

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
CÁTEDRA DE ELECTRÓNICA III

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE AMPLIFICADORES

Federico Miyara

AÑO 1994 - Rev. 2001

RESPUESTA EN FRECUENCIA DE AMPLIFICADORES

1. INTRODUCCIÓN

Consideraremos circuitos eléctricos lineales con una entrada y una salida, cuyos parámetros sean concentrados. Estos circuitos se pueden describir matemáticamente mediante una ecuación diferencial ordinaria¹ como la siguiente:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_0 x$$

donde $x(t)$ es la entrada, o excitación, e $y(t)$ la salida, o respuesta. Aplicaremos ahora la transformación de Laplace a ambos miembros. Si suponemos que el circuito está inicialmente relajado, es decir que $y(t)$ tiene condiciones iniciales nulas, entonces aplicando la transformación de Laplace,

$$Y(s) (a_n s^n + \dots + a_0) = X(s) (b_m s^m + \dots + b_0),$$

de donde

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = H(s). \quad (1)$$

La función $H(s)$ es la función de transferencia del circuito, y puede factorizarse como

$$H(s) = \frac{b_m (s - c_1)(s - c_2) \dots (s - c_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (2)$$

donde c_i son los ceros y p_i los polos. Esta función permite obtener la respuesta a cualquier excitación bajo la hipótesis ya enunciada de que $y(t)$ tenga condiciones iniciales nulas. En efecto, dado que

$$Y(s) = H(s) X(s), \quad (3)$$

podemos utilizar la transformación inversa de Laplace para obtener:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s) X(s)). \quad (4)$$

Nos interesa ahora aplicar este resultado al caso en que $x(t)$ es una función senoidal, debido a la gran importancia de este tipo de funciones para la caracterización de diversos sistemas. Si

$$x(t) = X \text{ sen } \omega t,$$

¹ Los resultados son desde luego aplicables a cualquier sistema físico gobernado por una ecuación diferencial ordinaria.

entonces

$$\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{X} \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

Sustituyendo (2) y (5) en (3) y desarrollando en fracciones simples,

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\mathbf{A}_1}{s - \mathbf{p}_1} + \dots + \frac{\mathbf{A}_n}{s - \mathbf{p}_n} + \frac{\mathbf{B}}{s + \mathbf{j}\omega} + \frac{\mathbf{C}}{s - \mathbf{j}\omega},$$

donde se ha supuesto que los polos de $H(s)$ son simples² y que no coinciden con $\mathbf{j}\omega$. Si aplicamos ahora la transformación inversa, en el segundo miembro se obtiene

$$y(t) = \mathbf{A}_1 e^{\mathbf{p}_1 t} + \dots + \mathbf{A}_n e^{\mathbf{p}_n t} + \mathbf{B} e^{-\mathbf{j}\omega t} + \mathbf{C} e^{\mathbf{j}\omega t}.$$

Si el circuito es estable, los polos de $H(s)$ tienen parte real negativa y las correspondientes exponenciales o modos naturales (que constituyen el régimen libre) se extinguen con el tiempo, de modo que para t grande

$$y(t) = \mathbf{B} e^{-\mathbf{j}\omega t} + \mathbf{C} e^{\mathbf{j}\omega t}. \quad (6)$$

Calculemos \mathbf{B} y \mathbf{C} :

$$\mathbf{B} = \lim_{s \rightarrow -\mathbf{j}\omega} (s + \mathbf{j}\omega) \mathbf{Y}(s) = \frac{\mathbf{X}}{-2\mathbf{j}} \mathbf{H}(-\mathbf{j}\omega)$$

$$\mathbf{C} = \lim_{s \rightarrow \mathbf{j}\omega} (s - \mathbf{j}\omega) \mathbf{Y}(s) = \frac{\mathbf{X}}{2\mathbf{j}} \mathbf{H}(\mathbf{j}\omega)$$

Sustituyendo en (6) resulta

$$y(t) = |\mathbf{H}(\mathbf{j}\omega)| \mathbf{X} \sin(\omega t + \arg \mathbf{H}(\mathbf{j}\omega)). \quad (7)$$

La ecuación (7) es de importancia fundamental en la teoría de los sistemas dinámicos lineales, ya que establece una conexión entre el proceso bastante abstracto por medio del cual se define la función de transferencia $H(s)$ y la respuesta concreta del sistema a una excitación senoidal. En primer lugar muestra que la respuesta, después de extinguido el régimen libre o transitorio, será también senoidal. En segundo lugar indica en forma precisa de qué manera se modifican la amplitud y la fase con respecto a la excitación. En tercer lugar, dado que la amplitud y la fase de la respuesta se pueden medir en el laboratorio, es posible obtener experimentalmente los valores de $H(s)$ sobre el eje imaginario, lo cual según se demuestra en la teoría de funciones de variable compleja determina $H(s)$ en todo el plano.

La función $H(\mathbf{j}\omega)$ se denomina respuesta en frecuencia o respuesta frecuencial del circuito o sistema bajo estudio. $H(\mathbf{j}\omega)$ se representa gráficamente en un sistema de ejes con escalas doblemente logarítmicas, obteniéndose el conocido diagrama de Bode. Las

² Con algunos cambios menores se puede extender el razonamiento al caso en que $H(s)$ tenga polos múltiples.

propiedades más sobresalientes de dicho diagrama son: 1) permite transformar el producto de factores de una función de transferencia en una suma de gráficas de dichos factores, y 2) las gráficas de los factores poseen asíntotas rectilíneas y pueden aproximarse mediante éstas. La primera propiedad es evidente por ser la escala vertical logarítmica. La segunda surge de considerar un factor de la forma $1/(1 - s/p)$. Pongamos $s = j\omega$ y calculemos el logaritmo del módulo:

$$\log \frac{1}{|1 - j\omega/p|} = \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/p)^2}} = -\frac{1}{2} \log (1 + (\omega/p)^2)$$

$$\log \frac{1}{|1 - j\omega/p|} = \begin{cases} 0 & \omega \ll |p| \\ \log p - \log \omega & \omega \gg |p| \end{cases}$$

Ambas expresiones corresponden a líneas rectas en función de $\log \omega$, que se intersectan en el punto $(\log p, 0)$. Cuando $H(j\omega)$ es adimensional (como en el caso de una ganancia de tensión), generalmente se toma la escala vertical en decibeles (dB), donde

$$H_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|. \quad (8)$$

En la fig. 1 se muestra el ejemplo de un sistema con dos polos.

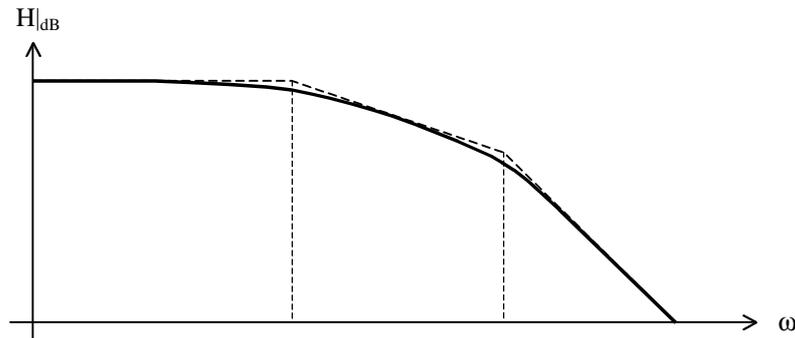


Figura 1. Diagrama de Bode

2. ESTIMACION DE LAS FRECUENCIAS DE CORTE DE UN CIRCUITO

En los amplificadores electrónicos a menudo es necesario conocer algo acerca de la respuesta en frecuencia, aunque no es imprescindible un conocimiento sumamente detallado de la misma. En general es suficiente con disponer de los valores de las frecuencias superior e inferior de corte (frecuencias en las cuales la ganancia cae 3 dB por debajo de su valor en la banda central), ya que éstas determinan el rango útil del amplificador. Dado que el cálculo exacto de la respuesta en frecuencia puede llegar a ser te-

dioso, nos proponemos obtener un método aproximado para calcular sólo los parámetros de interés.

2.1. TEOREMA DE LAS CONSTANTES DE TIEMPO

Consideremos un circuito formado por resistencias, fuentes dependientes e independientes, y n capacitores C_1, \dots, C_n que no formen ningún bucle cerrado. En la fig. 2 (a) se muestra esquemáticamente tal circuito, en el cual se han explicitado los capacitores. En la fig. 2 (b) se quitaron los capacitores, quedando así un circuito que por sus elementos constitutivos no depende de la frecuencia. Procuraremos relacionar las frecuencias de corte con las constantes de tiempo determinadas por cada capacitor y la resistencia vista por él.

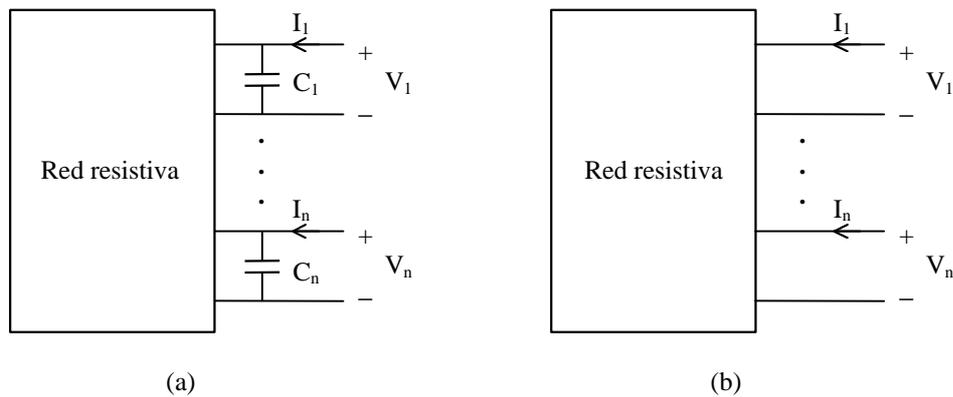


Figura 2. Una red RC con n capacitores. En (a) se han separado los capacitores y en (b) los mismos fueron retirados

Ahora pasivemos las fuentes independientes y escribamos la ecuación matricial que vincula las corrientes y las tensiones en el circuito (b):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} & \cdots & \mathbf{g}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{g}_{n1} & \cdots & \mathbf{g}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix}$$

donde las \mathbf{g}_{ij} son conductancias. En forma matricial abreviada,

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{V} .$$

Notemos que si se formara un bucle cerrado de capacitores las tensiones V_i no serían independientes, ya que estarían vinculadas por la segunda ley de Kirchhoff.

Si dejamos desconectados todos los pares de terminales con excepción del i -ésimo, es decir $I_j = 0$ si $i \neq j$, se puede determinar por medio de la regla de Cramer la tensión desarrollada en el i -ésimo par:

$$V_i = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j} G_{ij}}{\det G} I_j = \frac{G_{ii}}{\det G} I_i,$$

donde $\det G$ es el determinante de la matriz de conductancias y G_{ij} es el menor correspondiente a g_{ij} (es decir el determinante de la matriz que queda al suprimir la columna i y la fila j). De aquí resulta que la resistencia vista por el capacitor C_i con todos los demás pares de terminales en circuito abierto es

$$R_{io} = \frac{G_{ii}}{\det G}. \quad (9)$$

Si ahora cortocircuitamos los pares de terminales a excepción del i -ésimo obtenemos en forma directa

$$I_i = g_{ii} V_i,$$

de donde la resistencia vista por C_i con los demás capacitores cortocircuitados es

$$R_{icc} = \frac{1}{g_{ii}}, \quad (10)$$

Agreguemos ahora la totalidad de los capacitores. La nueva ecuación matricial se obtiene fácilmente de la anterior, ya que a iguales tensiones las corrientes se incrementan en la corriente $sC_i V_i$ que absorbe el capacitor correspondiente. Resulta

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} + sC_1 & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} + sC_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

O, en notación matricial,

$$I = Y \cdot V.$$

Observemos que la entrada de este circuito es una fuente independiente de señal interna al bloque de la figura 2 (ya que sólo se han separado los capacitores), y la salida es también una variable interna. Sin embargo, los polos de la correspondiente función de transferencia constituyen un subconjunto (propio o no) del conjunto de los ceros del determinante de Y , aunque dichas variables de entrada y salida no aparezcan en la ecuación matricial. Esto sucede porque todos los almacenadores de energía han sido tenidos en cuenta fuera de dicho bloque. De modo que para proseguir con el análisis de la respuesta en frecuencia consideraremos el siguiente polinomio de grado n :

$$\det Y = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0. \quad (11)$$

Podemos calcular algunos coeficientes que nos serán útiles:

$$\mathbf{a}_n = C_1 \dots C_n = \prod_{j=1}^n C_j$$

$$\mathbf{a}_{n-1} = \sum_{i=1}^n g_{ii} \prod_{j \neq i} C_j$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n G_{ii} C_i$$

$$\mathbf{a}_0 = \det G$$

De aquí resulta, utilizando (9) y (10):

$$\frac{\mathbf{a}_{n-1}}{\mathbf{a}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{g_{ii}}{C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{icc} C_i}$$

$$\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_0} = \sum_{i=1}^n \frac{G_{ii}}{\det G} = \sum_{i=1}^n R_{io} C_i$$

Definiendo las constantes de tiempo en cortocircuito τ_{icc} y en circuito abierto τ_{io} como

$$\tau_{icc} = R_{icc} C_i, \quad (12)$$

$$\tau_{io} = R_{io} C_i, \quad (13)$$

podemos escribir

$$\frac{\mathbf{a}_{n-1}}{\mathbf{a}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{icc}} \quad (14)$$

$$\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_0} = \sum_{i=1}^n \tau_{io}. \quad (15)$$

Hemos así expresado los cocientes entre los dos primeros y entre los dos últimos coeficientes en términos de las constantes de tiempo en cortocircuito y en circuito abierto. A continuación expresaremos los mismos cocientes en términos de los ceros de $\det Y$.

