

Código numérico para simulaciones hidrodinámicas con simetría esférica en Relatividad General

Silvia Morales[†] y Héctor Vucetich[‡]

[†] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Universidad Nacional de Rosario.

[‡] Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata.

E-mail: morales@fceia.unr.edu.ar



Resumen

En este trabajo presentamos un código numérico para simulaciones hidrodinámicas con simetría esférica en Relatividad General con coordenadas de Lagrange. Este código está basado en el de S. Yamada, con algunas mejoras que proponemos para simplificar la implementación de las condiciones de contorno. Además presentamos un sistema de ecuaciones para resolver analíticamente la zona central de la estrella, con el fin de tratar debidamente las variaciones bruscas de variables en un entorno del centro de la estrella, que en la descripción de Lagrange es un punto singular. Los resultados obtenidos permiten eliminar algunos de los errores numéricos que surgen al realizar simulaciones dinámicas de estrellas de neutrones.

Introducción

La simulación hidrodinámica de escenarios de colapso estelar y de estrellas neutrones cuenta ya con más de medio siglo de historia. Durante las primeras décadas se utilizaron métodos explícitos, que si bien resultan sencillos y pueden ser fácilmente aplicados a simulaciones multidimensionales, tienen la desventaja de requerir pasos de tiempo pequeños para satisfacer la condición de Courant. Más adelante fueron adoptados métodos implícitos, que no poseen dicha limitación. En particular el método de Yamada [1] es uno de los más utilizados en la actualidad. Utilizando este método en trabajos previos, hemos observado cierto error que aparece en los contornos, especialmente en el centro, que resulta más o menos importante dependiendo de la ecuación de estado utilizada. Dos de las estrategias que proponemos para reducir dicho error se presentan en este trabajo. La primera consiste en una redefinición de la variable p , que deja de definirse en el centro de la zona para definirse en los bordes. La segunda consiste en resolver analíticamente la zona central, ya que el centro constituye un punto singular en el que las derivadas de varias variables resultan infinitas.

Ecuaciones dinámicas

A partir de las ecuaciones hidrodinámicas con simetría esférica para la descripción de Lagrange [1], y anulando tanto las derivadas temporales como u , pueden obtenerse las ecuaciones para el equilibrio hidrostático.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \mu} = -\frac{h\Gamma}{r^2} \left(r p + \frac{m}{4\pi r^2} \right) \\ \frac{\partial r}{\partial \mu} = \frac{\Gamma \tau}{4\pi r^2} \\ \frac{\partial m}{\partial \mu} = \Gamma (1 + \epsilon) \end{cases} \quad (1)$$

Las condiciones de contorno son $p(\mu = \mu_{max}) = 0$, $r(\mu = 0) = 0$ y $m(\mu = 0) = 0$.

Para resolver las ecuaciones, se reemplazan las derivadas por diferencias finitas centrales. Las variables que aparecen derivadas son tomadas en los bordes de las zonas, y las que no aparecen derivadas en el centro.

$$\begin{cases} \frac{\Gamma_i}{h_i} r_i^2 (p_J - p_I) + \frac{\Delta \mu}{4\pi} \frac{m_i}{r_i^2} + \Delta \mu r_i p_i = 0 \\ \frac{4\pi}{3} (r_I^3 - r_H^3) - \Gamma_i \tau_i \Delta \mu = 0 \\ m_I - m_H - \Gamma_i (1 + \epsilon_i) \Delta \mu = 0 \end{cases} \quad (2)$$

En las ecs. 2 los subíndices i indican el centro de la zona. Para las variables r y m , los subíndices H e I indican los bordes izquierdo y derecho, respectivamente, mientras que para la variable p son los subíndices I y J los que indican los bordes izquierdo y derecho. El motivo de esta elección se fundamenta en las condiciones de contorno.

