



III JORNADAS DE EXPERIENCIAS INNOVADORAS EN EDUCACIÓN EN LA FCEIA

**LA APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA
EN UN PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA
DE LOS INGRESANTES A LAS CARRERAS DE INGENIERÍA**

Articulación Universidad - Escuela Media

D'Agostini, Viviana Paula dago@fceia.unr.edu.ar

(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA - IPS)

Denti, Graciela Viviana denti@fceia.unr.edu.ar

(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA)

Pérez, Mariana del Valle mperez@fceia.unr.edu.ar

(Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática. FCEIA)

Resumen

La resolución de problemas es uno de los principales objetivos del proceso de aprendizaje, dado que implica un conocimiento en acción.

En el presente artículo, se discuten los procesos de resolución de un problema de la vida cotidiana, de naturaleza geométrica, no rutinario, y presentado con un estilo narrativo. Mediante un estudio exploratorio, se analiza la resolución efectuada por una muestra de 120 estudiantes ingresantes a las carreras de ingeniería, buscando identificar las estrategias que los estudiantes desarrollaron para resolver el problema y la forma en que comunicaron la solución.

Palabras Claves

Problema - Aprendizaje - Geometría - Cotidiano - Narrativo

I. Introducción

Un problema es aquel cuya solución no es evidente, no surge por aplicación directa de ningún resultado conocido, sino que para resolverlo es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos; permite múltiples enfoques y genera diversas soluciones; establece un vínculo entre la situación propuesta y el mundo real (criterio de relevancia).

Los problemas no rutinarios requieren un pensamiento crítico y creativo, a la vez que el texto narrado, que emplea principalmente un lenguaje coloquial, tiene una correspondencia más cercana a la experiencia cotidiana.

El proceso de resolución de problemas activa el conocimiento previo, con lo cual facilita el nuevo aprendizaje; integra el conocimiento de distintas disciplinas e imita las maneras de transferirlo a situaciones del mundo real, logrando un aprendizaje más significativo, y por ende, más fácil de recordar; permite al estudiante aprender sobre su propio proceso de aprendizaje y aumenta la capacidad para procurar un aprendizaje autónomo; incrementa los niveles de comprensión y provoca satisfacción por el logro obtenido.

George Pólya, matemático pionero en esta temática, plantea la Resolución de Problemas (*Método de los Cuatro Pasos*) como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida cotidiana. En base a este método, definimos las siguientes **cuatro etapas del proceso de resolución de problemas**:

Lectura e interpretación del problema:

En esta etapa es fundamental que el estudiante entienda “todo” lo que dice el problema, y si fuera necesario que lo replantee con sus propias palabras; que distinga los datos (numéricos o no) necesarios para la resolución, de los datos superfluos que no aportan nada; que analice las condiciones del problema y toda la información contenida (si es suficiente, no redundante ni contradictoria); que tenga bien claro cuáles son las incógnitas y a dónde pretende llegar.

Búsqueda de un plan:

Una vez que el estudiante tiene claro de que datos dispone y a dónde quiere llegar, puede concebir un plan en base a activar sus conocimientos previos; recordar problemas similares que haya resuelto, determinando si la forma de resolución de esos problemas análogos o bien sus resultados se pueden utilizar en esta situación; buscando relaciones con otros resultados útiles, definiciones, teoremas y propiedades; subdividiendo el problema en sub-problemas más simples; haciendo un esquema de la situación que le ayude a visualizarla y/o a tener en vista los casos posibles.