Si s_1, \dots, s_n son los ceros de $\det Y$, es decir

$$\det Y = a_n (s - s_1) (s - s_2) \dots (s - s_n),$$

podemos determinar los primeros y los últimos coeficientes de (11) como

$$\mathbf{a}_{n-1} = -\mathbf{a}_n \sum_{i=1}^n s_i$$

$$\mathbf{a}_1 = (-1)^{n-1} \mathbf{a}_n \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} s_j$$

$$\mathbf{a}_0 = (-1)^n \mathbf{a}_n \prod_{i=1}^n s_i$$

Entonces

$$\frac{\mathbf{a}_{n-1}}{\mathbf{a}_n} = - \sum_{i=1}^n s_i \quad (16)$$

$$\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_0} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \quad (17)$$

Comparando la ecuación (14) con la (16) y la (15) con la (17), se concluye, finalmente, que

$$\sum_{i=1}^n s_i = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{icc}} \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} = \sum_{i=1}^n \tau_{io} \quad (19)$$

Estas expresiones constituyen el *teorema de las constantes de tiempo* (o *teorema de los capacitores*), y vinculan los polos del circuito con las constantes de tiempo en cortocircuito y en circuito abierto. La utilidad de este teorema se pondrá de manifiesto en la próxima sección.

2.2. APROXIMACIÓN DE LA FRECUENCIA SUPERIOR DE CORTE

A modo de motivación, analizaremos primero el caso particular de un circuito sin ceros tal que uno de sus polos, por ejemplo s_1 , sea mucho menor que los restantes. En la fig. 3 se muestra el diagrama de Bode de un circuito de este tipo con tres polos, s_1 , s_2 y s_3 . La frecuencia superior de corte estará determinada prácticamente por dicho polo, llamado por ese motivo polo dominante:

$$\omega_{sup} \cong |s_1| \quad .$$

Como $|s_1| \ll |s_i|$ para $i > 1$, la sumatoria del primer miembro de (19) puede aproximarse por $-1/\omega_{sup}$, de modo que

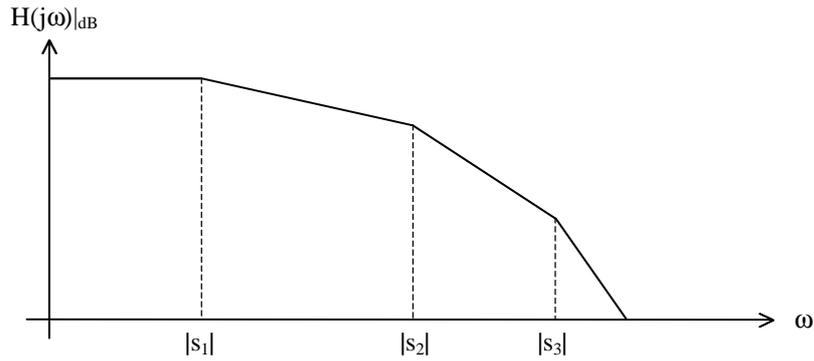


Figura 3. Diagrama de Bode de un circuito con tres polos

$$\omega_{\text{sup}} \cong \frac{1}{\sum_{i=1}^n \tau_{i0}}, \quad (20)$$

La ecuación (20) permite un cálculo aproximado de la frecuencia de corte sin necesidad de efectuar los tediosos cálculos que en general se requieren para la determinación exacta de ω_{sup} . En efecto, mientras que en el cálculo exacto primero se debe determinar en su totalidad la función de transferencia (que involucra elementos dependientes de la frecuencia) y luego plantear la ecuación algebraica de orden $2n$

$$|H(j \omega_{\text{sup}})|^2 = 1/2 ,$$

con la aproximación (20) sólo hay que calcular n resistencias en circuito abierto, sin elementos dependientes de la frecuencia.

Si bien (20) fue obtenida bajo el supuesto de que había un polo dominante, su validez se extiende también al caso de polos relativamente próximos entre sí, pues si bien ya no es cierto que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \cong \frac{1}{s_1} ,$$

tampoco se cumple que $\omega_{\text{sup}} = |s_1|$, tendiendo a compensarse ambas diferencias. En efecto, como la parte real de todos los polos es negativa (pues suponemos que el circuito es estable) se verifica que

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \right| > \frac{1}{|s_1|}$$

Por otra parte $\omega_{\text{sup}} < |s_1|$, dado que los polos cercanos a s_1 reducen el módulo de la función de transferencia, haciendo que la caída de 3 dB se produzca a menor frecuencia. Entonces

$$\frac{1}{\omega_{\text{sup}}} > \frac{1}{|s_1|}.$$

De las desigualdades anteriores es razonable concluir que en general vale la aproximación

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \right| \cong \frac{1}{\omega_{\text{sup}}}$$

y por lo tanto también la (20). Conviene acotar el error cometido, y para ello consideremos el peor caso, que se da cuando todos los polos coinciden. Así, para n polos en $-\omega_0$, se calcula fácilmente que

$$\omega_{\text{sup}} = \omega_0 \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1},$$

mientras que la aproximación (21) da un valor

$$\omega_{\text{sup}} = \omega_0 / n.$$

En la tabla siguiente se muestran los errores para algunos valores de n (los valores se dan con dos cifras decimales).

n	ω_{sup} exacto	ω_{sup} aproximado	Error
2	0,64 ω_0	0,50 ω_0	-22 %
3	0,51 ω_0	0,33 ω_0	-35 %
4	0,43 ω_0	0,25 ω_0	-43 %
5	0,39 ω_0	0,20 ω_0	-48 %
10	0,27 ω_0	0,10 ω_0	-63 %

Aún para un orden tan alto como 5 el error no supera el 50 %, en el peor caso. Sin embargo, a medida que aumenta la complejidad del circuito, y por consiguiente su orden, los polos tienden a separarse más debido al efecto de acoplamiento relacionado con la dependencia de cada modo natural de todos los componentes. Resulta entonces que la aproximación es, en general, mejor cuanto mayor sea el orden del circuito.

EJEMPLO 1

Consideremos una red de rotación de fase como la mostrada en la figura 4. Pasivando V_1 (la única fuente independiente) se obtienen las siguientes constantes de tiempo en circuito abierto:

$$T_{1o} = RC,$$

$$T_{2o} = 2RC,$$

$$T_{3o} = 3RC,$$

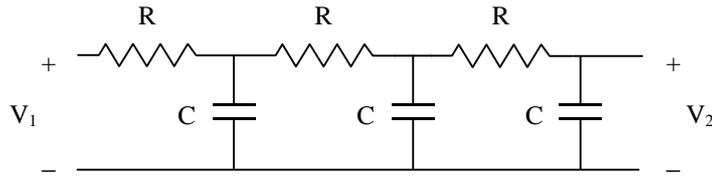


Figura 4. Red de rotación de fase del ejemplo 1.

de donde, utilizando (20) resulta inmediatamente

$$\omega_{\text{sup}} = \frac{1}{6 RC} \cong \frac{0,1667}{RC}$$

El módulo de la función de transferencia en $j\omega$ (cuyo cálculo requiere un esfuerzo considerable) es

$$\left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 5(RC\omega)^2)^2 + (RC\omega - (RC\omega)^3)^2}}$$

Por aproximaciones sucesivas se obtiene $\omega_{\text{sup}} = 0,1943 / RC$. El valor de la aproximación según (20) resulta un 14 % menor. Como se ve, este error es mucho más bajo que el de 35 % correspondiente al peor caso que se consigna en la tabla precedente.

NOTA: Es interesante destacar que el valor dado por (20) es siempre menor que el real, y por lo tanto la respuesta en frecuencia es en realidad más amplia. En el caso de un amplificador, esto es beneficioso, ya que el mismo resultará mejor que lo estimado.

2.3. APROXIMACION DE LA FRECUENCIA INFERIOR DE CORTE

Consideremos ahora un circuito que tenga n ceros en el origen e igual número de polos. Esto significa que para bajas frecuencias la ganancia tiende a 0 y para altas frecuencias tiende a una constante no nula³. Supongamos además que tiene un polo mucho mayor que los otros, digamos, s_n . En la fig. 5 se muestra el gráfico de Bode de un circuito de este tipo con tres polos y tres ceros.

La frecuencia inferior de corte estará determinada prácticamente por el polo s_n :

$$\omega_{\text{inf}} \cong |s_n|$$

Como $|s_n| \gg |s_i|$ para $i < n$, la sumatoria del primer miembro de (18) puede aproximarse por $-\omega_{\text{inf}}$, de modo que

³ Algunos ejemplos son los filtros RC pasaltos y los amplificadores con acoplamientos capacitivos.

$$\omega_{\text{inf}} \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_{i\text{cc}}} \quad (22)$$

La ecuación (22), similar a la (20), permite un estimar la frecuencia inferior de corte sin necesidad de efectuar cálculos tediosos

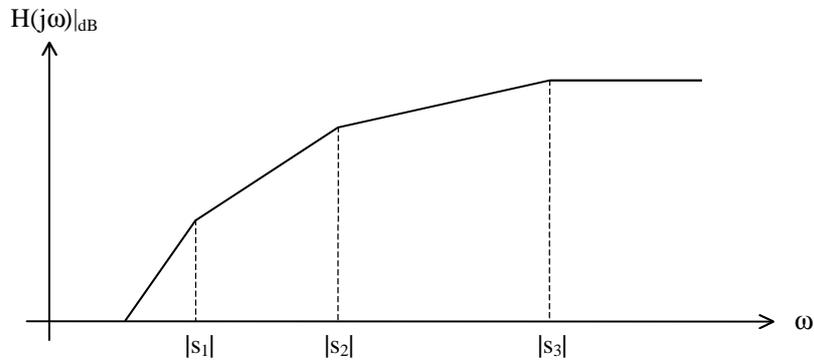


Figura 5. Diagrama de Bode de un circuito con tres polos y tres ceros.

Si bien la (22) se obtuvo suponiendo que $|s_n| \gg |s_i|$, es válida también cuando los polos son relativamente próximos entre sí. En efecto, como la parte real de todos los polos es negativa (pues suponemos que el circuito es estable) se verifica que

$$\left| \sum_{i=1}^n s_i \right| > |s_n|$$

Por otra parte

$$\omega_{\text{inf}} > |s_n|,$$

dado que los polos cercanos a s_n reducen el módulo de la función de transferencia, haciendo que la caída de 3 dB se produzca a mayor frecuencia. De las desigualdades anteriores es razonable concluir que en general vale la aproximación

$$\left| \sum_{i=1}^n s_i \right| \cong \omega_{\text{inf}} \quad (23)$$

y por lo tanto también la (22).

Para acotar el error cometido nuevamente considere86remos el peor caso, que se da cuando todos los polos coinciden. Así, para n polos en $-\omega_0$, se calcula fácilmente que

$$\omega_{\text{inf}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}},$$

mientras que la aproximación (21) da un valor

$$\omega_{\text{inf}} = n \omega_0 .$$

En la tabla siguiente se muestran los errores para algunos valores de n (todas las cifras se dan con dos cifras decimales).

n	ω_{inf} exacto	ω_{inf} aproximado	Error
2	1,55 ω_0	2 ω_0	29 %
3	1,96 ω_0	3 ω_0	53 %
4	2,30 ω_0	4 ω_0	74 %
5	2,59 ω_0	5 ω_0	93 %
10	3,73 ω_0	10 ω_0	168 %

Si bien los valores exacto y aproximado son los recíprocos de los correspondientes a las frecuencias superiores de corte, se puede apreciar que los errores relativos son mayores (¿por qué?). De todas maneras, conviene insistir en que un circuito real rara vez tiene sus polos tan próximos, de modo que en la práctica la aproximación es mucho mejor. Si repetimos el ejemplo 1 intercambiando los capacitores y las resistencias, el valor real es $\omega_{\text{inf}} = 5,147/RC$, y el aproximado $6/RC$, es decir un 17 % más alto, error mucho menor que el 53 % correspondiente al peor caso. Destaquemos que en este caso la aproximación es por exceso, lo cual implica en el caso de un amplificador que en realidad éste es mejor que lo estimado.

