MARIO BUNGE

ANALISIS EPISTEMOLOGICO DEL PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
BUENOS AIRES
1958

ANALISIS EPISTEMOLOGICO

DEL "PRINCIPIO" DE ARQUIMEDES

Por Mario Bunge

Para enseñar filosofía de la ciencia no es necesario hablar de espacio curvo, relaciones de incertidumbre, o teoría de la información; más bien es aconsejable no hacerlo, a menos que los alumnos sepan de qué se trata. La materia prima que elabora el epistemólogo puede ser modesta y aún añeja. Tanto como el llamado principio de Arquímedes.

1. Problema inicial

Según cuenta Vitruvio, el soberano de Siracusa le había encomendado a Arquímedes que averiguara si cierta corona votiva era de oro puro. El problema inicial era, pues, de orden práctico. Más aun, no se había planteado en la observación de hechos físicos. Pero, desde luego, el planteo del problema no fué anterior a la observación de todo hecho la experiencia acumulada -y, según el relato, un rumor que corría por la ciudad- hacía que se sospechara de la honestidad del orfebre. Por consiguiente, el rey Herón bien pudo haber formulado la siguiente inferencia probable (no demostrativa):

> Muchos orfebres dan plata por oro;
> ahora bien, yo encargué una corona de oro a un orfebre;
> por lo tanto, es probable que la corona no sea de oro puro.

2. Observaciones preliminares

La tradición quiere que, estando en la bañera, Arquímedes diera súbitamente con la solución del problema que le propusiera el rey. La persistencia de esta leyenda puede deberse a la incomprensión del enunciado del "principio" (que no dice que un cuerpo sumergido en un líquido desaloja una cantidad de flúido igual a su propio volúmen) o al desconocimiento del mecanismo psicológico de la invención. En efecto, lo más que pudo haber comprobado Arquímedes al meterse en la bañera es que su cuerpo desalojaba cierta cantidad de agua. Es improbable que una súbita intuición, un relámpago intelectual, le haya hecho "ver" la solución: semejantes relámpagos sólo ocurren tras largos períodos de preparación e incubación.

Arquímedes puede haber empleado las siguientes generalizaciones empíricas, o inducciones a partir de observaciones:

(a) Los barcos flotan aún cuando estén cargados con cosas más pesadas que el agua; pero el peso que soportan tiene un límite.

(b) Todo cuerpo sumergido en un líquido desaloja una cantidad de líquido. En otras palabras, los líquidos son incompresibles, o son poco compresibles.

(c) El cuerpo humano pierde peso al sumergirse en el agua: el nadador se siente más liviano en el agua que en tierra.

(d) La pérdida de peso aparente depende de la naturaleza del líquido: p.ej., es mayor en agua salada que en agua dulce.

Millones de hombres deben de haber hecho observaciones particulares a estos respectos, y millares de personas deben de haber conocido estas generalizaciones. El mérito de Arquímedes fué descubrir la relación existente entre los cuatro hechos mencionados: la flotación, el desalojo de una masa de líquido, la pérdida de peso, y la dependencia de esta pérdida respecto de la naturaleza del líquido. Más precisamente, el mérito de Arquímedes fué descubrir la relación cuantitativa exacta que vincula las variables relevantes del fenómeno. Por este motivo, se le considera el fundador de la estática de los flúidos.

3. Problema científico

La solución del problema práctico que preocupaba al rey requería la previa solución de un problema científico. El problema consistía en descubrir las variables y la ley que las vincula.

(a) Descubrimiento de las variables relevantes. Arquímedes eliminó variables o factores tales como el color y la forma de los cuerpos, así como la transparencia y viscosidad de los líquidos. Advirtió, en suma, que se trataba de un problema estrictamente mecánico. En otras palabras, averiguó a qué clase de problemas pertenecía el suyo.

La eliminación de las variables irrelevantes no se hace sin tanteos y sin consideraciones teóricas. No sabemos con certeza cuáles fueron los tanteos y las consideraciones que hizo Arquímedes: sólo conocemos lo que finalmente pasó en limpio en su opúsculo De los cuerpos flotantes. Pero podemos conjeturar que probó -tanto empíricamente como con ensayos mentales- cuerpos de diversas formas y de distinta constitución y, sobre todo, que actuó con la convicción democrítea de que a la investigación científica sólo le atañen las cualidades primarias , tales como la extensión, el peso y el movimiento.