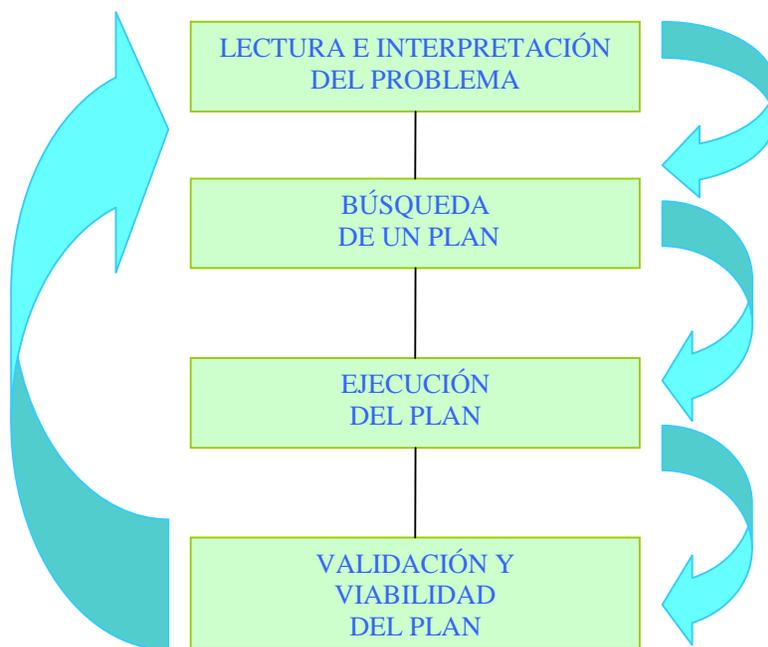
✚ Ejecución del plan:

En esta etapa el estudiante implementa la o las estrategias que escogió (planteo de ecuaciones, fórmulas, propiedades, simetrías) hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción le sugiera tomar un nuevo curso. Es importante que examine todos los detalles y que distinga la diferencia entre “percibir” que un razonamiento o paso es correcto y por otro lado, poder “demostrar” que es correcto.

✚ Validación y viabilidad del plan:

Entendemos por *validación*, la justificación matemática que muestra que la estrategia ejecutada es correcta. Y por *viabilidad*, el relato del estudiante mostrando que bajo las condiciones del problema su estrategia es posible llevarla a cabo, en este caso con el uso de la sogá.

En esta última fase, llamada también *visión retrospectiva*, es muy importante que el estudiante se detenga a observar qué fue lo que hizo; que interprete tanto la solución propuesta como el método utilizado, y reflexione si son correctos y si tiene forma de validarlos, si resolvió un caso particular o uno general, si hay otras soluciones posibles y si alguna es más simple; que verifique la viabilidad de su propuesta, en cuanto a si satisface los requerimientos del problema. Este paso permite una retroalimentación para resolver futuras situaciones: cuando se resuelve un problema, que es en sí el objetivo inmediato, también se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problemas, y por ende, tanto la solución como el método utilizado pueden convertirse en una nueva herramienta en el momento de enfrentar otro problema (Pólya, 1990).



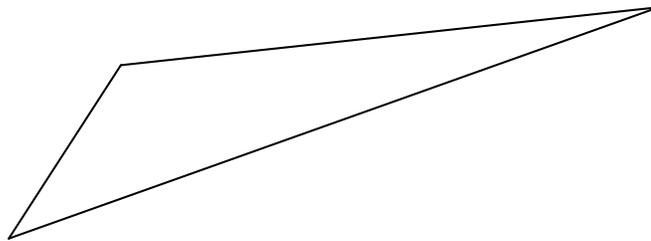
II. Método

Sujetos: Participaron de la experiencia 120 estudiantes que asistían al curso de ingreso 2010 de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, en forma voluntaria. Los ingresantes cursaban en cuatro comisiones: comisión 1 (24 estudiantes), comisión 7 (36 estudiantes), comisión 11 (37 estudiantes) y comisión 14 (23 estudiantes).

Diseño de la experiencia: Se realizó un estudio exploratorio, cuyo objetivo consiste en analizar y categorizar las estrategias que los estudiantes desarrollaron para resolver el siguiente **problema:**

Raúl les dijo a sus cuatro nietos que había estado cortando el césped de su jardín, pero como estaba muy cansado no había terminado y les pide entonces que terminen de cortar el sector restante. Cuando los chicos se dispusieron a hacer el trabajo, se encontraron con un sector triangular.

Disponiendo de una soga que alcanza para cubrir cuatro veces el perímetro del sector, ¿cómo hicieron los chicos para dividirse el trabajo por igual?



El problema¹ fue presentado a los estudiantes en forma impresa en una hoja; se les solicitó que resolvieran individualmente el mismo y que subrayaran las palabras del enunciado que les resultaran relevantes para su resolución. Se les pidió, además, que escribieran “todo” lo que pudieran. Tuvieron 30 minutos para realizar esta tarea, sin ninguna intervención de los docentes presentes.