Esta aproximación puede generalizarse al caso en que los ceros sean no nulos, con la condición de que sean mucho menores que ω_n . Si los ceros están demasiado próximos, en general no vale.

2.4. CIRCUITOS CON FRECUENCIAS SUPERIOR E INFERIOR DE CORTE

Hasta ahora hemos analizado redes que tenían solamente frecuencia superior de corte (circuitos sin ceros) o frecuencia inferior de corte (circuitos con igual cantidad de polos y ceros). En los circuitos que tienen ambas frecuencias de corte, es decir con una respuesta frecuencial como la de la fig. 6 (caracterizados por tener más polos que ceros), no resulta posible aplicar directamente las aproximaciones (20) y (22). En efecto, si s_1 es el menor de todos los polos, el mismo razonamiento que conduce a la (20) permite concluir que

$$|s_1| = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \tau_{i0}}$$

sólo que ahora

$$|s_1| < \omega_{\text{inf}} \ll \omega_{\text{sup}},$$

de modo que $1/\Sigma\tau_{i0}$ no es una buena aproximación de ω_{sup} . Análogamente, si s_n es el polo más grande,

$$\omega_{\text{inf}} \ll \omega_{\text{sup}} < |s_n|,$$

por lo cual $\Sigma(1/\tau_{icc})$ tampoco sirve como aproximación de ω_{inf} .

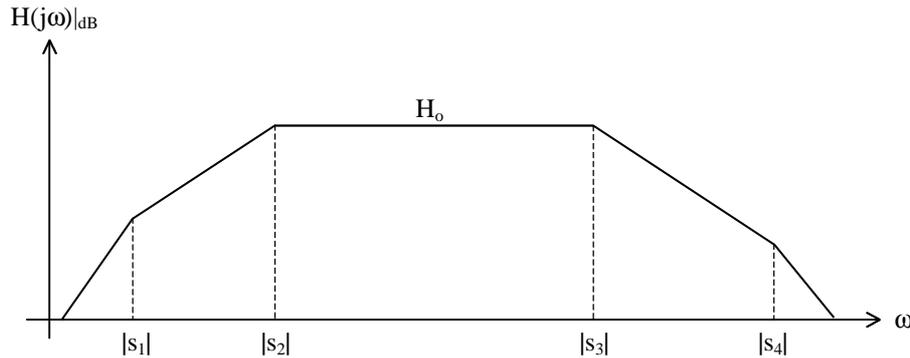


Figura 6. Diagrama de Bode de un circuito con cuatro polos y dos ceros.

En el caso de ω_{sup} , el motivo de esto está en que no se tuvieron en cuenta los ceros y la ecuación (20) es válida sólo si no hay ceros. En el caso de ω_{inf} , no se tuvieron en cuenta los ceros faltantes para que la cantidad de ceros y de polos fuera la misma.

Cuando $\omega_{\text{inf}} \ll \omega_{\text{sup}}$ es posible subsanar este inconveniente y a la vez simplificar aún más el problema. Para ello observemos primero que hay dos grupos de polos: los polos de baja frecuencia, que en combinación con los ceros dan origen a la frecuencia inferior de corte, y los polos de alta frecuencia, que definen la frecuencia superior de corte.

Por lo general los polos de baja frecuencia son creados por los mismos capacitores que producen los ceros⁴, y es fácil identificarlos porque cumplen funciones de acoplamiento o desacoplamiento de corriente alterna. Entre éstos se encuentran los capacitores que vinculan las etapas de un amplificador de corriente alterna, y los que cortocircuitan la resistencia de emisor en la polarización de un transistor. Al cortocircuitar estos capacitores, se eliminan simultáneamente los ceros y los polos de baja frecuencia, quedando únicamente los de alta frecuencia. Entonces puede aplicarse la aproximación (20).

Obsérvese que se está utilizando una forma híbrida de (20), ya que en el cálculo de las constantes de tiempo, algunos capacitores se abren pero otros se cortocircuitan, y además la suma se extiende sólo a los de alta frecuencia. Si C_1, \dots, C_{h-1} son los capacitores que gobiernan el comportamiento en frecuencias bajas y C_h, \dots, C_n los correspondientes a frecuencias elevadas, entonces (20) toma la forma

⁴ Aunque no siempre es así. Ver la NOTA al final del ejemplo que sigue.

$$\omega_{\text{sup}} \cong \frac{1}{\sum_{i=h}^n \tau_{i0}'}, \quad (24)$$

donde

$\tau_{i0}' =$ Constante de tiempo con C_j cortocircuitado para $j = 1, \dots, h-1$ y abierto para $j = h, \dots, n, j \neq i$.

Para determinar la frecuencia inferior de corte se utiliza un procedimiento similar. En ese caso se abren todos los capacitores de alta frecuencia (es decir, los que no encuadren dentro de los analizados anteriormente) y luego se utiliza la correspondiente forma híbrida de (22):

$$\omega_{\text{inf}} \cong \sum_{i=1}^{h-1} \frac{1}{\tau_{icc}'}, \quad (25)$$

donde

$\tau_{icc}' =$ Constante de tiempo con C_j cortocircuitado para $j = 1, \dots, h-1, j \neq i$, y abierto para $j = h, \dots, n$,

La clave de este tipo de análisis está en la posibilidad de asociar algunos capacitores a la respuesta en alta frecuencia y otros a la respuesta en baja frecuencia.

EJEMPLO 2

La red RC elemental de la fig. 7 ilustra este procedimiento. En este caso hay un polo de baja y otro de alta frecuencia. Por simple inspección se verifica que C_1 está ubicado como acoplamiento, y por consiguiente controla las bajas frecuencias. Cortocircuitándolo se obtiene el circuito de alta frecuencia sobre el cual se determinará la única

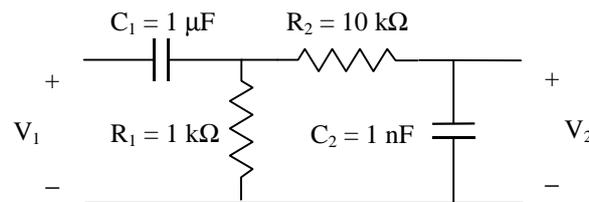


Figura 7. Red RC pasaaltos y pasabajos del ejemplo 2.

constante de tiempo en circuito abierto, que es la vista por C_2 (en este caso al no haber otros capacitores para abrir, la constante de tiempo en circuito abierto ¡resulta ser en realidad en cortocircuito!). Se obtiene $\tau_{20}' = R_2 C_2 = 10 \mu\text{s}$. En forma análoga, resulta $\tau_{1cc}' = R_1 C_1 = 1 \text{ ms}$. De aquí resulta fácilmente

$$f_{\text{sup}} = 15,915 \text{ kHz} \quad (\text{valor exacto: } 15,932 \text{ kHz})$$

$$f_{\text{inf}} = 159,15 \text{ Hz} \quad (\text{valor exacto: } 158,99 \text{ Hz})$$

El error es de alrededor de un 0,1% en ambos casos, con un esfuerzo de cálculo mucho menor. Nuevamente los errores tienden a reducir la banda de paso respecto al valor real, por lo cual el comportamiento real es más extenso que lo estimado.

NOTA: Si los valores de las resistencias y de los capacitores se hubieran intercambiado (es decir $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 1 \text{ nF}$ y $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$), C_1 seguiría siendo el que determina la existencia del cero, pues se encuentra en el camino directo de la señal. Pero en cambio sería C_2 el responsable del primer polo, es decir el que cancela el efecto del cero. En este caso debería cortocircuitarse C_2 para obtener la frecuencia superior de corte y abrirse C_1 para determinar la frecuencia inferior de corte.

2.5. INFLUENCIA DE LAS CONSTANTES DE TIEMPO INDIVIDUALES

A partir de las ecuaciones (18) y (19) no es difícil caer en la tentación de buscar una correspondencia entre constantes de tiempo y polos específicos. Esta pretensión es vana en general, ya que queda claro que dichas ecuaciones expresan igualdades entre sumas y de ninguna manera entre términos de esas sumas. Sin embargo, en muchos casos es posible al menos individualizar qué componentes tienen mayor efecto sobre las frecuencias de corte, lo cual permitiría por ejemplo, variar dichos componentes a fin de ajustar la respuesta deseada. En el siguiente ejemplo se muestra esta situación sobre la determinación de la respuesta en baja frecuencia de una etapa a transistor.

EJEMPLO 3

Consideremos la etapa amplificadora a transistor que se muestra en la fig. 8 (a). El transistor tiene $h_{fe} = 200$ y $h_{ie} = 2,6 \text{ k}\Omega$, y los otros parámetros pueden despreciarse.

En la fig. 8 (b) se indica el modelo en pequeña señal, en el cual se ha pasivado la única fuente independiente (el generador de señal) a fin de calcular las constantes de tiempo en cortocircuito que se requieren para aplicar (22). La única resistencia en cortocircuito que ofrece una mínima dificultad es la vista por C_2 , ya que en los otros casos la fuente dependiente no influye. Los valores calculados son

$$\tau_{1cc} = (2,3 \text{ k}\Omega) C_1 = 23 \text{ ms}$$

$$\tau_{2cc} = (13 \text{ }\Omega) C_2 = 1,3 \text{ ms}$$

$$\tau_{3cc} = (3 \text{ k}\Omega) C_3 = 30 \text{ ms.}$$

Dado que

$$\omega_{\text{inf}} \cong \frac{1}{\tau_{1cc}} + \frac{1}{\tau_{2cc}} + \frac{1}{\tau_{3cc}}, \quad (26)$$

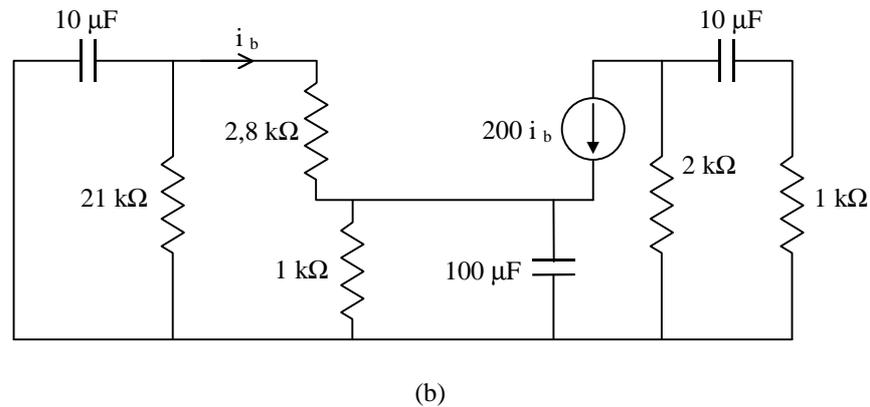
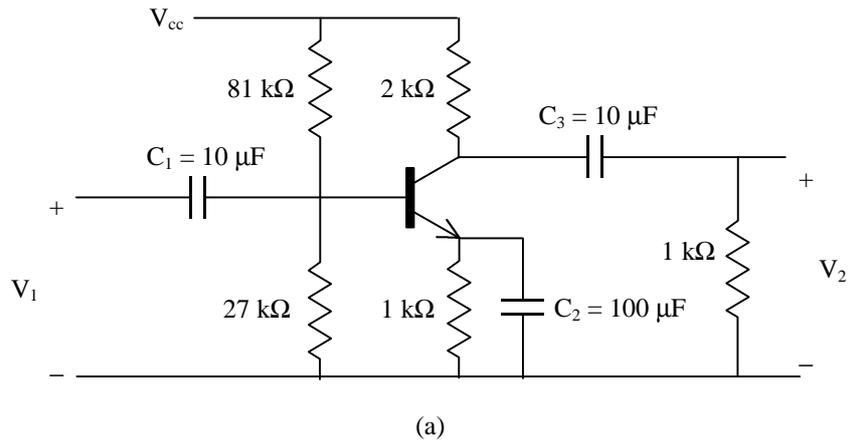


Figura 8. Determinación de la respuesta en frecuencia de una etapa amplificadora. (a) Diagrama circuital. (b) Modelo en pequeña señal.

resulta evidente que τ_{2cc} , por ser mucho menor que las otras, es la que más incide en el valor final de la frecuencia de corte; ello se debe al pequeño valor de R_{2cc} . Con las cifras anteriores, la frecuencia inferior de corte resulta ser de 135 Hz, valor demasiado alto para determinadas aplicaciones (como por ejemplo en audio).