Sea como fuere, el resultado neto fué que Arquímedes redujo las variables relevantes del fenómeno de la flotación en líquidos a tres: la presión hidrostática, la pérdida de peso del sólido sumergido, y la cantidad de líquido que desaloja.

(b) Descubrimiento de la relación que vincula las variables relevantes. Se busca una relación invariable -una ley- cuando se tiene por lo menos la presunción de que existe; esto es, cuando se adopta -explícita o tácitamente- el principio de legalidad, según el cual todo cuanto ocurre encaja en una o más leyes.

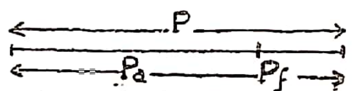
Hoy estamos habituados al procedimiento esquematizador y analítico de la ciencia, a la manera en que aisla unos fenómenos de otros y en que conecta sus variables relevantes. Estamos habituados a la búsqueda de leyes y a la búsqueda, en particular, de relaciones invariables entre factores o variables medibles, tales como el peso y el volumen. Esto no era lo habitual en una época en que predominaba aún el prejuicio platónico de la imposibilidad de construir una ciencia de los fenómenos físicos.

4. Formulación de hipótesis

Para llegar a la formulación de una ley, es preciso inventar antes una o más hipótesis o conjeturas acerca de la relación que se busca. Aunque Arquímedes sabía mucha matemática, debe haber comenzado -como es usual- por probar las relaciones más sencillas, tales como las aritméticas. Esto es, debe de haber empleado el principio metodológico de simplicidad (que no implica un principio ontológico de simplicidad, ya que una relación "simple" en un nivel puede deducirse de relaciones relativamente más complejas en otro nivel y recíprocamente).

Acaso la más sencilla de las hipótesis acerca de la relación que vincula el peso P del cuerpo en el vacío con su peso aparente P_a en el líquido y con el peso P_f del volumen del líquido que desaloja, sea ésta:

$$P = P_a + P_f \qquad (1)$$



de donde se deduce (aplicando una de las reglas de transformación de la aritmética)

$$P - P_a = P_f \qquad (2)$$

La diferencia que figura en el primer miembro de esta ecuación significa la pérdida de peso que "sufre" el cuerpo al sumergirse en el flúido. De modo que la hipótesis que estamos considerando puede formularse así:

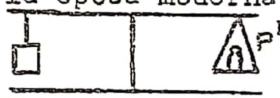
Si un cuerpo se sumerge en un líquido, entonces pierde un peso igual al peso del líquido que desaloja [1].

(Habitualmente se formula la misma hipótesis en términos del concepto de empuje, diciéndose que Un cuerpo sumergido en un líquido recibe un empuje de abajo hacia arriba, y la intensidad de este empuje es igual a la pérdida de peso $P - P_a$. Pero el concepto dinámico de empuje, que designa un inobservable, es innecesario en la descripción del fenómeno de la flotación y en la verificación de la hipótesis de Arquímedes; se lo necesita, en cambio, en la deducción o explicación de la ley hidrostática de Arquímedes a partir de consideraciones dinámicas.)

Aunque Arquímedes deduce su hipótesis de premisas sentadas anteriormente como postulados, experimentador como era no debe de haberse contentado con formular su conjetura.

5. Verificación

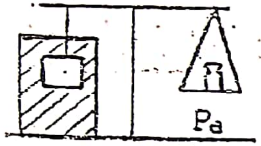
Para poner a prueba o verificar la ley (2), en la época moderna puede procederse de la siguiente manera:



(a) Se pesa el cuerpo en el vacío

[1] En la obra mencionada, descubierta en 1906 y contenida en Selections Illustratting the History of Greek Mathematics, trad. de I. Thomas (Loeb Classical Library, 1941 y 1951), vol. II, pp. 243 ss., Arquímedes escribe: "Los sólidos más pesados que un flúido se hundirán si se los coloca en el flúido, y serán más livianos [si se les pesa] en el flúido, en una cantidad igual al peso de un volumen del flúido igual al volumen del sólido".

o, si no se requiere gran precisión, en el aire; o sea, se determina el peso P.