Cabe destacar que el curso de ingreso dedica un capítulo a geometría, repasando los conceptos (ya dados en el colegio) necesarios para la resolución del problema planteado.

Primeramente, en dos de las comisiones se presentó el problema sin gráfico (comisiones 1 y 7, con un total de 60 estudiantes, en noviembre de 2009) y posteriormente, en las otras dos se planteó el problema con el gráfico mostrado, correspondiente a un triángulo escaleno en una posición no tradicional que representa el sector triangular involucrado (comisiones 11 y 14, sumando también 60 estudiantes, en febrero de 2010).

¹ El problema está basado en un enunciado similar del libro *Matemática 2*. (Amenedo, M. y otros)

III. Análisis y Resultados de la Experiencia

Realizaremos el análisis de la resolución del problema de acuerdo a las cuatro etapas definidas anteriormente.

✚ **Lectura e interpretación del problema:** La situación problemática planteada consiste en dividir por igual el trabajo a realizar entre los cuatro chicos, es decir, se espera que cada uno corte el césped de una región de igual área que el resto, disponiendo de una soga para fraccionar el terreno.

Se detalla en la siguiente tabla las palabras relevantes del enunciado subrayadas por los ingresantes.

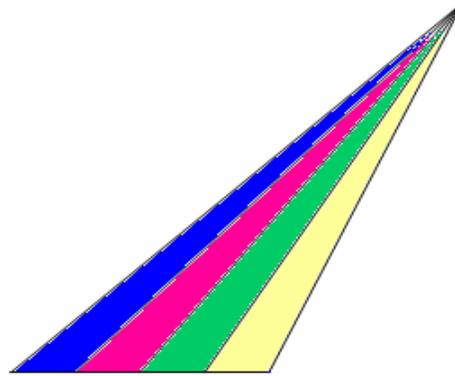
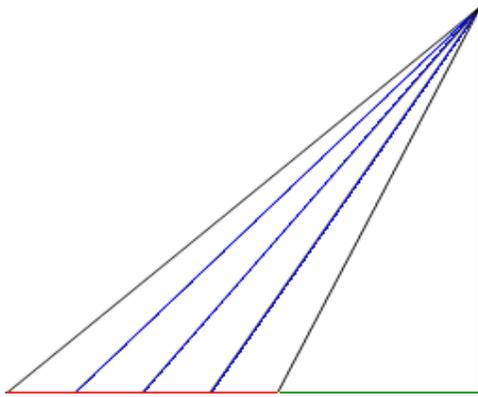
Tabla 1

Palabras subrayadas	Nº de estud	%
<i>“cuatro veces el perímetro”</i>	68	57
<i>“sector triangular”</i>	65	54
<i>“cuatro nietos”</i>	63	52
ninguna palabra	32	27
<i>“una soga”</i>	28	23
<i>“trabajo por igual”</i>	28	23
<i>“sector restante”</i>	12	10
<i>“cortando”</i>	1	1
<i>“estaba muy cansado”</i>	1	1
<i>“terminen de cortar”</i>	1	1

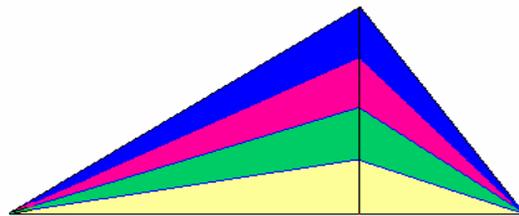
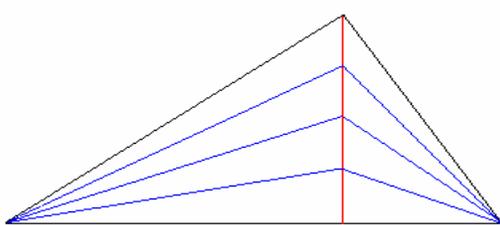
✚ **Búsqueda de un plan:** En base a la interpretación que el estudiante haya hecho del problema buscará resultados similares, esquemas, relaciones, que le permitan acercarse a la resolución del mismo, visualizando los casos posibles.

✚ **Ejecución del plan:** A continuación se presentan todas las **estrategias válidas de resolución** planteadas por los estudiantes.