Para ilustrar mejor la potencia de esta forma de análisis, veamos cómo permite proponer y evaluar mejoras en la respuesta en las bajas frecuencias de esta etapa. Supongamos que queremos una frecuencia inferior de 20 Hz. Una primera solución sería aumentar uno o más capacitores. La ecuación (26), reescrita explicitando los capacitores,

$$\omega_{\text{inf}} \cong \frac{1}{2,3 \text{ k}\Omega C_1} + \frac{1}{13 \Omega C_2} + \frac{1}{3 \text{ k}\Omega C_3}, \quad (27)$$

muestra que aún aumentando C_1 ó C_3 infinitamente, la mejoría lograda sería escasa, de modo que es más lógico aumentar C_2 . Realizados los cálculos resulta un valor de $C_2 = 1540 \mu\text{F}$. Aumentando también C_1 y C_3 , C_2 puede reducirse hasta unos $650 \mu\text{F}$,

pero este valor resulta aún inconvenientemente alto. La ecuación (27) indica que el problema se origina en el pequeño valor de R_{2cc} , que viene dado por

$$R_{2cc} = R_e // \frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}} \cong \frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}}.$$

Esta resistencia puede aumentarse agregando una resistencia en serie con el capacitor o bien con el emisor, como se indica en la figura 9. Esta solución implica la existencia de cierta realimentación en alterna que reducirá la ganancia considerablemente.⁵ El nuevo valor de R_{2cc} será

$$R_{2cc} = R_{e2} // \left(\frac{h_{ie}}{1 + h_{fe}} + R_{e1} \right).$$

Puede conservarse la polarización original tomando

$$R_{e1} + R_{e2} = 1 \text{ k}\Omega.$$

Dado que $R_{e2} \gg R_{e1}$, R_{2cc} se puede aproximar por

$$R_{2cc} = 13 \Omega + R_{e1}.$$

Adoptando $R_{e1} = 82 \Omega$, y sin modificar C_1 ni C_3 , se logra $C_2 = 210 \mu\text{F}$. Si se incrementan C_1 y C_3 a $47 \mu\text{F}$, el valor original de C_1 ($100 \mu\text{F}$) resultará suficiente para lograr que $f_{inf} = 20 \text{ Hz}$.

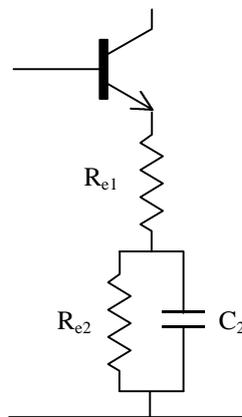


Figura 9. Intercalación de una resistencia degenerativa para aumentar la resistencia vista por el capacitor C_2 .

⁵ En realidad es precisamente debido a esta reducción de ganancia que se logra reducir la frecuencia inferior de corte. En efecto, al realimentar un sistema con un polo y un cero, tanto la ganancia como la frecuencia inferior de corte disminuyen en igual proporción: $1 + a\beta$. Si hay más de un polo y un cero, aunque la proporción ya no es la misma, siguen reduciéndose ambas.

Notemos que si en lugar de lo que hicimos hubiéramos calculado la respuesta frecuencial exacta del circuito, incluyendo todos sus parámetros, muy probablemente habríamos encontrado una expresión sumamente complicada en la cual sería casi imposible deducir qué parámetros son significativos y cuáles no.

Lo anterior muestra que el método que estamos comentando *no sólo es un enfoque para simplificar el cálculo de la respuesta en frecuencia*, sino que además constituye una potente herramienta de análisis que permite identificar las causas principales de dicha respuesta. De ese modo, es posible una comprensión más intuitiva de los circuitos, lo cual resulta sumamente útil para resolver con éxito las dificultades que se presentan en el diseño. En este sentido puede compararse al método sistemático de análisis de amplificadores realimentados.

3. MODELOS DEL TRANSISTOR BIPOLAR EN ALTA FRECUENCIA

Estudiaremos algunos modelos del transistor válidos para su operación en alta frecuencia. Comenzaremos con el modelo π , el cual relacionaremos con el modelo cuadripolar de parámetros híbridos h , con el doble propósito de establecer los límites de aplicación de este último, y de encontrar expresiones que permitan obtener algunos parámetros del modelo π a partir del h , dado que el modelo h tiene amplia difusión en las hojas de especificaciones de los transistores.

3.1. EL MODELO HÍBRIDO π DEL TRANSISTOR

En la figura 10 (b) se muestra el modelo híbrido h del transistor conectado en su configuración de emisor común, indicada en la parte (a) de dicha figura.

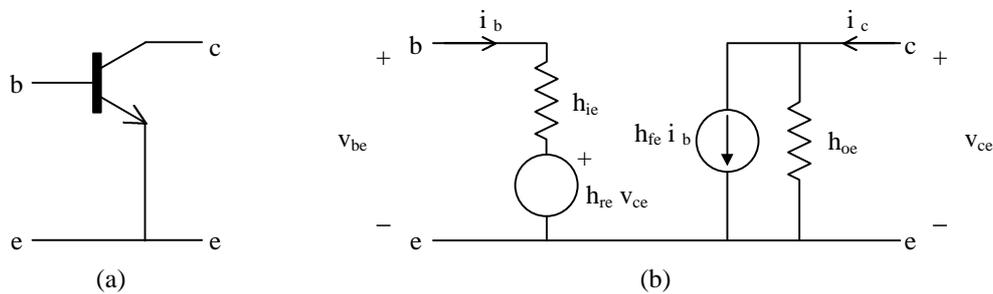


Figura 10. (a) Transistor bipolar en configuración emisor común. (b) Modelo híbrido del transistor (parámetros h).

Este es un modelo cuadripolar en pequeña señal cuyos parámetros h_{ie} , h_{re} , h_{fe} y h_{oe} permiten relacionar las variables de entrada y salida a través del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v_{be} &= h_{ie} i_b + h_{re} v_{ce} \\ i_c &= h_{fe} i_b + h_{oe} v_{ce} \end{aligned} \quad (28)$$

Los parámetros h tienen la ventaja de que son fáciles de medir en forma directa o indirecta⁶ y describen al transistor bastante bien en baja frecuencia. Por esta razón se ha popularizado su inclusión en las hojas de datos de los transistores. Sin embargo, adolecen de algunos defectos que les restan valor para ciertas aplicaciones. En primer lugar, dependen fuertemente de varias condiciones de funcionamiento tales como el punto de polarización, la temperatura y la frecuencia, y las respectivas leyes de variación no admiten una representación matemática sencilla. Esto se debe a que los parámetros del modelo de la figura 10 (b) no tienen una relación demasiado directa con los fenómenos físicos dentro del transistor. En segundo lugar, más allá de unas pocas decenas de kHz los parámetros dejan de ser números reales y su variación con la frecuencia se hace muy ostensible, sin que su comportamiento sea fácil de modelizar por medio de elementos circuitales concentrados.

El modelo híbrido π , representado en la figura 11, permite superar las dificultades del modelo h . En primer lugar, cada componente refleja algún fenómeno físico dentro del transistor. En segundo lugar, los valores de los componentes pueden deducirse, en su

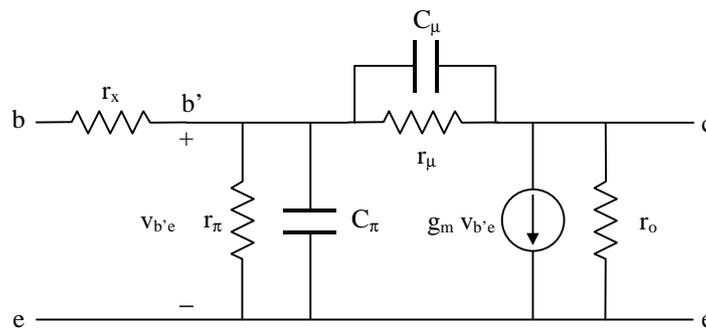


Figura 11. Modelo híbrido π del transistor

mayoría, de las condiciones de operación, o bien de datos de fabricación del dispositivo, a través de ecuaciones sencillas. En otros casos, pueden obtenerse también en forma simple a partir de valores fácilmente medibles. Por último, los parámetros del modelo híbrido π se mantienen razonablemente constantes con la frecuencia hasta frecuencias bastante altas, de modo que el modelo es un auténtico modelo circuital.

3.1.1. PARAMETROS DEL MODELO π

Estudiaremos a continuación los diferentes parámetros del modelo π , relacionándolos cuando sea posible, con los parámetros h . Los tres parámetros más fundamentales del modelo π son g_m , r_π y C_π . El valor de g_m puede obtenerse a partir de la ecuación de Ebers y Moll aproximada para polarización directa:

⁶ La medición indirecta se hace por determinación de las pendientes de las curvas estáticas. Por ejemplo, h_{fe} es la pendiente de la curva I_c vs. I_b en un punto de trabajo especificado.

$$I_c = I_s e^{V_{b'e}/V_t}, \quad (29)$$

donde I_s es la corriente de saturación, y V_t la tensión térmica dada por $V_t = kT/q$, siendo $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann, T , la temperatura absoluta y $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, la carga del electrón. Derivando (29) respecto a $V_{b'e}$ se obtiene

$$g_m = \frac{\partial I_c}{\partial V_{b'e}} = \frac{I_c}{V_t} \quad (30)$$

Así, g_m resulta ser un parámetro físico, completamente independiente de la frecuencia y del tipo de transistor (y por consiguiente de su geometría y dimensiones). Sólo depende de la temperatura y de la corriente de polarización. Obsérvese que esto es válido porque g_m amplifica la tensión desarrollada en la juntura propiamente dicha, es decir $V_{b'e}$, y no la tensión base-emisor, que incluye una caída de tensión óhmica adicional (debida a r_x).

La resistencia r_π , por simple comparación con el modelo h en baja frecuencia, resulta ser

$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{h_{fe} V_t}{I_c} \quad (31)$$

Se observa que r_π , a través de h_{fe} , depende fuertemente del tipo de transistor, y hasta de la unidad particular, de allí que no se pueda obtener sin un conocimiento directo de h_{fe} (ya sea a través de las especificaciones o de su medición, o estimándola). Obsérvese especialmente que aunque h_{fe} varía con la frecuencia, y hasta se vuelve un número complejo, ello no ocurre con r_π , ya que la ecuación (31) *sólo es válida en baja frecuencia*.

La capacidad C_π está directamente vinculada a los procesos físicos que tienen lugar en la base. Tiene dos componentes, cada una de las cuales responde a un mecanismo diferente:

$$C_\pi = C_b + C_{je}. \quad (32)$$

C_b refleja el fenómeno de difusión de portadores (inyectados desde el emisor) en la base. Esto demora cierto tiempo que es asimilable al proceso de carga de dicho capacitor. Viene dado por

$$C_b = t_f g_m = \frac{t_f I_c}{V_t} \quad (33)$$

donde t_f es el tiempo de tránsito directo (forward) de los portadores en la base, es decir el tiempo medio que demora un portador en cruzar la base. En cuanto a C_{je} , aparece por el hecho de que en la juntura base-emisor se genera una zona de carga espacial de distinto signo a uno y otro lado de la unión. El valor de la carga acumulada varía con la tensión aplicada. En polarización directa, esta capacidad adquiere un valor máximo cerca de la tensión con que se polariza la base. De todas maneras, dicho valor, que puede estimarse en 1 pF, se puede despreciar en general, y trabajar con la aproximación

$$C_\pi = t_f g_m. \quad (34)$$

Dado que t_f es un parámetro físico del transistor imposible de medir en forma directa, es interesante disponer de alguna expresión que permita determinar C_π a partir de algún dato experimental de fácil obtención. Dicho dato es la **frecuencia de transición**, f_T , definida como aquella frecuencia a la cual el módulo de la ganancia de corriente con la salida en cortocircuito se hace 1, es decir

$$|h_{fe}(f_T)| = 1. \quad (35)$$

En la próxima sección veremos que

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_\mu)}, \quad (36)$$

de donde, teniendo en cuenta que $C_\pi \gg C_\mu$, resulta

$$C_\pi = \frac{g_m}{2\pi f_T}. \quad (37)$$

Pasemos ahora a los restantes parámetros. La resistencia de salida r_o es la resistencia incremental del colector con la juntura base-emisor en cortocircuito, es decir:

$$r_o = \frac{1}{\partial I_c / \partial V_{ce}}. \quad (38)$$

En la figura 12 se muestran las curvas de I_c vs. V_{ce} , junto con la extrapolación de la zona activa de cada curva hasta llegar a $I_c = 0$. Se observa el interesante hecho de que todas las prolongaciones se intersectan aproximadamente en un mismo valor de tensión $-V_A$, donde V_A es la llamada tensión de Early, cuyo valor suele estar entre 50 y 100 V y es constante para cada transistor. De aquí puede obtenerse por simple semejanza de triángulos la pendiente de cada curva:

$$\frac{\partial I_c}{\partial V_{ce}} = \frac{I_c}{V_A}$$

de donde resulta

$$r_o = \frac{V_A}{I_c}. \quad (39)$$

En conclusión, la resistencia de salida disminuye al aumentar la corriente de colector.

Por último, si despreciamos r_μ , obtenemos la siguiente relación entre r_o y h_{oe} , nuevamente, válida en baja frecuencia:

$$r_o = \frac{1}{h_{oe}}, \quad (40)$$

que permite calcular r_o a partir de los datos del modelo h en baja frecuencia.