(b) Se sumerge el cuerpo en un recipiente lleno de un líquido cualquiera, y se recoge en un vaso el líquido que desaloja.

(c) Se pesa el cuerpo sumergido; o sea, se determina el peso aparente P_a.

(d) Se efectúa la operación mental $P - P_a$.

(e) Se pesa el líquido desalojado; o sea, se determina P_f.

(f) Se comparan los valores numéricos de la pérdida de peso (empuje) con el peso del líquido desalojado; esto es, se compara $P - P_a$ con P_f (nueva operación mental). Si ambos valores coinciden a menos del error experimental, se concluye que

(g) ha quedado <u>confirmado</u> el "principio" de Arquímedes para el par sólido/flúido dados. Esto es, se concluye que la hipótesis ha quedado confirmada en el caso particular estudiado.

6. <u>Generalización de la hipótesis</u>

La generalización de la ley de Arquímedes a todos los flúidos (líquidos y gases) conocidos y por conocer es obra de los siglos XVII y XVIII. Se probaron sucesivamente (pero no metódicamente, esto es, no con el propósito deliberado de verificar la generalización de la ley de Arquímedes) numerosas parejas sólido/flúido. Hallándose confirmado el "principio" en todos los casos estudiados, se enunció la ley general siguiente, en la que se menciona explícitamente el equilibrio como condición de validez de la ley:

<u>Si un cuerpo cualquiera está sumergido en un flúido cualquiera y está en equilibrio con él, entonces pierde un peso igual al peso del flúido que desaloja.</u>

Introduciendo el concepto de empuje, el enunciado nomológico que antecede puede formularse así:

<u>Si un cuerpo cualquiera está sumergido en un flúido cualquiera y está en equilibrio con él, entonces recibe un empuje de abajo hacia arriba, igual al peso de la cantidad de flúido que desaloja.</u>

Para encontrar la forma lógica de este enunciado hay que empezar por tornarlo más explícito:

$\underbrace{\text{Para todo } x \text{ y todo } y}_{(x,y)}$, si $\underbrace{x \text{ es un cuerpo}}_{Fx}$

e $\underbrace{y \text{ es un flúido}}_{Gy}$, y $\underbrace{x \text{ está sumergido en } y}_{xRy}$,

y $\underbrace{x \text{ está en equilibrio con } y}_{xSy}$,

entonces $\underbrace{y \text{ empuja hacia arriba a } x}_{yTx}$ y

$\underbrace{\text{la intensidad del empuje es igual al peso}}_{e = P_f}$

del flúido desalojado.

Por abstracción (o desinterpretación) pasamos a la fórmula simbólica que exhibe la forma o estructura lógica de la ley de Arquímedes:

$$(x,y)\ Fx \cdot Gy \cdot (xRy) \cdot (xSy) \supset (yTx) \cdot (e=P_f) \qquad (3)$$

donde el esquema '... $\supset$ —' se lee 'si ... entonces —'. Obsérvese que la igualdad de figura en el consecuente -esto es, $e=P_f$ - no es una identidad lógica (como lo es, en cambio, 2+3=5); forma parte de un enunciado empírico y ninguna ley lógica o matemática se opondría a que, en lugar de $e = P_f$, valiese $e = 3/4\ P_f$, ó $e = (P_f)^{3/2}$ ó cualquier otra relación. Si se prefiere, en lugar de $e = P_f$ puede escribirse el condicional 'Si el peso del líquido desalojado es P_f, entonces el empuje vale P_f'.

La fórmula (3) a que llegamos privando a los términos de su significado específico es un enunciado universal -como se ve por el cuantificador universal '(x,y)'- y condicional, como lo muestra la herradura de la implicación.