Por otro lado, la variable ϕ debe ser continua, por lo que su valor sobre la superficie de la estrella queda determinado por la métrica de Schwarzschild para el vacío en dicho punto

$$e^{-\phi(\mu=\mu_{max})} = \left(1 - \frac{2m(\mu=\mu_{max})}{r(\mu=\mu_{max})} \right) \left(1 + u(\mu=\mu_{max})^2 - \frac{2m(\mu=\mu_{max})}{r(\mu=\mu_{max})} \right)^{-1/2} \quad (3)$$

De la ec. 3, y considerando que la velocidad u en el centro de las estrellas debe ser nula, resulta conveniente discretizar a ϕ de la misma forma que p , y a u de la misma forma que r . Con estas definiciones, resulta conveniente reemplazar la ecuación (11) de la ref. [1] por la de la definición de u . De esta forma, las ecuaciones que consideramos son las siguientes

$$\begin{cases} e^{-\phi} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mu} (4\pi r^2 u) \\ e^{-\phi} \frac{\partial u}{\partial t} = -4\pi r^2 \left(\frac{p}{r} + \frac{\Gamma}{h} \frac{\partial p}{\partial \mu} \right) - \frac{m}{r^2} \\ e^{-\phi} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial \mu} (4\pi r^2 u) \\ e^{-\phi} \frac{\partial r}{\partial t} = u \\ \Gamma^2 = 1 + u^2 - \frac{2m}{r} \\ h \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\tau \frac{\partial p}{\partial \mu} \\ \frac{\partial m}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ h = 1 + \epsilon + \tau p \\ f(p, \epsilon, \tau) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Aplicando los criterios antes discutidos, las ecuaciones en diferencias resultantes son

$$\begin{cases} 0 = e^{-\phi_i^N} \frac{\Delta \mu}{4\pi \Delta t} (\tau_i^m - \tau_i^n) - \frac{1}{\Gamma_i^N} \left[(r_I^N)^2 u_I^m - (r_H^N)^2 u_H^m \right] \\ 0 = e^{-\phi_i^N} \frac{\Delta \mu}{4\pi \Delta t} (u_i^m - u_i^n) + \Delta \mu \left(\frac{m_i^N}{4\pi r_i^m r_i^n} + r_i^N p_i^N \right) + \frac{\Gamma_i^N}{h_i^N} (r_i^N)^2 (p_J^N - p_I^N) \\ 0 = e^{-\phi_i^N} \frac{\Delta \mu}{4\pi \Delta t} (\epsilon_i^m - \epsilon_i^n) + \frac{1}{\Gamma_i^N} \left[(r_I^N)^2 u_I^N p_J^N - (r_H^N)^2 u_H^N p_I^N \right] + \\ + e^{-\phi_i^N} \frac{\Delta \mu}{4\pi \Delta t} \frac{h_i^N}{\Gamma_i^N} \left\{ \frac{1}{2} \left[(u_i^m)^2 - (u_i^n)^2 \right] - m_i^N \left(\frac{1}{r_i^m} - \frac{1}{r_i^n} \right) + 2\pi p_i^N \left[(r_i^m)^2 - (r_i^n)^2 \right] \right\} \\ 0 = e^{-\phi_i^N} (r_I^m - r_I^n) - u_I^N \Delta t \\ 0 = (\Gamma_i^m)^2 - \left[1 + (u_i^m)^2 - \frac{m_i^m - m_i^n}{r_i^m} \right] \\ 0 = h_i^m (\phi_J^m - \phi_I^m) + \tau_i^m (p_J^m - p_I^m) \\ 0 = m_I^m - m_J^m + \frac{4\pi}{3} p_J^m \left[(r_I^m)^3 - (r_J^m)^3 \right] \\ 0 = h_i^m - \left(1 + \epsilon_i^m + \tau_i^m p_i^m \right) \\ 0 = f(p_i^m, \epsilon_i^m, \tau_i^m) \end{cases} \quad (5)$$

Estas ecuaciones implícitas pueden resolverse numéricamente por el método de Newton-Raphson.

Condiciones en el centro

De las ecs. 1 puede verse que cerca del centro, las variables p , r y m tienen la siguiente dependencia

$$\begin{cases} p - p(\mu = 0) \propto \mu^{2/3} \\ r \propto \mu^{1/3} \\ m \propto \mu \end{cases} \quad (6)$$

es decir, p y r presentan puntos singulares. Esto ocasiona que en las primeras zonas el error debido al método numérico sea importante.

