquí,

$$(h\cdot\mu)(\cdot,\cdot) := h\mu(h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot), \qquad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad Lie(G_{\mu_0}) = (\mathfrak{g}, \mu_0),$$

denota la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$.

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot\rangle_0) \simeq (G_{h(t)\cdot\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_0) = (G_{\mu(t)}, J, g_0)$, para todo t.
Aquí,

$$(h\cdot\mu)(\cdot,\cdot) := h\mu(h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot), \qquad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad Lie(G_{\mu_0}) = (\mathfrak{g}, \mu_0),$$

denota la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$.
¿Cómo evoluciona el corchete?

Flujo de corchetes

$(G_{\mu_0}, J, g(t)) = (G_{\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (G_{\mu_0}, J, \langle h(t)\cdot, h(t)\cdot\rangle_0) \simeq (G_{h(t)\cdot\mu_0}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_0) = (G_{\mu(t)}, J, g_0)$, para todo t.
Aquí,

$$(h\cdot\mu)(\cdot,\cdot) := h\mu(h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot), \qquad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad Lie(G_{\mu_0}) = (\mathfrak{g}, \mu_0),$$

denota la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$.
¿Cómo evoluciona el corchete?

[a] Dado μ_0 corchete de Lie, el flujo de corchetes es la ODE

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = \delta_\mu(P_\mu), \quad \mu(0) = \mu_0,$$

donde $\delta_\mu(A) = \mu(A\cdot,\cdot) + \mu(\cdot, A\cdot) - A\mu(\cdot,\cdot)$ y P_μ es definido por

$$\omega_0(P_\mu(X), Y) = \frac{1}{2}\left(\rho_\mu^B\right)^{1,1}(X, Y),$$

(ρ_μ^B es la forma de Ricci de Bismut de (G_μ, J, g_0)).

[a] Jorge Lauret (2015). “Curvature flows for almost-hermitian Lie groups”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 367, pp. 7453–7480.

Contenidos

Caso nilpotente

Teorema

Sean μ_0 un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mu(t)$ el flujo de corchetes que empieza en μ_0. Entonces $\mu(t)/\|\mu(t)\|$ converge a un solitón algebraico de expansión cuando $t \to \infty$.

Caso nilpotente

Teorema

Sean μ_0 un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mu(t)$ el flujo de corchetes que empieza en μ_0. Entonces $\mu(t)/\|\mu(t)\|$ converge a un solitón algebraico de expansión cuando $t \to \infty$.

Una estructura SKT invariante a izquierda en un grupo de Lie (G, J, g) es un solitón algebraico si el endomorfismo $P \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ definido por $\omega(P\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot)$ satisface

$$P = \alpha\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \tfrac{1}{2}\left(D + D^t\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}), \quad [D, J] = 0.$$

Caso nilpotente

Teorema

Sean μ_0 un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mu(t)$ el flujo de corchetes que empieza en μ_0. Entonces $\mu(t)/\|\mu(t)\|$ converge a un solitón algebraico de expansión cuando $t \to \infty$.

Una estructura SKT invariante a izquierda en un grupo de Lie (G, J, g) es un solitón algebraico si el endomorfismo $P \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ definido por $\omega(P\cdot, \cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot, \cdot)$ satisface

$$P = \alpha \, \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2}\left(D + D^t\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}), \quad [D, J] = 0.$$

Solitones con $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$ son llamados de expansión, estables y de contracción, respectivamente.

Caso nilpotente

- Tomamos la descomposición g_0-ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu_0)$.

[4] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Caso nilpotente

- Tomamos la descomposición g_0-ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu_0)$.
- En[4] se prueba que
    - $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu(t))$ para todo $t \in [0, \infty)$.

[4] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Caso nilpotente

- Tomamos la descomposición g_0-ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu_0)$.
- En[4] se prueba que
  - $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu(t))$ para todo $t \in [0, \infty)$.
  - La condición SKT es preservada.

[4] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Caso nilpotente

- Tomamos la descomposición g_0-ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu_0)$.
- En[4] se prueba que
  - $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu(t))$ para todo $t \in [0, \infty)$.
  - La condición SKT es preservada.
  - $$P_\mu = \begin{pmatrix} (\mathrm{Ric}_\mu)_{\mathfrak{v}}^{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    donde Ric_μ es el operador de Ricci de $(\mathfrak{n}_\mu, g_0)$.