7. Crítica

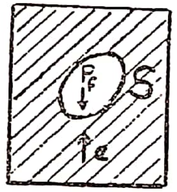
Podría ocurrir que apareciese una pareja sólido/flúido para la cual no se cumpliese estrictamente la ley de Arquímedes. Pero aún no se han descubierto excepciones notables que hagan necesaria su revisión. Lo que sí se ha descubierto es que no siempre se cumple una de las condiciones que enuncia el "principio" para su propia validez, a saber, el equilibrio entre el cuerpo sumergido y el flúido que lo rodea. Estas excepciones no restan validez a la ley de Arquímedes sino que restringen el campo o dominio de sus condiciones de aplicabilidad.

En efecto, sabemos desde el siglo pasado que la relación de equilibrio hidrostático se da al nivel macroscópico, no así al microscópico. No sólo hay en un flúido corrientes de convección debidas a inevitables diferencias de temperatura entre sus diversas partes sino que, cuando el cuerpo sumergido es suficientemente pequeño, se ponen de manifiesto los choques de las moléculas del flúido contra el cuerpo. Para cuerpos microscópicos como los granos de polen o las partículas del humo de tabaco, estos choques (del orden de 10^{21} por segundo) no se equilibran. La desigualdad de presiones origina un movimiento zigzagueante de las partículas (movimiento browniano).

La ley de Arquímedes es, pues, una típica ley macroscópica: no vale en el nivel microscópico.

8. Explicación de la ley de Arquímedes.

La ley de Arquímedes sigue recibiendo el título de principio, aún cuando el propio Arquímedes la consideraba como un teorema. Una explicación o deducción elemental del teorema de Arquímedes es la siguiente.



(a) Considérese una masa líquida homogénea, y en su interior una región delimitada por la envoltura imaginaria S.

(b) La masa de líquido encerrada en S estará en equilibrio con el resto a condición de que su peso P_f sea equilibrado por la resultante e de las presiones que el líquido ejerce sobre S. La condición de equilibrio será, precisamente,

$$e = P_f \qquad (4)$$

La relación (4) es un caso particular del principio de acción y reacción (tercer principio de la mecánica de Newton); en efecto, si la acción que el sólido ejerce sobre el fluído es P_f, la reacción e del fluído es contraria e igual a la acción en magnitud ($e=P_f$).

(c) Sustituyamos el líquido encerrado en S por un sólido cualquiera que tenga la misma forma y volumen que S. Hagamos la hipótesis accesoria que la presión del líquido no depende de la naturaleza del cuerpo sumergido. (Es una ley general de la hidrostática que la diferencia de presiones $P_1 - P_2$ entre dos puntos situados en el seno de un fluido sólo depende de su diferencia de altura, h, y del peso específico ρ del líquido, y ello en la forma $P_1-P_2 = \rho h$.) Entonces, el empuje que recibe el sólido sumergido es igual al que recibía la porción líquida desalojada (ya que por hipótesis la acción del líquido no depende de la naturaleza del cuerpo sumergido); es decir, seguimos teniendo

$$e= P_f \qquad (4)$$

(Si la acción fuese télica, este empuje dependería del cuerpo que lo recibe, ya que iría destinado a él; entonces ya no tendríamos $e=P_f$, sino una función de las propiedades del sólido, contrariamente a lo que dice la ley de Arquímedes, válida para todo sólido.)

(d) Ahora bien, por definición el empuje que recibe el sólido sumergido es igual a la diferencia de pesos, esto es, a la pérdida de peso:

$$e =_{df} P - P_a \qquad (5)$$

(En efecto, inferimos la existencia del empuje a partir de la observación de que el cuerpo disminuye de peso en el flúido.)

(e) Por el carácter transitivo de la igualdad, de (4) y (5) se deduce

$$P - P_a = P_f \qquad \text{Q.E.D.}$$

¿Qué hemos ganado con esta demostración? Lo siguiente:

(a) Ahora entendemos que el equilibrio sólido/flúido es un caso particular del equilibrio de fuerzas.

(b) Advertimos que la ley de Arquímedes no es una simple generalización empírica, del tipo de "Todos los criollos son carnívoros". Hemos incorporado una ley, antes aislada y acaso nacida como generalización empírica, al sistema teórico de la mecánica.

