Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ingeniería Electrónica
Departamento de Electrónica

ELECTRÓNICA III

PROBLEMA RESUELTO DE ESTABILIDAD

AUTOR: Federico Miyara

REVISIÓN: Fernando A. Marengo Rodriguez

AÑO 2009

Riobamba 245 bis
2000 Rosario
Argentina

http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3
TEL 0341 4808543
FAX 0341 4802654

Código interno de publicación: B16.01
Primera edición: 2009
Publicado en Internet
Rosario, Argentina
Año 2009
http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/es-p-res.pdf

1. Enunciado

Un amplificador tiene 3 polos correspondientes a las frecuencias 1 MHz, 2 MHz y 10 MHz, y ganancia ajustable entre 0 y 1000 con un potenciómetro. Se desea realimentarlo para tener ganancia en continua de 20 y polos con igual parte real, estando los polos complejos a 45º del semieje real negativo.

2. Análisis del problema

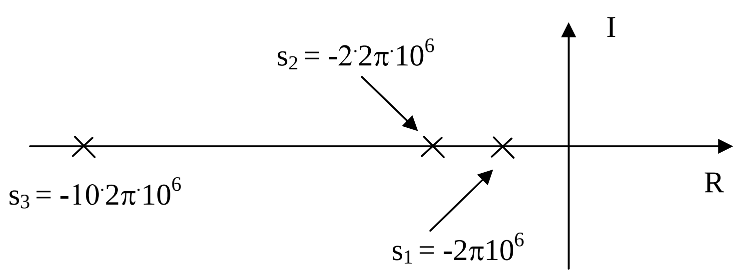
Para saber qué tipo de compensación conviene aplicar en este problema, se puede empezar por el caso más simple: red de realimentación puramente resistiva, es decir $\beta(s) = \beta_0$. En este caso, el lugar de las raíces posee tres ramas: una hacia el semieje real negativo y la otras dos hacia el semiplano complejo derecho con asíntotas a 60º del semieje real positivo (consultar el apunte de teoría para mayores detalles). Dada la potencial inestabilidad del sistema, elegiremos una compensación alternativa.

En el caso que se emplee una compensación con componente reactiva, es decir $\beta(s) = \beta_0\,(1 + T \cdot s)$, es posible ajustar el cero de la realimentación para estabilizar al sistema, logrando incluso buena estabilidad relativa e incluso una buena relación de compromiso entre ancho de banda y respuesta transitoria. Adoptaremos entonces este tipo de compensación para el presente problema.

3. Solución

Una posible solución sería trabajar con la variable $u = s\,/\,(2\pi 10^6)$, de forma que los polos del amplificador sin realimentar se ubiquen en las posiciones $p_{u1} = -1$, $p_{u2} = -2$ y $p_{u3} = -10$.

Otra forma de solucionar el problema es sin cambios de variable, partiendo del diagrama de polos y ceros del sistema sin realimentar como se ilustra a continuación.



La ganancia de dicho sistema es

$$a(s) = \frac{a_0}{(1 + s/s_1)\cdot(1 + s/s_2)\cdot(1 + s/s_3)} = \frac{a_0}{1 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3}\ ,$$

donde

$$a_1 = \frac{1}{s_{//}} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}\,; \quad a_2 = \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_2 s_3} + \frac{1}{s_1 s_3}\,; \qquad a_3 = \frac{1}{s_1 s_2 s_3}\,.$$

Numéricamente, la ganancia del amplificador en lazo abierto es la siguiente:

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + 2{,}546 \cdot 10^{-7} s + 1{,}646 \cdot 10^{-14} s^2 + 5{,}04 \cdot 10^{-23} s^3}\,.$$

Nota: En vista de que los coeficientes poseen órdenes de magnitud tan disímiles entre sí, se sugiere trabajar con literales para no acumular errores por redondeo y truncamiento.