[4] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Caso nilpotente

- Tomamos la descomposición g_0-ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu_0)$.
- En[4] se prueba que
  - $\mathfrak{z}$ es el centro de $(\mathfrak{n}, \mu(t))$ para todo $t \in [0, \infty)$.
  - La condición SKT es preservada.
  - $$P_\mu = \begin{pmatrix} (\mathrm{Ric}_\mu)_{\mathfrak{v}}^{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    donde Ric_μ es el operador de Ricci de $(\mathfrak{n}_\mu, g_0)$.
- El moment map para la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{v}, J)$ en el espacio vectorial de corchetes $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*) \otimes \mathfrak{n}$ en $\mathfrak{n}$ está dado por

$$\mathrm{m}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{v},J)}(\mu) = \frac{4}{\|\mu\|^2} \cdot P_\mu.$$

[4] Nicola Enrietti, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Contenidos

Caso soluble

(G, J, g) con $Lie(G) = \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ tiene un ideal abeliano de codim 1, $\mathfrak{n}$)

Caso soluble

(G, J, g) con $Lie(G) = \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ tiene un ideal abeliano de codim 1, $\mathfrak{n}$)
$\rightsquigarrow \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ BO tal que

$$\mathfrak{n} = \operatorname{span}\langle e_1, \dots, e_{2n-1}\rangle, \quad Je_1 = e_{2n}, \quad J(\mathfrak{n}_1) \subset \mathfrak{n}_1,$$

donde $\mathfrak{n}_1 = \operatorname{span}\langle e_2, \dots, e_{2n-1}\rangle$. $J_1 := J|_{\mathfrak{n}_1}$.

Caso soluble

(G, J, g) con $Lie(G) = \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ tiene un ideal abeliano de codim 1, $\mathfrak{n}$) $\rightsquigarrow \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ BO tal que

$$\mathfrak{n} = \operatorname{span}\langle e_1, \dots, e_{2n-1}\rangle, \quad Je_1 = e_{2n}, \quad J(\mathfrak{n}_1) \subset \mathfrak{n}_1,$$

donde $\mathfrak{n}_1 = \operatorname{span}\langle e_2, \dots, e_{2n-1}\rangle$. $J_1 := J|_{\mathfrak{n}_1}$.
Estas álgebras de Lie son determinadas por el endomorfismo $\operatorname{ad} e_{2n}|_{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{gl}_{2n-1}(\mathbb{R})$.

Caso soluble

(G, J, g) con $Lie(G) = \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ tiene un ideal abeliano de codim 1, $\mathfrak{n}$) $\rightsquigarrow \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ BO tal que

$$\mathfrak{n} = \operatorname{span}\langle e_1, \dots, e_{2n-1}\rangle, \quad Je_1 = e_{2n}, \quad J(\mathfrak{n}_1) \subset \mathfrak{n}_1,$$

donde $\mathfrak{n}_1 = \operatorname{span}\langle e_2, \dots, e_{2n-1}\rangle$. $J_1 := J|_{\mathfrak{n}_1}$.
Estas álgebras de Lie son determinadas por el endomorfismo $\operatorname{ad} e_{2n}|_{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{gl}_{2n-1}(\mathbb{R})$.

J integrable $\iff$ $\operatorname{ad} e_{2n} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ v & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^{2n-2}$,
$A \in \mathfrak{gl}_{2n-2}(\mathbb{R})$ and $[A, J_1] = 0$.

Caso soluble

Notación:

Caso soluble

Notación: Fijamos un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathbb{R}e_{2n}, \qquad \mathfrak{n} := \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1,$$

con un producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que hace que la descomposición de arriba sea ortogonal, y e_1, e_{2n} unitarios, y una estructura compleja J compatible con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, preservando $\mathfrak{n}_1$ y tal que $Je_1 = e_{2n}$.

Caso soluble

Notación: Fijamos un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathbb{R}e_{2n}, \qquad \mathfrak{n} := \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1,$$

con un producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que hace que la descomposición de arriba sea ortogonal, y e_1, e_{2n} unitarios, y una estructura compleja J compatible con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, preservando $\mathfrak{n}_1$ y tal que $Je_1 = e_{2n}$. Denotamos por $\mu = \mu(a, v, A)$ un corchete de Lie casi abeliano en $\mathfrak{g}$ con $\operatorname{ad} e_{2n}$ dado como antes, por lo tanto J define una estructura compleja integrable en el álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$.

Caso soluble

Notación: Fijamos un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathbb{R}e_{2n}, \qquad \mathfrak{n} := \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{n}_1,$$

con un producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que hace que la descomposición de arriba sea ortogonal, y e_1, e_{2n} unitarios, y una estructura compleja J compatible con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, preservando $\mathfrak{n}_1$ y tal que $Je_1 = e_{2n}$. Denotamos por $\mu = \mu(a, v, A)$ un corchete de Lie casi abeliano en $\mathfrak{g}$ con $\operatorname{ad} e_{2n}$ dado como antes, por lo tanto J define una estructura compleja integrable en el álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$.

Lema

Para un corchete de Lie casi abeliano $\mu = \mu(a, v, A)$ la métrica g es SKT si y sólo si $aA + A^2 + A^t A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$, donde $(\cdot)^t$ denota la transpuesta con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Un corchete de Lie casi abeliano $\mu = \mu(a, v, A)$ que satisface $aA + A^2 + A^tA \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ es llamado un corchete SKT.

Un corchete de Lie casi abeliano $\mu = \mu(a, v, A)$ que satisface $aA + A^2 + A^t A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ es llamado un corchete SKT.

Teorema

Un corchete de Lie casi abeliano $\mu = \mu(a, v, A)$ es SKT si y sólo si $[A, A^t] = [A, J_1] = 0$ y todos los autovalores de A tienen parte real igual a 0 o $-\frac{a}{2}$.

Flujo de corchetes

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ una $\langle\cdot,\cdot\rangle$-base ortonormal basis tal que $Je_i = e_{2n+1-i}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ una $\langle\cdot,\cdot\rangle$-base ortonormal basis tal que $Je_i = e_{2n+1-i}$ para $i = 1, \dots, n$. La forma fundamental $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ es dada por

$$\omega = e^1 \wedge e^{2n} + \cdots + e^n \wedge e^{n+1},$$

donde $\{e^i\}$ es la base dual de $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$.

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ una $\langle\cdot,\cdot\rangle$-base ortonormal basis tal que $Je_i = e_{2n+1-i}$ para $i = 1, \ldots, n$. La forma fundamental $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ es dada por

$$\omega = e^1 \wedge e^{2n} + \cdots + e^n \wedge e^{n+1},$$

donde $\{e^i\}$ es la base dual de $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$.
$\mu = \mu(a, v, A)$ corchete SKT $\rightsquigarrow \mu' = \delta_\mu(P_\mu)$.

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ una $\langle\cdot,\cdot\rangle$-base ortonormal basis tal que $Je_i = e_{2n+1-i}$ para $i = 1, \ldots, n$. La forma fundamental $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ es dada por

$$\omega = e^1 \wedge e^{2n} + \cdots + e^n \wedge e^{n+1},$$

donde $\{e^i\}$ es la base dual de $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$.
$\mu = \mu(a, v, A)$ corchete SKT $\rightsquigarrow \mu' = \delta_\mu(P_\mu)$.
¿El flujo de corchetes preserva el ideal abeliano de codimensión 1?

Flujo de corchetes

$(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ una $\langle\cdot,\cdot\rangle$-base ortonormal basis tal que $Je_i = e_{2n+1-i}$ para $i = 1, \dots, n$. La forma fundamental $\omega = g(J\cdot,\cdot)$ es dada por

$$\omega = e^1 \wedge e^{2n} + \cdots + e^n \wedge e^{n+1},$$

donde $\{e^i\}$ es la base dual de $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$.
$\mu = \mu(a, v, A)$ corchete SKT $\rightsquigarrow \mu' = \delta_\mu(P_\mu)$.
¿El flujo de corchetes preserva el ideal abeliano de codimensión 1?
¡NO!

Teorema

[a] *Sea (G, J, g_0) una estructura SKT invariante a izquierda en el groupo de Lie G, con corchete de Lie asociado $\mu_0 \in \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$. Sean $\omega(t)(\cdot,\cdot) = g(t)(J\cdot,\cdot)$ y $\mu(t)$ las soluciones del flujo pluriclosed y del flujo de corchetes torcido respectivamente*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = \delta_\mu(P_\mu - U_\mu), \qquad \mu(0) = \mu_0, \tag{1}$$

donde $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \ni \mu \mapsto U_\mu \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g}, J)$ es un mapa suave arbitrario. Entonces, ambas soluciones existen para el mismo intervalo de tiempo I, y si (G_μ, J_μ, g_μ) denota la variedad Hermitiana asociada a μ entonces existen diffeomorfismos que dependen del tiempo

$$\varphi_t : (G, J, g(t)) \to \left(G_{\mu(t)}, J_{\mu(t)}, g_{\mu(t)}\right),$$

tales que $\varphi_t^* J_{\mu(t)} = J$ y $\varphi_t^* g_{\mu(t)} = g(t)$ for all $t \in I$.

---

[a] Christoph Böhm and Ramiro A. Lafuente (2017). “Immortal homogeneous Ricci flows”. preprint (arXiv).