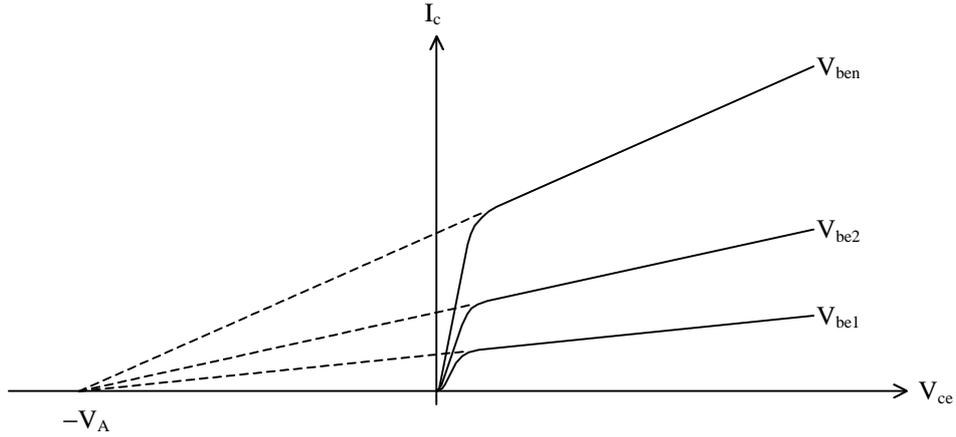


Figura 12. Tensión de Early V_A .

La capacidad C_μ es la capacidad de la zona de carga espacial, que por estar la juntura de base-colector polarizada inversamente⁷ puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$C_\mu = \frac{C_{\mu 0}}{\sqrt{1 + \frac{V_{cb'}}{\psi_0}}} \quad (41)$$

donde ψ_0 es la barrera interna de potencial, o potencial que se genera en la juntura en ausencia de polarización externa (es del orden de 600 mV), y $C_{\mu 0}$ es el valor que asume C_μ en ausencia de polarización. El valor de C_μ es en general pequeño, pudiendo despreciarse frente a C_π cuando ambas capacidades van sumadas.

La resistencia r_μ entre colector y base puede estimarse a través de la desigualdad

$$r_\mu > 10 h_{fe} r_o, \quad (42)$$

aunque su valor puede obtenerse con mayor precisión si se conoce h_{re} . La expresión, que se obtiene aplicando la definición cuadripolar de h_{re} en el modelo π , es:

$$r_\mu = \left. \frac{v_{be}}{v_{ce}} \right|_{i_b=0} = \frac{r_\pi}{h_{re}}. \quad (43)$$

Finalmente, la resistencia extrínseca de base, r_x , es la resistencia óhmica de la base. Depende algo de la frecuencia, aunque su valor es en general más pequeño que r_π , por lo cual puede despreciarse hasta frecuencias relativamente altas, es decir, mientras la reactancia que ofrece C_π no se reduzca hasta hacerse comparable con r_x . Se puede determinar por medio de

⁷ La fórmula es válida hasta una tensión directa de $\psi_0/2$, razón por la cual la capacidad correspondiente de la juntura base-emisor no se puede calcular con esta fórmula.

$$r_x = h_{ie} - r_\pi. \quad (44)$$

Debe tenerse en cuenta que dado que h_{ie} y r_π son de valor parecido, cualquier error en alguna de ellas o en ambas implica un error mucho mayor en r_x , aunque si ello ocurre, es porque $r_x \ll r_\pi$, y entonces r_x podría despreciarse sin ocasionar errores importantes.

3.1.2. LIMITACIONES DE LOS MODELOS h Y π

El modelo híbrido h se especifica por lo general con valores reales, lo cual significa que su validez se extenderá hasta aquellas frecuencias en las cuales la componente imaginaria no provoque un error importante, lo cual, desde luego, depende de la aplicación. En términos generales podemos suponer que el modelo es válido cuando la componente imaginaria no supera el 10% de la componente real.

A fin de aplicar este criterio, calculemos primero los parámetros h utilizando el modelo π . Resulta

$$h_{fe} = \frac{g_m r_\pi}{1 + r_\pi // r_\mu (C_\pi + C_\mu) s} \quad (45)$$

$$h_{ie} = \frac{r_\pi // r_\mu}{1 + r_\pi // r_\mu (C_\pi + C_\mu) s} + r_x \quad (46)$$

$$h_{oe} = g_m \frac{r_\pi}{r_\pi + r_\mu} \frac{1 + r_\mu C_\mu s}{1 + r_\pi // r_\mu (C_\pi + C_\mu) s} + \frac{1}{r_o} \quad (47)$$

$$h_{re} = \frac{r_\pi}{r_\pi + r_\mu} \frac{1 + r_\mu C_\mu s}{1 + r_\pi // r_\mu (C_\pi + C_\mu) s} \quad (48)$$

Vemos que la frecuencia f_β , dada por

$$f_\beta = \frac{1}{2\pi r_\pi (C_\pi + C_\mu)}, \quad (49)$$

es la frecuencia de corte de la ganancia de corriente en cortocircuito, es decir donde $|h_{fe}|$ cae 3 dB. Se denomina **frecuencia de corte β** , y generalmente puede aproximarse por

$$f_\beta = \frac{1}{2\pi r_\pi}, \quad (50)$$

Teniendo en cuenta que $r_x \ll r_\pi$, f_β representa también la frecuencia a la cual h_{ie} cae 3 dB respecto de su valor en corriente continua.

De acuerdo al criterio enunciado precedentemente, la validez de los parámetros h_{fe} y h_{ie} sólo se extendería hasta alrededor de $f_\beta/10$. Sin embargo, en los casos en los que sólo interese el módulo, el error cometido en esa frecuencia será del 0,5%, lo cual puede ser innecesariamente preciso, especialmente considerando los errores por dispersión de los valores especificados en las hojas de datos. En $f_\beta/2$ el error en el módulo será de apenas un 12%, y aún llegando hasta f_β los resultados serán bastante aceptables para muchas aplicaciones.

En cuanto a h_{re} y h_{oe} , ambas expresiones contienen un cero correspondiente a una frecuencia $1 / 2\pi r_\mu C_\mu \ll f_\beta$. Esto implica que h_{re} y h_{oe} comienzan a crecer ya a frecuencias relativamente bajas, en general del orden de unas pocas decenas de kHz. Como los valores en corriente continua de estos parámetros son pequeños, podría creerse que aun a frecuencias mayores que $1 / 2\pi r_\mu C_\mu$ los errores introducidos no son importantes. Sin embargo, para valores muy altos de resistencia de carga el aumento temprano de h_{oe} puede introducir grandes errores inclusive a frecuencias mucho menores que f_β . Esta, situación suele darse en las etapas en emisor común con carga activa (fuente de corriente), típicas de muchos circuitos integrados.

Resumiendo, el modelo h real puede considerarse válido con toda seguridad hasta $1 / 2\pi r_\mu C_\mu$. A partir de allí, según las aplicaciones su validez puede llegar a extenderse hasta f_β .

La ecuación (45) puede utilizarse para calcular la frecuencia de transición, reemplazando s por $j\omega$ y haciendo $|h_{fe}(j\omega)| = 1$. Se obtiene

$$f_T = \frac{g_m r_\pi}{2\pi r_\pi // r_\mu (C_\pi + C_\mu)}, \quad (51)$$

O bien, considerando que $r_\pi \ll r_\mu$,

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi (C_\pi + C_\mu)}, \quad (52)$$

ecuación que ya utilizamos en (36). Es importante observar que realmente el modelo híbrido π no es válido hasta f_T , debido a causas que pronto examinaremos. Por ello no debe sorprender que al medir efectivamente la frecuencia a la cual $|h_{fe}(j\omega)| = 1$ se obtenga un valor distinto del que predice esta ecuación.

Sin embargo, las ecuaciones (51) y (52) son lo suficientemente útiles como para llevar a redefinir f_T de modo que las mismas resulten válidas. Para ello se considera f_T como la frecuencia a la cual la extrapolación de la asíntota de h_{fe} (y no la propia h_{fe}) se vuelve 1. Esto tiene la ventaja de que permite todavía una medición bastante directa. En efecto, basta medir $|h_{fe}|$ a una frecuencia f_1 varias veces mayor que f_β (por ejemplo 10 veces), y entonces dado que sobre la asíntota vale

$$|h_{fe}(j2\pi f)|.f = \text{constante}$$

(por ser un polo esencialmente de primer orden), se obtiene

$$f_T = |h_{fe}(j2\pi f_1)| \cdot f_1 \quad (53)$$

En muchas hojas de datos, efectivamente se suministra $|h_{fe}|$ a cierta frecuencia bastante elevada en lugar de dar f_T . En la fig. 13 se muestra la gráfica de $|h_{fe}|$ en función de la frecuencia.

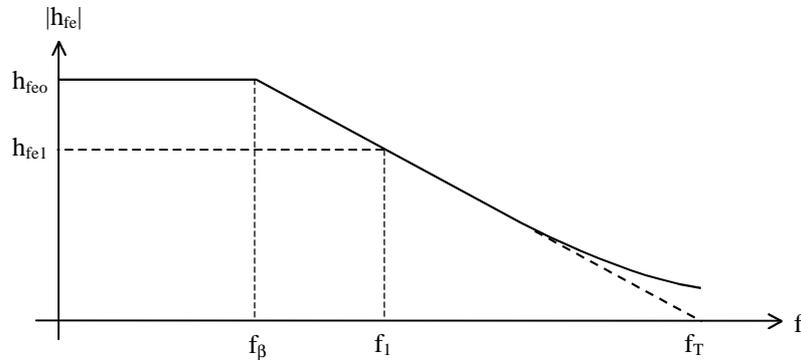


Figura 13. Determinación indirecta de f_T .

El modelo híbrido π deja de ser válido en alguna frecuencia intermedia entre f_β y f_T , debido a dos hechos. El primero es la inevitable existencia de unas capacidades parásitas o extrínsecas entre cada par de terminales del transistor que no se tuvieron en cuenta en el modelo de la figura 11. El segundo hecho es que a muy altas frecuencias la base no puede modelizarse por medio de elementos de circuito con parámetros concentrados, sino que se comporta más bien como una línea de transmisión con parámetros distribuidos. En la figura 14 se muestra un modelo circuital aproximado que podría utilizarse hasta frecuencias más altas. Una mejor aproximación podría conseguirse si se sustituyen r_x y C_{be} por una escalera RC, que aproximen mejor la cualidad de línea

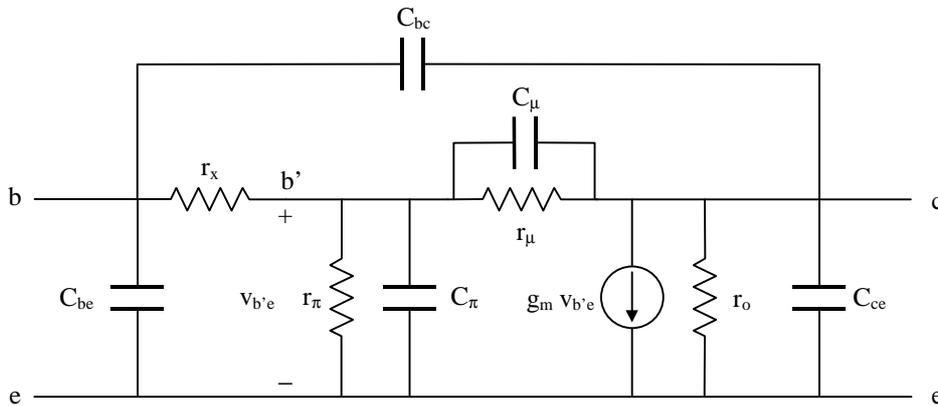


Figura 14. Modelo híbrido π con el agregado de capacidades extrínsecas para extender su aplicabilidad a frecuencias altas.

de transmisión que presenta la base. Este modelo es demasiado complejo para su utilización práctica, salvo en los programas de simulación para computadora.

Si se prescinde de las capacidades extrínsecas, se encuentra que el modelo híbrido π es válido hasta la denominada **frecuencia de corte transversal**, f_b , dada por la fórmula

$$f_b = \frac{1}{2\pi r_x // r_\pi (C_\pi + C_\mu)}. \quad (54)$$

Normalmente es $r_x \ll r_\pi$ y $C_\pi \gg C_\mu$, de manera que se puede aproximar por

$$f_b \cong \frac{1}{2\pi r_x C_\pi}. \quad (55)$$

Comparando con la (50), vemos que $f_b \gg f_\beta$, lo cual muestra claramente la superioridad del modelo π sobre el h.