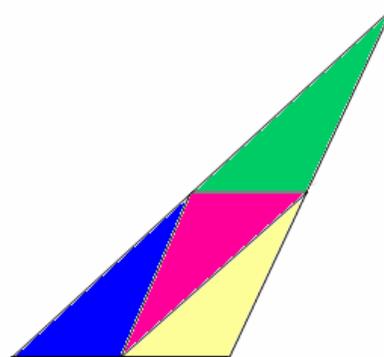
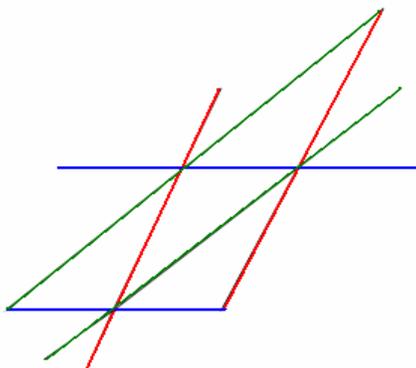
Estrategia 1. Tomando la soga se mide la longitud de un lado del terreno triangular. Se divide esa longitud en cuatro partes iguales y se las marca en el terreno. Los chicos pueden usar la soga, desde el vértice opuesto hasta la base para delimitar el sector que le toca cortar el césped a cada uno, armando cuatro triángulos de igual área, ya que tienen la misma base por construcción y la misma altura.



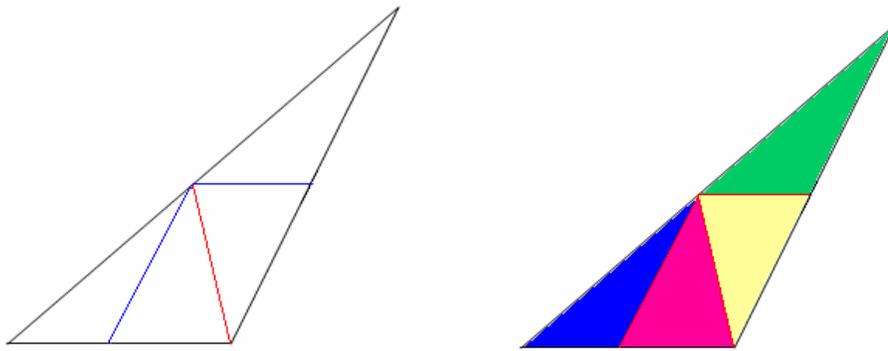
Estrategia 2. Con la ayuda de la soga se traza una altura del triángulo y se la divide en cuatro partes iguales; uniendo los extremos con los otros dos vértices se arman cuatro triángulos que resultarán de igual área.



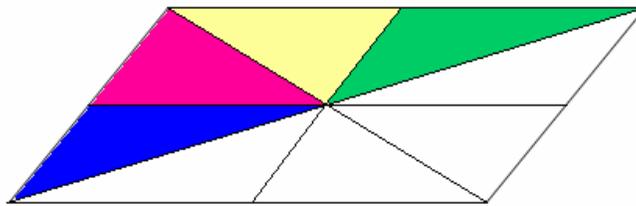
Estrategia 3. Se traza por el punto medio de un lado del triángulo las rectas paralelas a los otros dos lados, y luego la recta paralela al primer segmento (al que se le tomó el punto medio) que pasa por el punto medio de alguno de los otros dos lados, (cualquiera ya que pasará por ambos puntos medios): proyección paralela de una recta sobre otra. Estos cuatro triángulos construidos con la ayuda de la soga tienen igual área.



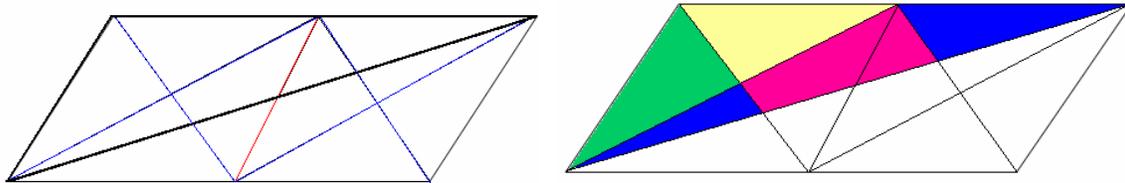
Estrategia 4. Unir con la soga un vértice al punto medio del segmento opuesto y luego unir este último punto con los puntos medios de cada uno de los otros dos lados. Los cuatro triángulos en los que quedó dividido el jardín tienen igual área.