Una manera de evitar dicho error es resolver de forma analítica la zona central de la estrella. Para ello se desarrollan las variables en series de potencias, con términos dependientes del tiempo

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \mu^{n/3} \quad (7)$$

donde x representa a cualquiera de las variables. Estas series se reemplazan en las ecs. 4, y se resuelven de la forma habitual. Considerando solamente los términos de menor orden, se llega a las siguientes 9 ecuaciones

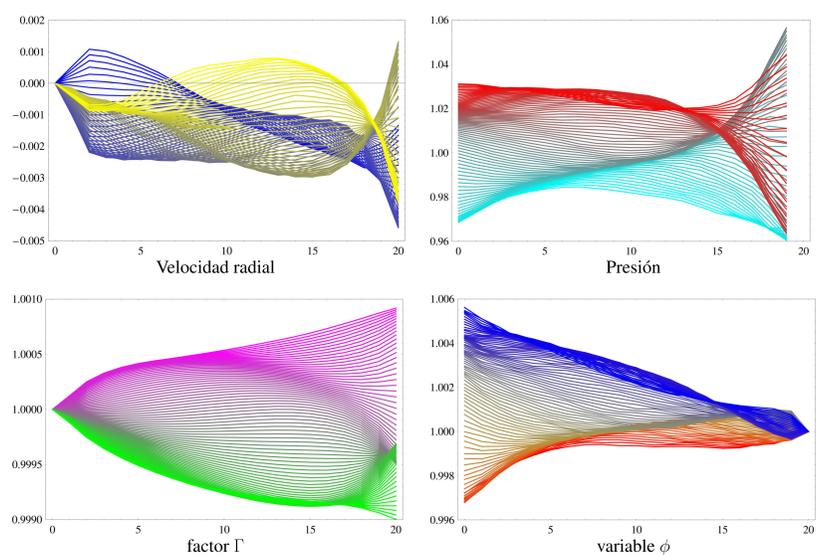
$$\begin{cases} e^{-\phi_0} \tau_0' = 4\pi r_1^2 u_1 \\ e^{-\phi_0} u_1' = -4\pi p_0 r_1 - \frac{8\pi}{3} \frac{p_2 r_1^2}{h_0} - \frac{m_3}{r_1^2} \\ e^{-\phi_0} \epsilon_0' = -4\pi p_0 r_1^2 u_1 \\ \tau_0 = \frac{4\pi}{3} r_1^3 \\ \Gamma_2 = \frac{1}{2} u_1^2 - \frac{m_3}{r_1} \\ \phi_2 h_0 + p_2 \tau_0 = 0 \\ m_3' = -4\pi p_0 r_1^2 r_1' \\ h_0 = 1 + \epsilon_0 + p_0 \tau_0 \\ f(p_0, \epsilon_0, \tau_0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

para 11 variables ($\phi_0, p_0, h_0, \tau_0, \epsilon_0, r_1, u_1, p_2, \Gamma_2, \phi_2$ y m_3). Para completar el sistema, se utilizan los valores de p_I y ϕ_I de la siguiente zona

$$\begin{cases} p_I = p_0 + p_2 \Delta \mu^{2/3} \\ \phi_I = \phi_0 + \phi_2 \Delta \mu^{2/3} \end{cases} \quad (9)$$

Resultados

A continuación se presentan resultados preliminares obtenidos de simulaciones realizadas con el software *Mathematica*. Para la simulación se utilizó la ecuación de estado de Bethe-Johnson tipo II, y se tomaron 20 zonas iguales, siendo la masa total $1.33 M_{\odot}$. No fue necesario incluir ningún método para estabilizar las simulaciones, como por ejemplo, viscosidad artificial. Las siguientes figuras muestran gráficos de la velocidad, y de las diferencias relativas de la presión y de las variables Γ y ϕ respecto a sus valores en el equilibrio hidrostático.



Los resultados preliminares han sido satisfactorios, ya que no se observan comportamientos irregulares en los bordes, aunque es necesario señalar el número de zonas considerado es bajo. A futuro, se transcribirá el código a C y se realizarán simulaciones más exigentes para verificar si efectivamente se observan mejoras respecto al método original.

Conclusiones

- En este trabajo se propone una alternativa a la definición de las ecuaciones del método de Yamada.
- Además, se propone un tratamiento analítico de la zona central, donde se existe un punto singular.
- Estas mejoras fueron aplicadas a simulaciones de oscilaciones utilizando la ecuación de estado de Bethe-Johnson, mostrándose estables sin necesidad de incluir viscosidad artificial.
- No se observaron comportamientos irregulares en los bordes.
- Es necesario realizar pruebas más exigentes para comprobar si efectivamente el nuevo código es superior al original.

Referencias

- [1] S. Yamada. An implicit lagrangian code for spherically symmetric general relativistic hydrodynamics with an approximate riemann solver. *The Astrophysical Journal*, 475(2):720, 1997.