Uno de los mayores inconvenientes del modelo π se encuentra en la dificultad para medir con gran exactitud algunos de sus parámetros (como r_x , C_μ , r_μ), y esto es una limitación práctica que, en efecto, obstaculiza su empleo generalizado para cálculo de circuitos. A pesar de ello, sigue siendo una herramienta teórica de inigualable potencial para evaluar la respuesta de diversos circuitos. Así, muchas de las características de los circuitos integrados lineales pueden predecirse por medio de este modelo. De hecho, a diferencia del modelo h (y también del y) es un modelo circuital, cuyos elementos son componentes circuitales estándar, como resistencias, capacitores y fuentes dependientes reales.

3.1.3. SIMPLIFICACIONES DEL MODELO π

Según el rango de frecuencias, es posible simplificar el modelo π a través de algunas aproximaciones. Para ello notemos que siempre se verifica que

$$r_\pi C_\pi \ll r_\mu C_\mu. \quad (56)$$

Entonces, para frecuencias menores que $1 / 2\pi r_\mu C_\mu$ se pueden despreciar ambos capacitores, obteniéndose un sencillo modelo independiente de la frecuencia. Para una frecuencia f comprendida en la banda

$$\frac{1}{2\pi r_\mu C_\mu} = f = \frac{1}{2\pi r_\pi C_\pi}$$

puede despreciarse r_μ , ya que la reactancia de C_μ predomina en el paralelo. Finalmente, para $f > 1 / 2\pi r_\pi C_\pi$, se pueden despreciar las dos resistencias r_π y r_μ , ya que entonces predominan ambos capacitores. Sin embargo, en este rango de frecuencias caben las limitaciones ya comentadas. Estas aproximaciones son útiles porque permiten trabajar con circuitos equivalentes más sencillos.

3.1.4. EJEMPLO DE APLICACION DEL MODELO π

En el siguiente ejemplo veremos una aplicación del modelo π utilizando el teorema de las constantes de tiempo.

EJEMPLO 4

Consideremos el circuito de la figura 8, en el cual supondremos que $h_{fe0} = 200$, $f_T = 100$ MHz, $V_A = 50$ V, $C_{\mu} = 2$ pF, $r_x = 50 \Omega$ y que la polarización es tal que $I_c = 2$ mA. Buscamos determinar la frecuencia superior de corte cuando el generador tiene una resistencia $R_g = 1$ k Ω . Para ello, aplicando las consideraciones de la sección 2.4. cortocircuitamos los capacitores de acoplamiento y de desacoplamiento, dado que están vinculados con el grupo de polos y ceros de baja frecuencia. Quedan en cambio los capacitores del modelo π . Aplicando las ecuaciones y aproximaciones de la sección 3.1.1., el circuito equivalente resulta ser el que se muestra en la fig. 15. Observemos que dado que $r_{\mu} = 50$ M Ω , la hemos despreciado.

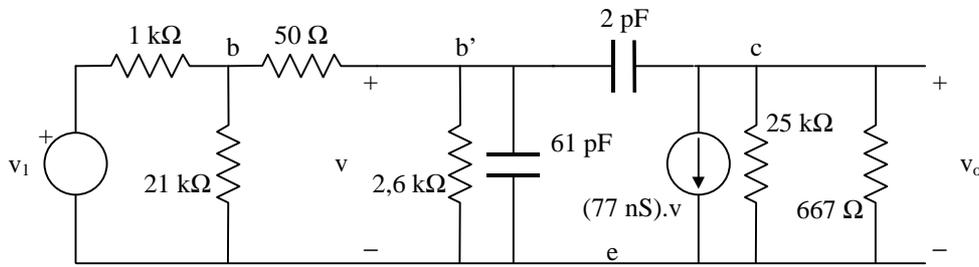


Figura 15. Modelo en señal del amplificador del ejemplo 4.

Llamemos

$$R_1 = (R_g // R_b + r_x) // r_{\pi} = 725 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = R_c // R_1 // r_o = 650 \Omega ,$$

donde $R_b = 21 \text{ k}\Omega$ y $R_c // R_1 = 667 \Omega$. Podemos aproximar la frecuencia (superior) de corte f_{sup} por

$$f_{\text{sup}} = \frac{\omega_{\text{sup}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi(\tau_{\pi o} + \tau_{\mu o})}, \quad (57)$$

donde

$$\tau_{\pi o} = R_{\pi o} \cdot C_{\pi o},$$

$$\tau_{\mu o} = R_{\mu o} \cdot C_{\mu o}.$$

Abriendo C_μ , la resistencia vista desde C_π es simplemente $R_{\pi o} = R_1$. Para obtener la resistencia vista por C_μ al abrir C_π , excitamos con una fuente de corriente de prueba I

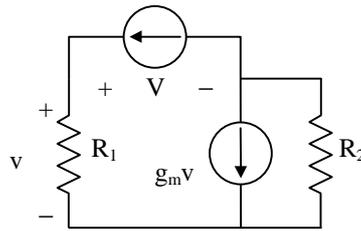


Figura 16. Cálculo de la resistencia vista por C_μ .

y calculamos la tensión V , como se muestra en la figura 16. Resulta:

$$R_{\mu o} \cong V/I = R_1 + (1 + R_1 g_m) R_2 .$$

Reemplazando, se tiene

$$f_{\text{sup}} = 1,33 \text{ MHz} .$$

Resulta un valor bastante pequeño comparado con f_T , pero si se considera que en f_T el transistor deja de tener ganancia de corriente, es lógico esperar que la máxima ganancia se mantenga sólo hasta una frecuencia bastante menor que f_T .

3.2. EL MODELO y DEL TRANSISTOR

Vimos en la sección anterior que el modelo π es un modelo circuital, lo cual implica que pueden aplicarse con ventaja técnicas convencionales de análisis y resolución de circuitos. En particular, se puede utilizar el teorema de las constantes de tiempo para estimar la frecuencia de corte de un amplificador a transistores. Pero precisamente por ser un modelo circuital con parámetros concentrados, no permite una representación demasiado exacta del comportamiento de un dispositivo de naturaleza distribuida como el transistor, especialmente en la región de las altas frecuencias.

Si a lo anterior se agrega la dificultad para medir los parámetros del modelo en forma directa, se concluye que el modelo π pierde utilidad en alta frecuencia (por encima de f_b). Los modelos cuadripolares, en cambio, por no estar atados a una representación circuital con elementos estándar, y porque los cuatro parámetros que caracterizan unívocamente su comportamiento son relativamente fáciles de medir con exactitud, no presentan estos inconvenientes. Tal como se señaló para el caso del modelo h , los parámetros medidos dependen de las condiciones de operación como el punto de polarización, la temperatura, y especialmente la frecuencia. A primera vista esto parece constituir un inconveniente ya que sería necesario especificar los parámetros en numerosas condiciones para caracterizar el funcionamiento del transistor en forma más o menos completa. Sin embargo, en general las aplicaciones de alta frecuencia suelen ser de banda angosta y en frecuencias bastante definidas, razón por la cual bastaría especificar los

parámetros de los transistores en dichas frecuencias (por ejemplo, a la frecuencia intermedia de TV). De hecho, la mayoría de los transistores de alta frecuencia se fabrican para aplicaciones específicas, y por lo tanto con rangos de frecuencia establecidos, y los parámetros se dan para esas frecuencias.

De los seis posibles juegos de parámetros cuadripolares, el que resulta más cómodo de medir en alta frecuencia es el juego de parámetros y (admitancia), que da origen al modelo pseudocircuitual⁸ de la figura 16.

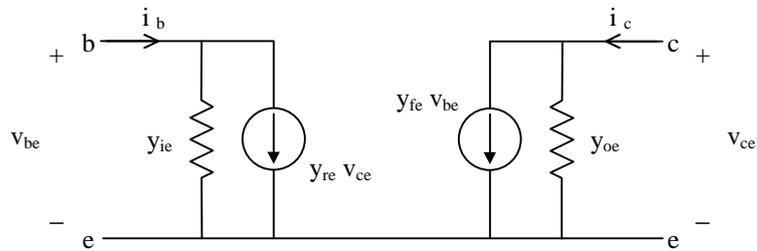


Figura 16. Modelo y de un transistor bipolar

Los parámetros y_{ie} , y_{re} , y_{fe} e y_{oe} permiten vincular las variables de entrada y salida a través del sistema de ecuaciones

$$i_b = y_{ie} V_{be} + y_{re} V_{ce} \quad (58)$$

$$i_c = y_{fe} V_{be} + y_{oe} V_{ce}.$$

Lo más usual en las hojas de datos es encontrar los parámetros expresados a una o más frecuencias de interés. A veces los parámetros se suministran en módulo y fase, y otras veces se da la parte conductiva y la capacitiva. Si el subíndice x representa cualquiera de los cuatro parámetros y , entonces se tiene por definición

$$y_x = g_x + j\omega C_x. \quad (59)$$

En algunos casos, en los que además del valor a determinada frecuencia ω_0 es esencial la forma en que varían los parámetros alrededor de dicha frecuencia (como en el análisis de osciladores o de amplificadores sintonizados), se puede obtener un desarrollo de Taylor de primer grado (o mayor, si fuere necesario), de la forma

$$y_x = g_x + g_x'(\omega - \omega_0) + j\omega C_x + j(\omega - \omega_0) C_x'. \quad (60)$$

Los valores de g_x' y de C_x' se pueden determinar si se conoce y_x en ω_0 y en otra frecuencia próxima, por ser simplemente las pendientes de las gráficas de la parte real e imaginaria de y_x respectivamente.

Aplicando las correspondientes definiciones de los parámetros que surgen de este sistema, pueden calcularse en forma directa los parámetros y a partir del modelo híbrido

⁸ Lo consideramos un modelo "pseudocircuitual" porque sus elementos no representan componentes estándar como resistencias, capacitores, y fuentes controladas independientes de la frecuencia.

π . Dado que trabajaremos en alta frecuencia, despreciaremos la resistencia r en todos los casos. Se obtiene

$$y_{fe} = g_m \frac{r_\pi}{r_x + r_\pi} \frac{1}{1 + r_\pi // r_x (C_\pi + C_\mu) s} \quad (61)$$

$$y_{ie} = \frac{1}{r_x + r_\pi} \frac{1 + r_\pi (C_\pi + C_\mu) s}{1 + r_\pi // r_x (C_\pi + C_\mu) s} \quad (62)$$

$$y_{oe} = \frac{1}{r_o} + g_m \frac{1 + r_\pi (C_\pi + C_\mu) s}{1 + r_\pi // r_x (C_\pi + C_\mu) s} \quad (63)$$

$$y_{re} = \frac{r_\pi // r_x}{r_x r_\mu} \frac{1 + r_\mu C_\mu s}{1 + r_\pi // r_x (C_\pi + C_\mu) s} \quad (64)$$

De (61), vemos que la frecuencia de corte de y_{fe} resulta ser la frecuencia de corte transversal dada en (54) como el límite de validez del modelo π . Estas relaciones permiten, entre otras cosas, determinar algunos de los parámetros del modelo π a partir de medidas de los parámetros y . Así, por ejemplo, a partir de (61) se puede calcular r_x en alta frecuencia, teniendo en cuenta que entonces podemos aproximar

$$y_{fe} \cong g_m \frac{1}{r_x (C_\pi + C_\mu) s}$$

Recordando la ecuación (52), se obtiene

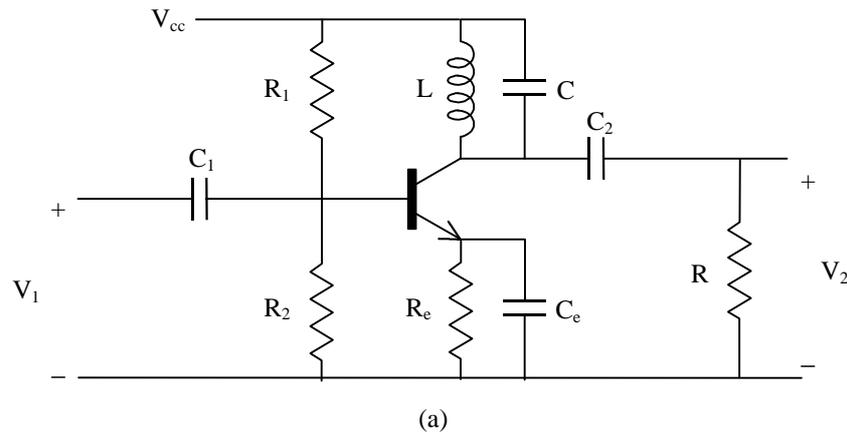
$$r_x = \frac{f}{|y_{fe}(f)| f_T} \quad (65)$$

Dado que (61) es válida sólo hasta f_b , a los fines de esta fórmula y_{fe} debe medirse a una frecuencia $f < f_b$.