(c) Por consiguiente, advertimos que la ley de Arquímedes no sólo es confirmada por sus casos particulares favorables en forma directa, sino también indirectamente, a saber, por toda confirmación de los principios de la mecánica de Newton, ya que ahora es solamente un teorema que se deduce de los axiomas de Newton. El "principio" de Arquímedes es confirmado entonces, no sólo en el dominio de la hidrostática, sino -indirectamente- por la confirmación de la fórmula del péndulo, por la predicción exacta de un eclipse solar, por el cálculo exitoso de la órbita de un satélite artificial, etc. - Al ser incorporada en una estructura teórica, una generalización recibe, además del apoyo de

la experiencia, el sostén de dicha estructura y con ello el de un ámbito empírico mucho más amplio que el que le sirviera de soporte inicial.

9. Aplicaciones

La física de Arquímedes, a diferencia de la de Aristóteles, era útil; y era útil -aplicable a fines prácticos- porque era en gran medida verdadera. Recordemos unas pocas aplicaciones de su ley hidrostática.

(a) El propio Arquímedes fué el primero en aplicar su teorema a la solución de un problema práctico, descubriendo el fraude del orfebre; tan escasos eran los éxitos prácticos de la ciencia en la antigüedad, que la hazaña de Arquímedes pasó a la leyenda, aunque más como rasgo de iluminación o de astucia que como prueba de genio científico. Un problema práctico había suscitado un problema científico; la solución de éste permitió resolver aquél.

(b) Determinación de la densidad de un cuerpo. Definimos la cantidad intensiva peso específico como peso por unidad de volumen:

$$\rho =_{df} \frac{P}{V} \qquad (6)$$

de donde P = V. El peso del flúido desalojado por el cuerpo sumergido será entonces

$$P_f = P - P_a = \rho_f V_f \qquad (7)$$

Dado que $V = V_f$, podemos introducir (6) en (7), con lo cual nos desembarazamos de V (eliminamos V), que en este caso no se mide:

$$P - P_a = \rho_f \cdot \frac{P}{\rho} \qquad (8)$$

de donde inferimos el peso específico relativo (del sólido al flúido):

$$\frac{\rho}{\rho_f} = \frac{1}{1 - (P_a/P)} \qquad (9)$$

Vemos, pues, que las dos pesadas que nos dan P y P_a, y que sirven para confirmar directamente la ley de Arquímedes, también sirven para determinar el peso específico relativo de un cuerpo sólido.

Observaciones.(a) La (6) es una definición explícita de peso específico; la (9), en cambio, nos da el valor numérico del peso específico relativo. Estas fórmulas se aplican de manera diferente: la primera exige una medición del volumen además de una pesada; la segunda sólo requiere dos pesadas.(b)En la deducción de (9) han intervenido, además de operaciones lógicas y matemáticas, el enunciado de una ley natural (la de Arquímedes) y una definición (la de peso específico).

(c) Reducción del peso al vacío. Conviene que las determinaciones de peso sean independientes de las condiciones atmosféricas,para poder compararlas con las de los laboratorios de todo el mundo. Es decir, para asegurar la comunicabilidad del conocimiento científico conviene que los valores de los pesos y de otras magnitudes se refiaran al vacío. Hay dos maneras de conseguirlo: en forma directa, haciendo pesadas en el vacío (lo que acarrea dificultades técnicas); e indirectamente,efectuando la llamada "reducción de las pesadas al vacío". Esta operación consiste en calcular el empuje que reciben el cuerpo y las pesas sumergidos en la atmósfera, empuje que hace que el peso aparente de uno y otras sean menores que en el vacío. Al peso aparente se le suma el empuje que recibe el cuerpo.(Recuérdese el viejo acertijo: ¿Qué pesa más, un kilogramo de plomo o un kilogramo de lana?)

(d) Aplicaciones técnicas. Las (b) y (c)constituyen aplicaciones de una ley científica dentro del dominio de la ciencia. Las aplicaciones tecnológicas más importantes de la ley de Arquímedes se hacen al diseño de naves y aeronaves; son tan obvias que solemos olvidarlas.-