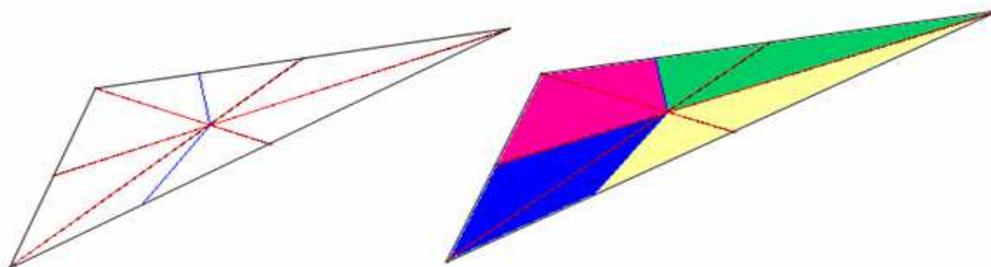
Equivalentemente se construye un paralelogramo a partir del triángulo dado, se trazan las diagonales y las rectas paralelas a cada lado que pasan por el punto en el que se cortan las diagonales (cortarán a los lados en su punto medio), resultando:



Estrategia 5. Dado el triángulo armar un paralelogramo. Desde el punto medio de uno de los lados trazar el segmento paralelo a los otros dos lados. Trazar las diagonales de los dos nuevos paralelogramos formados. Se forman cuatro sectores de igual área.



Estrategia 6. Con la soga unir cada vértice con el punto medio del lado opuesto (medianas). Luego unir el punto medio del segmento mitad de un lado con el punto de intersección de las tres medianas; repetir desde otro lado del triángulo, resultando:



Observación: Notar que las estrategias 1, 3 y 4 dividen el sector triangular en regiones triangulares, mientras que las estrategias 2 y 6, en uniones de regiones triangulares. En cambio en la estrategia 5 las regiones no son todas triangulares.

Categorías de análisis: Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos al analizar las distintas resoluciones de los ingresantes según las categorías descriptas a continuación.

Tabla 2

Enunciado con Gráfico (60 estudiantes)					
CATEGORÍAS				Nº de estudiantes	%
1- Planteo solo matemático				10	17
2- Relación confusa: perímetro y área				15	25
3- Estrategias erróneas			a- Conceptos utilizados erróneamente	6	10
			b- Estrategias no válidas	16	27
4- Estrategias válidas	I) Caso general	a) Justifica	i) usa sogá	0	0
			ii) no usa sogá	0	0
		b) No justifica	i) usa sogá	3	5
			ii) no usa sogá	8	13
	II) Caso particular	a) Justifica	i) usa sogá	0	0
			ii) no usa sogá	0	0
		b) No justifica	i) usa sogá	1	2
		ii) no usa sogá	1	2	
5- Hoja en blanco				0	0

Tabla 3

Enunciado sin Gráfico (60 estudiantes)						
CATEGORÍAS				Nº de estudiantes	%	
1- Planteo solo matemático				4	7	
2- Relación confusa: perímetro y área				6	10	
3- Estrategias erróneas			a- Conceptos utilizados erróneamente	2	3	
			b- Estrategias no válidas	20	33	
4- Estrategias válidas	I) Caso general	a) Justifica	i) usa sogá	0	0	
			ii) no usa sogá	1	2	
				b) No justifica	i) usa sogá	6
			ii) no usa sogá	9	15	
	II) Caso particular	a) Justifica	i) usa sogá	0	0	
			ii) no usa sogá	0	0	
		b) No justifica	i) usa sogá	5	8	
		ii) no usa sogá	5	8		
5- Hoja en blanco				2	3	

Descripción de las categorías (Todas las categorías son excluyentes). El estudiante:

1) realiza algún cálculo matemático (plantea área, perímetro, etc.) sin indicar como realiza las mediciones y sin hacer mención del uso de la sogá.

2) divide el perímetro en cuatro partes iguales (usando la sogá) para repartir a cada chico, no quedando clara la relación entre los conceptos de perímetro y área.