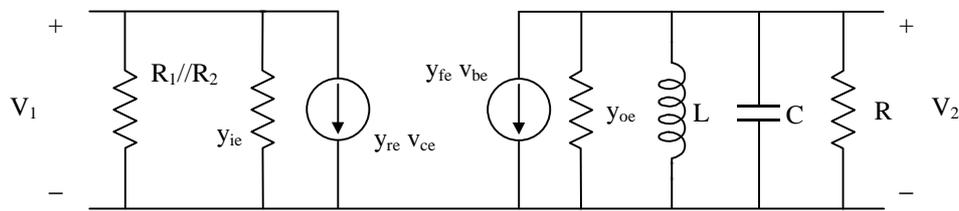
3.2.1. UN EJEMPLO: EL AMPLIFICADOR SINTONIZADO

Los amplificadores sintonizados son circuitos muy útiles cuando es necesario amplificar señales comprendidas en un rango muy estrecho de frecuencias, requiriéndose al mismo tiempo atenuar toda otra señal fuera de dicha banda. Los amplificadores de frecuencia intermedia de los receptores superheterodinos constituyen un ejemplo de dicha situación. Debido a lo elevado de la frecuencia de operación de estos amplificadores, es conveniente utilizar el modelo π para los transistores que intervienen en ellos. En la figura 17 (a) se muestra un amplificador sintonizado de una etapa que utiliza un circuito

tanque RLC en el colector, y en la fig. 17 (b) se muestra el circuito equivalente para alta frecuencia que utiliza el modelo y del transistor. Si para simplificar suponemos que el



(a)



(b)

Figura 17. (a) Amplificador sintonizado. (b) Su modelo y.

generador de señal V_1 es ideal, entonces ni $R_1//R_2$, ni y_{ie} , ni la fuente dependiente $y_{re} V_{ce}$ tienen ningún efecto. Entonces, por cálculo directo se obtiene

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{fe}}{1/R + y_{oe} + 1/j\omega L + j\omega C}$$

Si llamamos ω_0 a la frecuencia angular de resonancia, y si aproximamos y_{fe} e y_{oe} con un polinomio de Taylor de primer grado alrededor de ω_0 (aún desconocido), tendremos

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{fe} + g_{fe}'(\omega - \omega_0) + j\omega_0 C_{fe} + j(\omega - \omega_0)C_{fe}'}{1/R + g_{oe} + g_{oe}'(\omega - \omega_0) + j(\omega C - 1/\omega L + \omega_0 C_{oe} + (\omega - \omega_0)C_{oe}')}$$

Debido a que L y C son grandes, $\omega C - 1/\omega L$ varía mucho más rápidamente con ω que los otros parámetros, por lo que se puede suponer que la resonancia se verifica cuando la parte imaginaria del denominador se anula. Reemplazando ω por dicha frecuencia ω_0 se tendrá, entonces,

$$\omega_0 C - 1/\omega_0 L + \omega_0 C_{oe} = 0 ,$$

de donde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(C + C_{oe})L}} .$$

A esa frecuencia,

$$\left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{|y_{fe}|}{1/R + g_{oe}} .$$

Vemos cómo el modelo y nos permite llegar rápidamente a la frecuencia de resonancia y a la ganancia en resonancia. Con algo más de cálculos se podría obtener también el ancho de banda y la ganancia de potencia. El mismo cálculo realizado sobre el modelo π habría resultado extremadamente complejo, dejando de lado el hecho de que su exactitud quedaría limitada a frecuencias menores que f_b .

4. EL TRANSISTOR DE EFECTO DE CAMPO (FET) EN ALTA FRECUENCIA

En la figura 18 (a) se muestra un transistor de efecto de campo (field effect transistor, FET), y en la figura 18 (b) su modelo en pequeña señal. En él se pueden apreciar, además de los elementos usuales para baja frecuencia, es decir el generador de corriente controlado por la tensión entre compuerta (gate) y fuente (source) y la resistencia de salida, tres capacidades: C_{gs} , C_{gd} y C_{ds} . En los FETs integrados se agrega, además,

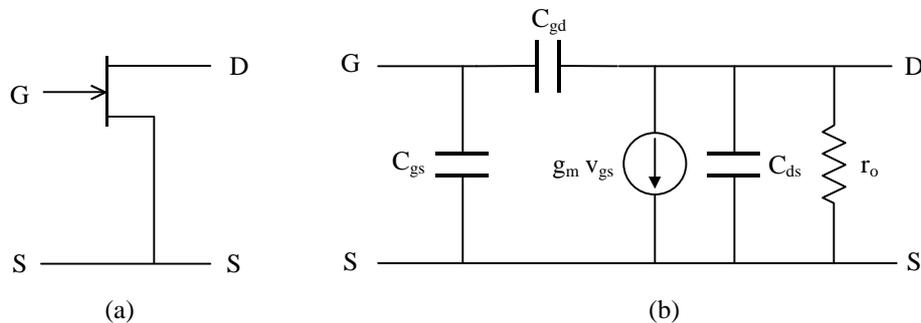


Figura 18. (a) Un FET. (b) Su modelo para altas frecuencias

una capacidad extrínseca entre la compuerta y el substrato. El valor de la transconductancia g_m puede calcularse a partir de la expresión aproximada del comportamiento en gran señal, es decir

$$I_d = I_{dss} \left(1 - \frac{V_{gs}}{V_p} \right)^2 , \quad (66)$$

donde V_p es la tensión de estrangulamiento (pinch-off) e I_{dss} es la corriente de drenaje para $V_{gs} = 0$. Esta expresión es válida cuando I_d alcanza la zona llamada de “saturación” (que no debe confundirse con la saturación de un transistor bipolar), es decir la zona de corriente aproximadamente constante. Para obtener g_m derivamos respecto a V_{gs} , resultando:

$$g_m = -2 \frac{I_{dss}}{V_p} \left(1 - \frac{V_{gs}}{V_p} \right) = -2 \frac{\sqrt{I_{dss} I_d}}{V_p} \quad (67)$$

Vemos que, a diferencia de lo que sucede con un transistor bipolar, en el caso del FET la transconductancia aumenta con la raíz cuadrada de la corriente (en este caso I_d , corriente del terminal drenador (drain)).

Para obtener r_o , tengamos primero en cuenta que la corriente en cortocircuito dada por (66) sólo es válida para bajos valores de V_{ds} . Al crecer V_{ds} , I_d también aumenta, y lo hace con pendiente $1/r_o$, de suerte tal que prolongando la recta de la zona de saturación hasta cortar el eje horizontal (eje de las V_{ds}) se obtiene un punto común a todas las corrientes, en forma similar a lo que ocurriría con el transistor bipolar (figura 12). Dicho valor, denominado V_A , es similar a la tensión de Early para el transistor bipolar, y su valor típico es de unos 100 V. Resulta, entonces, que

$$r_o = \frac{V_A}{I_d}. \quad (68)$$

Dado que en funcionamiento normal, entre drenaje y compuerta y entre fuente y compuerta existe una juntura polarizada inversamente, se tiene

$$C_{gd} = \frac{C_{gdo}}{\sqrt[3]{1 + \frac{V_{gd}}{\psi_o}}} \quad (69)$$

$$C_{gs} = \frac{C_{gso}}{\sqrt[3]{1 + \frac{V_{gs}}{\psi_o}}} \quad (70)$$

En lugar de la raíz cuadrada de la ecuación (41) aparece una raíz cúbica, debido a que este tipo de juntura es gradual. La capacidad C_{ds} es una capacidad entre electrodos, independiente de la polarización.

5. RELACION ENTRE RESPUESTA EN FRECUENCIA Y TRANSITORIA

La relación entre las respuestas en frecuencia y transitoria de un sistema es muy importante, especialmente porque del ensayo frecuencial es posible deducir el comportamiento transitorio y viceversa.

5.1. RESPUESTA AL ESCALON DE UN PASABAJOS DE PRIMER ORDEN

Consideremos un sistema (ya sea electrónico, mecánico, etc.) con un polo de primer orden, es decir

$$H(s) = \frac{a_0}{1 + s/\omega_0} \quad (71)$$

cuyo diagrama de Bode se muestra en la figura 19 (a). Si lo excitamos con un escalón

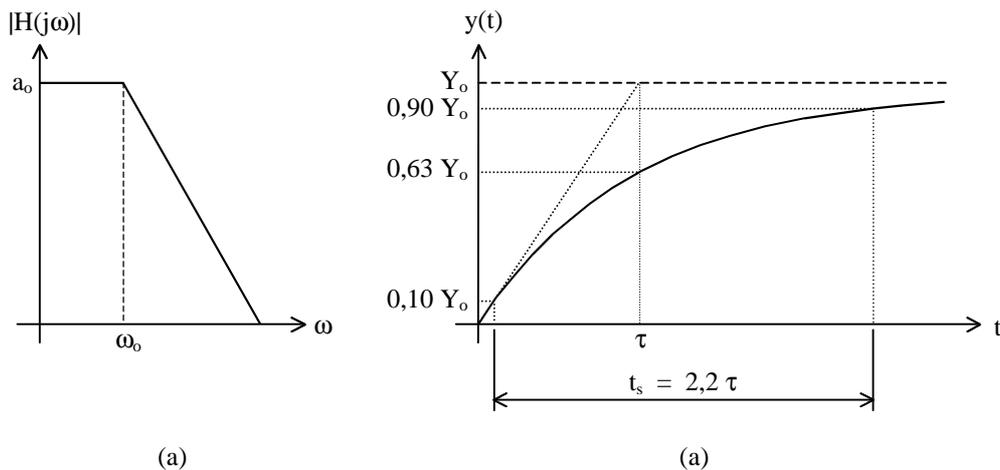


Figura 19. (a) Diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de un pasabajos de primer orden. (b) Su respuesta ante un escalón.

de amplitud X_0 :

$$x(t) = X_0 u(t), \quad (72)$$

la transformada de la respuesta será

$$Y(s) = \frac{a_0}{1 + s/\omega_0} \frac{X_0}{s}$$

Desarrollando en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{a_0 X_0}{s} - \frac{a_0 X_0}{s + \omega_0}$$

resulta fácil aplicar la transformación inversa de Laplace obteniéndose

$$y(t) = Y_0(1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (73)$$

donde $Y_0 = a_0 X_0$. Llamando **constante de tiempo** a

$$\tau = 1/\omega_0 \quad (74)$$

la (73) se puede escribir como

$$y(t) = Y_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (75)$$

forma muy utilizada porque permite una suerte de normalización de la respuesta relativa a la constante de tiempo.

La evolución de la respuesta se muestra en la figura 19 (b), en la cual se han indicado algunos de sus valores característicos y propiedades. En primer lugar para $t \rightarrow \infty$ la respuesta tiende al valor Y_0 , es decir la amplitud del escalón por la ganancia en continua. Otra particularidad es que la prolongación de la tangente al origen de la respuesta alcanza el valor final Y_0 en un tiempo igual a dicha constante de tiempo. En dicho tiempo la verdadera respuesta en realidad llega a un 63,2% de Y_0 . El tiempo de subida t_s es otro parámetro comúnmente utilizado para evaluar la respuesta a un escalón. Se lo define como el tiempo necesario para que la respuesta pase del 10 % al 90 % de su valor final. Para un sistema de primer orden, también está vinculado con la constante de tiempo, ya que vale

$$t_s = 2,20 \tau. \quad (76)$$

5.2. RESPUESTA AL ESCALON DE UN PASAALTOS DE PRIMER ORDEN

Consideremos ahora un sistema con un polo y un cero en el origen, es decir

$$H(s) = \frac{a_0 s}{s + \omega_0}. \quad (77)$$

En la figura 20 (a) se ha dibujado su diagrama de Bode. Si excitamos este sistema con un escalón como el de la ecuación (71) la transformada de la respuesta será

$$Y(s) = \frac{a_0 X_0}{s + \omega_0},$$

que corresponde a una respuesta

$$y(t) = Y_0 e^{-\omega_0 t}, \quad (78)$$

o bien

$$y(t) = Y_0 e^{-t/\tau}, \quad (79)$$

cuya evolución se ilustra en la fig. 20 (b), con valores característicos correspondientes a los ya descriptos para el caso anterior. Se observa que las propiedades de ambas respuestas son similares.

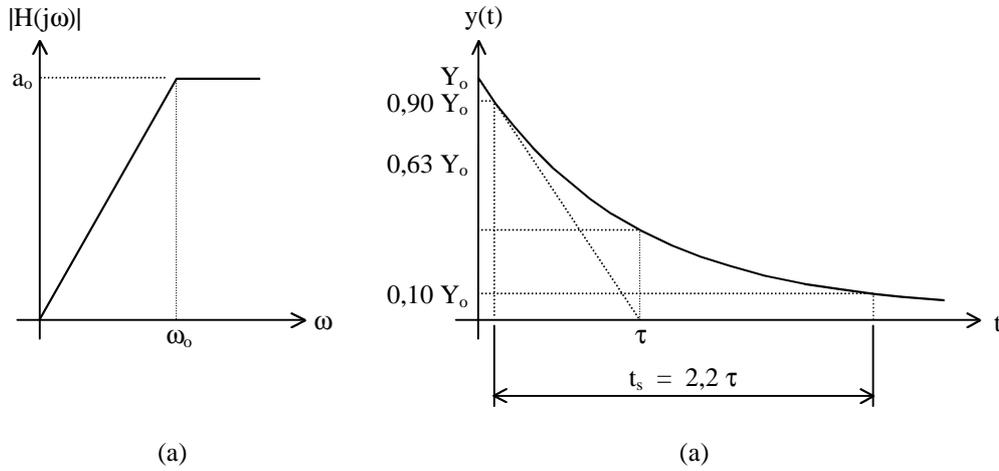


Figura 20. (a) Diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de un pasaltos de primer orden. (b) Su respuesta ante un escalón.