Proposition

Para un corchete inicial SKT casi abeliano $\mu_0 = \mu_0(a_0, v_0, A_0)$, el flujo de corchetes torcido es equivalente a

$$\begin{cases} a' = c\,a, \\ v' = c\,v + S\,v - \frac{1}{2}\|v\|^2 v, \\ A' = c\,A, \end{cases} \tag{2}$$

donde $c = (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2 \in \mathbb{R}$, $2\,k = \operatorname{rank}(A_0 + A_0^t)$, *y*

$$S = S(a, A) = (\tfrac{k}{4} - 1)a^2 \operatorname{Id}_{\mathfrak{n}_1} - \tfrac{1}{2}AA^t + \tfrac{a}{4}(A + A^t).$$

Más aún, la solución $\mu(t) = \mu(a(t), v(t), A(t))$ consiste enteramente de corchetes SKT.

Teorema

El flujo pluriclosed de estructuras invariantes SKT en un grupo de Lie casi abeliano unimodular G siempre existe para $t \in [0, \infty)$ y el flujo normalizado $\mu(t)/\|\mu(t)\|$ converge a una métrica plana Kähler ($a_0 = 0$), o a un solitón de expansión ($a_0 \neq 0$).

Casos	k	Restricciones	Unimodular	T	$\lim_{t\to T}\mu(t)$	$\lim_{t\to T}\mu(t)/\Vert\mu(t)\Vert$
(i)	0	–	✓	$+\infty$	0	Kähler, Ricci-plana
(ii)	1	–	✓	$+\infty$	0	solitón de expansión
(iii)	2	–	–	$+\infty$	μ_∞	solitón estable
(iv)	>2	$v_0 \notin \mathrm{Im} A_0$	–	$+\infty$	$\mu_\infty \neq 0$	solitón estable
(v)	>2	$v_0 \in \mathrm{Im} A_0$	–	$< \infty$	∞	solitón de contracción

Table: Flujo pluriclosed en grupos de Lie casi abelianos

Corolario

Sea G un grupo de Lie casi abeliano con una estructura SKT invariante a izquierda (J, g), y denotamos por $\mu = \mu(a, v, A)$ a su correspondiente corchete. Entonces, g es un solitón si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) $v = 0$;

(ii) $v \neq 0$ *es un autovector, con autovalor* $\lambda = \frac{1}{2}\|v\|^2$, *de* $S = (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2 \operatorname{Id}_{\mathfrak{n}_1} - \frac{1}{2}AA^t + \frac{a}{4}(A + A^t)$.

En el caso (i) el solitón es de expansión, estable o contracción, de acuerdo a si $k < 2$, $k = 2$ o $k > 2$, respectivamente. El caso (ii) sólo puede ocurrir cuando $k > 2$, y el solitón es estable cuando $\lambda = (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2$ (equivalente a $Av = 0$), y de contracción cuando $\lambda < (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2$.

Corolario

Sea G un grupo de Lie casi abeliano con una estructura SKT invariante a izquierda (J, g), y denotamos por $\mu = \mu(a, v, A)$ a su correspondiente corchete. Entonces, g es un solitón si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) $v = 0$;

(ii) $v \neq 0$ *es un autovector, con autovalor* $\lambda = \frac{1}{2}\|v\|^2$, *de* $S = (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2 \operatorname{Id}_{\mathfrak{n}_1} - \frac{1}{2}AA^t + \frac{a}{4}(A + A^t)$.

En el caso (i) el solitón es de expansión, estable o contracción, de acuerdo a si $k < 2$, $k = 2$ o $k > 2$, respectivamente. El caso (ii) sólo puede ocurrir cuando $k > 2$, y el solitón es estable cuando $\lambda = (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2$ (equivalente a $Av = 0$), y de contracción cuando $\lambda < (\frac{k}{4} - \frac{1}{2})a^2$.

En el mismo grupo de Lie con la misma estructura compleja hay soluciones que se extinguen en tiempo finito y soluciones inmortales.

¡Muchas gracias!

Referencias

Bismut, Jean-Michael (1989). "A local index theorem for non Kahler manifolds". In: *Math. Ann.* 284, pp. 681–699.

Böhm, Christoph and Ramiro A. Lafuente (2017). "Immortal homogeneous Ricci flows". preprint (arXiv).

Boling, Jess (2016). "Homogeneous solutions of pluriclosed flow on closed complex surfaces". In: *J. Geom. Anal.* 26.3, pp. 2130–2154.

Enrietti, Nicola, Anna Fino, and Luigi Vezzoni (2015). "The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms". In: *J. Geom. Anal.* 25.2, pp. 883–909.

Fino, Anna and Luigi Vezzoni (2015). "Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds". In: *J. Geom. Phys.* 91, pp. 40–53.

Lauret, Jorge (2015). "Curvature flows for almost-hermitian Lie groups". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 367, pp. 7453–7480.

Streets, Jeffrey and Gang Tian (2010). "A Parabolic Flow of Pluriclosed Metrics". In: *IMRN* 2010.16, pp. 3101–3133.