3) presenta una estrategia errónea. Casos: a) Incorrecta utilización de un concepto (bisectriz, mediatriz, etc.); b) Estrategias no válidas y que no conducen a ninguna respuesta (Por ejemplo: tomar medidas del gráfico).

4) presenta alguna de las estrategias válidas para la resolución del problema, divididas en caso general o caso particular, justificándose el uso o no de la soga.

5) entrega la hoja en blanco.

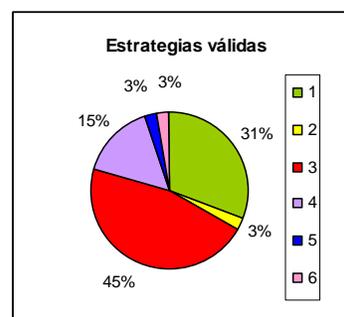
🚩 Validación y Viabilidad del plan: A continuación se presentan datos y análisis *sólo de las estrategias válidas* implementadas por los estudiantes.

Tabla 4

ESTRATEGIAS VÁLIDAS (Con y sin gráfico)			Nº de estud.	%
I) Caso general	a) Justifica	i) usa soga	0	0
		ii) no usa soga	1	3
	b) No justifica	i) usa soga	9	23
		ii) no usa soga	17	44
II) Caso particular	a) Justifica	i) usa soga	0	0
		ii) no usa soga	0	0
	b) No justifica	i) usa soga	6	15
		ii) no usa soga	6	15
Total			39	100

Tabla 5

ESTRATEGIAS VÁLIDAS	Nº de estudiantes Etapas 1, 2 y 3	Nº de estudiantes Etapa 4		Nº total de estudiantes
		Validación	Viabilidad	
1	5	1	6	12
2	1	0	0	1
3	13	0	5	18
4	2	0	4	6
5	1	0	0	1
6	1	0	0	1
Total	23	1	15	39



De los 120 ingresantes, 39 realizaron alguna estrategia válida (33 %).

De los 39 estudiantes que realizaron una estrategia válida, 26 pertenecen al grupo sin gráfico y 13 a los que tenían gráfico;

El 31 % de los estudiantes (12) analizaron casos particulares, de los cuales la mayoría (10) pertenecen al grupo de ingresantes cuyos enunciados no tenían gráfico.

De los estudiantes que analizaron un caso general (27), el 63 % no verificó la viabilidad del problema mediante el uso de la sogá.

La tercera etapa (Ejecución de un plan) fue completada por 23 estudiantes.

La cuarta etapa (Validación y viabilidad del plan) no fue completada por ningún estudiante:

- Sólo un estudiante valida su estrategia pero no analiza su viabilidad.
- 15 estudiantes verificaron la viabilidad de su estrategia pero no la validaron.

IV. Conclusiones y Reflexiones finales

Podemos concluir que los ingresantes mostraron interés en el desafío de resolver el problema, presentaron seis estrategias distintas de resolución y subrayaron en el enunciado las palabras más importantes. Sin embargo, un sólo estudiante (de 120) justificó la validez de su estrategia (pero no verificó su viabilidad) y lo hace con la estrategia 1, que entendemos es la más fácil. Es decir, ningún estudiante completó todas las etapas de resolución del problema, cuyos contenidos corresponden al nivel medio y que además fueron repasados en el curso de ingreso.

Generalmente se trabaja con los mal llamados problemas que sólo requieren aplicación mecánica de un algoritmo de resolución, provocando que los estudiantes se interesen por obtener un resultado, sin verificar la coherencia de su respuesta, ni analizar o discutir estrategias; no están habituados a enfrentarse a enunciados de tipo narrativo, que reflejan una situación de la vida cotidiana.

Debemos concientizarnos que resolver problemas del mundo real enfrenta a la toma de decisiones, cultiva el espíritu crítico y convoca a la reflexión; permite al estudiante afrontar obstáculos, tanto teóricos como prácticos en su vida, y se fortalece tanto en conocimiento como en habilidades, actitudes y valores.

Bibliografía

- Alfaro, C. (2006). *Las ideas de Pólya en la resolución de problemas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1, Número 1. Escuela de Matemática Universidad Nacional.

-Amenedo, M.; Carranza, S.; Diñeiro, M.; Grau, J.; Latorre, M. (1996). *Matemática 2*. Santillana. Buenos Aires.

-Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México.