5.3. RESPUESTA AL ESCALON DE UN PASABANDA DE PRIMER ORDEN

Consideremos ahora un sistema cuya función de transferencia es el producto de las dos funciones analizadas previamente, es decir

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{a_0 s / \omega_{inf}}}{(\mathbf{1 + s / \omega_{inf}})(\mathbf{1 + s / \omega_{sup}})}, \quad (80)$$

donde ω_{inf} es la frecuencia (angular) inferior de corte y ω_{sup} la superior. Supondremos además que

$$\omega_{inf} < \omega_{sup} .$$

En la figura 21 se ha trazado el diagrama de Bode correspondiente a este tipo de sistema. Nuevamente excitaremos el sistema con un escalón como el de la ecuación (72). La transformada de la respuesta será ahora

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{\mathbf{a_0 X_0 / \omega_{inf}}}{(\mathbf{1 + s / \omega_{inf}})(\mathbf{1 + s / \omega_{sup}})},$$

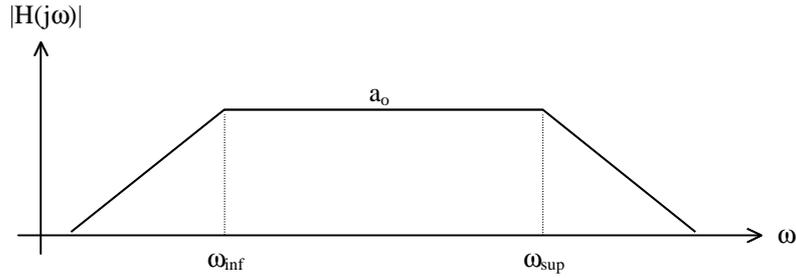


Figura 21. Diagrama de Bode de un pasabanda de primer orden.

que, desarrollada en fracciones simples, es

$$Y(s) = \frac{a_0 X_0 \omega_{\text{sup}}}{\omega_{\text{sup}} - \omega_{\text{inf}}} \left(\frac{1}{s + \omega_{\text{inf}}} - \frac{1}{s + \omega_{\text{sup}}} \right).$$

Aplicando la transformación inversa resulta

$$y(t) = \frac{a_0 X_0 \omega_{\text{sup}}}{\omega_{\text{sup}} - \omega_{\text{inf}}} \left(e^{-\omega_{\text{inf}} t} - e^{-\omega_{\text{sup}} t} \right). \quad (81)$$

Analicemos primero el caso en que

$$\omega_{\text{sup}} \gg \omega_{\text{inf}} \quad (82)$$

Entonces vale la aproximación

$$y(t) \cong a_0 X_0 \left(e^{-\omega_{\text{inf}} t} - e^{-\omega_{\text{sup}} t} \right). \quad (83)$$

o bien, en términos de las constantes de tiempo τ_{inf} y τ_{sup} ,

$$y(t) \cong a_0 X_0 \left(e^{-t/\tau_{\text{inf}}} - e^{-t/\tau_{\text{sup}}} \right). \quad (84)$$

Debido a (82), $\tau_{\text{inf}} \gg \tau_{\text{sup}}$. Estudiaremos el comportamiento de cada exponencial para tiempos pequeños y grandes. Si $t \ll \tau_{\text{inf}}$, la primera exponencial es aproximadamente igual a 1, de modo que (84) puede a su vez aproximarse por

$$y(t) \cong a_0 X_0 (1 - e^{-t/\tau_{\text{sup}}}) \quad (85)$$

que coincide con (75). De manera que poco después del escalón, la respuesta se comporta tal como lo haría un pasabajos de frecuencia (angular) de corte ω_{sup} , es decir co-

mo si el cero y el polo de baja frecuencia no existieran. De un modo intuitivo (aunque poco riguroso), se puede considerar que el flanco muy rápido del escalón corresponde a frecuencias muy altas, por lo cual s es grande y entonces en (79)

$$\frac{\mathbf{a}_0 \mathbf{X}_0 / \omega_{\text{inf}}}{(1 + s/\omega_{\text{inf}})(1 + s/\omega_{\text{sup}})} \cong \frac{\mathbf{a}_0}{1 + s/\omega_{\text{sup}}},$$

Si ahora $t \gg \tau_{\text{sup}}$, la segunda exponencial de (84) se aproxima a 0, por lo que

$$\mathbf{y}(t) \cong \mathbf{a}_0 \mathbf{X}_0 e^{-t/\tau_{\text{inf}}}. \quad (86)$$

que coincide con (79). Esto significa que mucho después del flanco, la respuesta corresponde a la de un pasabanda con frecuencia (angular) de corte ω_{inf} , o lo que es lo mismo, el sistema se comporta como si el polo de alta frecuencia no existiera. Intuitivamente, el comportamiento para tiempos mucho mayores que τ_{sup} corresponde a frecuencias mucho menores que ω_{sup} , y entonces s/ω_{sup} puede despreciarse en (80). Luego vale la aproximación

$$\frac{\mathbf{a}_0 \mathbf{X}_0 / \omega_{\text{inf}}}{(1 + s/\omega_{\text{inf}})(1 + s/\omega_{\text{sup}})} \cong \frac{\mathbf{a}_0 s / \omega_{\text{inf}}}{1 + s/\omega_{\text{inf}}},$$

Todo esto indica que la separación en bandas de frecuencias bajas y altas en forma casi independiente que tiene lugar en la respuesta en frecuencia cuando $\omega_{\text{inf}} \ll \omega_{\text{sup}}$ también se manifiesta en la respuesta transitoria. En la figura 22 se representa la respuesta al escalón típica. Se observa que antes de que la primera exponencial (con constante de tiempo τ_{inf}) comience a bajar apreciablemente, ya se extinguió la otra (con constante τ_{sup}).

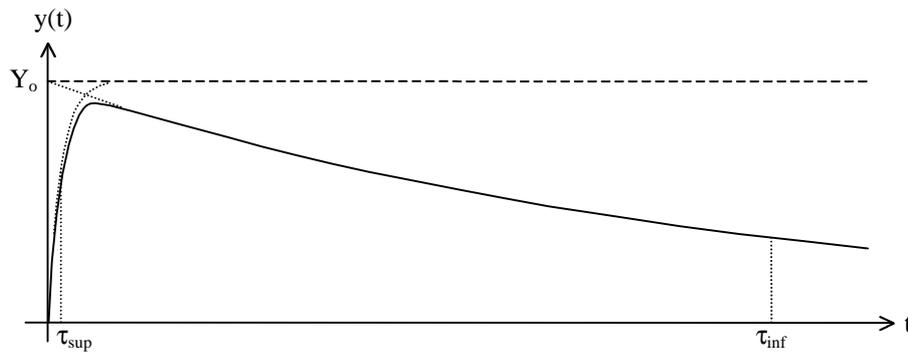


Figura 22. Respuesta temporal ante un escalón de un pasabanda cuyas frecuencias de corte están muy alejadas.

Por último, si ω_{inf} no es mucho menor que ω_{sup} , entonces (81) no admite simplificaciones y por consiguiente ambas exponenciales tienen importancia en todo momento, obteniéndose una respuesta como la indicada en la fig. 23, alcanzando un máximo menor que Y_o .

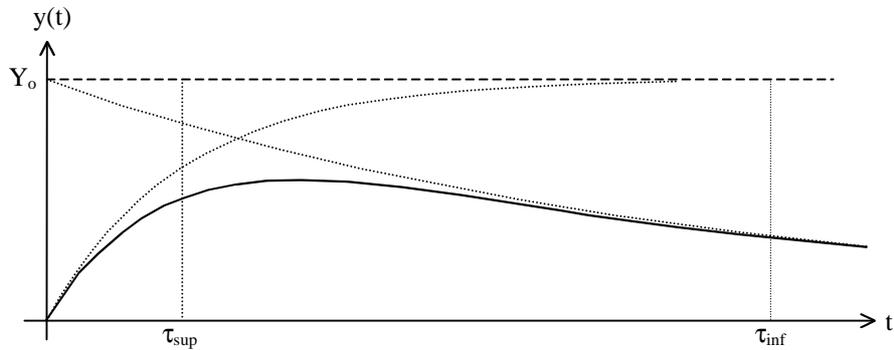


Figura 23. Respuesta temporal ante un escalón de un pasabanda cuyas frecuencias de corte están relativamente próximas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Searle, C. - Boothroyd, A. - Angelo E. (Jr) - Gray, P. - Pederson, D., "Propiedades de Circuito Elementales de los Transistores". Tomo 3 de la serie SEEC, Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1971.
- [2] Thornton, R. - Searle, C. - Pederson, D. - Adler, R. - Angelo E. (Jr), "Circuitos Multietapa de Transistores". Tomo 5 de la serie SEEC, Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1971.
- [3] Gray, P. - Meyer, R., "Analysis and Design of Analog Integrated Circuits". Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.
- [4] Millman, J. - Halkias, C., "Integrated Electronics". Ed. McGrawHill Kogakusha, Tokyo, 1972 (hay edición castellana).
- [5] Texas Instruments, "Preferred Semiconductors and Components from Texas Instruments". Dallas, 1968.
- [6] Motorola, "RF Device Data, Vol I, Vol II". 1988.
- [7] FAPESA, "Semiconductors and Integrated circuits, Part 3: High frequency transistors, Switching transistors, Accesories". 1971.

INDICE ALFABETICO

- Almacenadores de energía, 7
Amplificador sintonizado, 33
Amplificadores realimentados, 19
Ancho de banda, 34
- Barrera interna de potencial, 24
Bibliografía, 42
Bode, diagrama de, 4, 9, 36, 38, 39
- C_{π} , 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30
Capacitores, teorema de los, 8
 C_b , 22
 C_{ds} , 34, 36
Ceros, 2, 6, 8, 12, 14, 15, 29
 C_{gd} , 34
 C_{gs} , 34
Círculo tanque RLC, 33
 C_{je} , 22
Constantes de tiempo, 5, 7, 8, 11, 15, 17, 40
Constantes de tiempo en circuito abierto, 16
Constantes de tiempo teorema de las, 8, 29, 30
- Ecuación de Ebers y Moll, 21
Etapa a transistor, 17
- f_{β} , 25, 26, 27, 28
 f_b , 28, 31, 33, 34
FET, 34, 35
Frecuencia de corte β , 25
Frecuencia de corte transversal, 28, 32
Frecuencia de transición, 23, 26
Frecuencia inferior de corte, 12, 14, 15, 16, 18
Frecuencia intermedia de TV, 31
Frecuencia superior de corte, 9, 14, 15, 16, 29
 f_T , 23, 26, 27, 29, 30
Función de transferencia, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 39
- Ganancia de Potencia, 34
 g_m , 21, 22, 30, 35
- h_{fe} , 17, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27
 h_{ie} , 17, 20, 25, 26
 h_{oe} , 20, 23, 26
 h_{re} , 20, 24, 26
- Laplace, Transformación de, 2
- Modelo en pequeña señal, 17, 34
Modelo híbrido π , 21, 26, 27, 28, 32
Modelo híbrido h, 20, 25
Modelo y, 33
Modos naturales, 3
- Parámetros π , 28
Parámetros cuadripolares, 31
Parámetros h, 20, 21, 25
Pasaaltos de primer orden, 38
Pasabajos de primer orden, 37
Pasabanda de primer orden, 39
Polo dominante, 9
Polos, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 29
Polos de alta frecuencia, 15
Polos de baja frecuencia, 15
Polos múltiples, 3
- r_{π} , 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29
Red de rotación de fase, 11
Régimen libre, 3
Resistencia de salida, 23, 34
Resistencia extrínseca de base, 24
Resonancia, 34
Respuesta al escalón, 41
Respuesta en alta frecuencia, 16
Respuesta en baja frecuencia, 16, 17
Respuesta en frecuencia, 4, 5, 7, 11, 18, 19, 37, 38, 41
Respuesta transitoria, 41
 r_o , 23, 24, 29, 35
 r_x , 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32
- Tensión de Early, 23, 35
Teorema de los capacitores, 8
 t_f , 22
Tiempo de tránsito directo, 22
Tiempo de subida, 37
Transformación de Laplace, 2
Transformación inversa de Laplace, 2, 3, 37, 39
- V_A , 23, 24, 29, 35
- y_{fe} , 31, 32, 33, 34
 y_{ie} , 31, 33
 y_{oe} , 31, 34
 y_{re} , 31, 33

Comenzado 24/04/94
Primera edición 25/05/94