Dado que los polos resultantes están sujetos a dos condiciones (igual parte real y 45º), será necesario disponer de dos grados de libertad a la realimentación, por lo que la red $\beta(s)$ queda restringida a poseer dos parámetros de ajuste: β_0 y T satisface en principio este requerimiento.

Al realimentar el amplificador con la red β de primer orden, se modifican solamente los coeficientes de grado 0 y 1 en el polinomio denominador de $a(s)$, quedando la siguiente ganancia para el amplificador realimentado.

$$A(s) = \frac{a_0}{1 + a_0\beta_0 + (a_1 + a_0\beta_0 T)\cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3}\,.$$

Debemos hallar a_0, β_0 y T para satisfacer las condiciones pedidas en el enunciado. Los polos del sistema resultante deben poseer estas expresiones:

$$p_1 = -r$$
$$p_2 = -r \cdot (1 + j)$$
$$p_3 = -r \cdot (1 - j)$$

Dado que el centro de masa de los polos $c = \dfrac{\sum polos - \sum ceros}{polos - ceros}$ depende de los coeficientes de orden 2 y 3, el mismo permanece constante, así que

$$p_1 + p_2 + p_3 = s_1 + s_2 + s_3 \Rightarrow -3r = -13 \cdot 2\pi \cdot 10^6\,,$$

resultando

$$r = 4{,}33 \cdot 2\pi \cdot 10^6\,.$$

El polinomio denominador de $A(s)$ debe coincidir con el polinomio cuyos ceros son los polos propuestos p_1, p_2 y p_3, y su coeficiente de mayor orden es igual al del denominador de $A(s)$. Matemáticamente esto se expresa así:

$$a_3(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot(s-p_3) = a_3(s+r)\cdot(s+r+jr)\cdot(s+r-jr) =$$
$$a_3\cdot(s+r)\cdot(s^2+2r\cdot s+r^2) = a_3\cdot\left[s^3+3rs^2+4r^2s+2r^3\right] =$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 10\cdot(2\pi 10^6)^3}\left[s^3+13\cdot 2\pi\cdot 10^6 s^2+4\cdot(4{,}33\cdot 2\pi\cdot 10^6)^2 s+2\cdot(4{,}33\cdot 2\pi\cdot 10^6)^3\right]$$

Nótese que se trabaja con el valor más preciso posible de cada parámetro en vista de sus órdenes de magnitud muy disímiles entre sí.

Igualando coeficientes entre los distintos polinomios denominador de $A(s)$, se obtiene que

$$1+a_0\beta_0 = 2a_3r^3 = 8{,}1183\,;$$

$$a_1+a_0\beta_0 T = 4a_3r^2 = 5{,}968\cdot 10^{-7}\,.$$

Por otro lado, como se requiere que la ganancia en continua sea 20, resulta

$$\frac{a_0}{1+a_0\beta_0} = 20\,.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se tiene finalmente que

$$a_0 = 162{,}3655\,;$$

$$\beta_0 = 0{,}0438\,;$$

$$T = 0{,}09417\ \mu\text{seg}\,.$$

4. Implementación circuital

Un posible caso de esta situación se da en el caso de un amplificador operacional (con los 3 polos mencionados en el enunciado) configurado como inversor. En esta situación, la red de realimentación $\beta(s)$ posee la siguiente transferencia:

$$\beta(s) = \frac{1}{Z_2} = Y_2\,,$$

donde Z_2 es la impedancia conectada entre la salida del A.O. y su entrada inversora. Para que la red de realimentación posea un cero, se necesita que Y_2 contenga parte imaginaria no nula, es decir:

$$Y_2 = G_2 + sB_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2\,,$$

con $R_2 = 1/\beta_0$ = 22,81 Ω, y C_2 = 4,13 nF. Esto se podría implementar con un resistor de 22 Ω y un capacitor de 3,9 nF, sufriendo el sistema realimentado una leve modificación en sus polos, sin riesgo de inestabilización (queda como ejercicio para el alumno el recálculo de estos parámetros).

El circuito resultante es el siguiente: