Régimen Estacionario

Práctica III: Magnetostática en el Vacío

1. $\bar{B}$ *y* $\bar{A}$ *de un cable infinito*

Considerar un cable infinito cilíndrico recto de sección circular de radio a que transporta una corriente de intensidad I.

1.a) Obtener el campo magnético $\bar{B}$ generado por el mismo en todo el espacio.

1.b) Obtener el potencial vectorial magnético $\bar{A}$ asociado al cable.

1.c) Representar $\bar{B}$ y $\bar{A}$ gráficamente.

2. *Dipolo magnético*

Se tiene una espira filiforme circular de radio a que transporta una corriente de intensidad I.

2.a) Calcular el momento magnético $\bar{m}$ asociado a la espira.

2.b) Obtener el potencial vectorial magnético $\bar{A}$ de la misma, a grandes distancias.

2.c) Obtener el campo magnético $\bar{B}$ generado por la espira, a grandes distancias.

2.d) Representar $\bar{B}$ y $\bar{A}$ gráficamente.

2.e) ¿Qué similitudes y diferencias se encuentran con el dipolo eléctrico?

3. $\bar{B}$ *sobre el eje de una espira circular*

3a) Calcular el campo magnético $\bar{B}$ sobre los puntos del eje de una espira filiforme circular de radio a por la que circula una corriente I. **3b)** Utilice el hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ para obtener uan expresión aproximada para B_r (la componente radial del campo magnético) que sea válida para puntos próximos al eje.

4. *Bobina de Helmholtz*

Las bobinas de Helmholtz se utilizan ampliamente para obtener campos magnéticos altamente uniformes. Son empleadas en gran variedad de experimentos de plasma, espectrómetros de masa y experimentos para determinar propiedades magnéticas de materiales. En particular, en el típico setup experimental de medición de la relación carga/masa del electrón, suele emplearse una bobina de Helmholtz.

La bobina de Helmholtz consiste en dos bobinas coaxiales de N vueltas, radio a y espesor despreciable, separadas una distancia $d = a$. Por cada vuelta de las bobinas circula una corriente I en el mismo sentido.

4.a) Verificar que si la distancia d de separación entre las bobinas es igual a sus radios a, entonces en el punto medio entre las bobinas a lo largo del eje tanto la derivada primera $\frac{dB_z}{dz}$ como la derivada segunda $\frac{d^2B_z}{dz^2}$ se anulan.

4.b) Determinar el valor de la componente axial del campo magnético B_z de la bobina de Helmholtz en el punto medio entre las bobinas a lo largo del eje.

4.c) Se tienen las dos bobinas coaxiales de N vueltas, radio a y separadas una distancia $d = a$, y en vez de hacer que la corriente circule en el mismo sentido en ambas bobinas, ¿qué sucederá con el campo magnético si se hace circular la corriente I en distintos sentidos en cada bobina? Tip: Quizás sea útil pensar en el análogo eléctrico.

5. *Segmento de un conductor con corriente. Espira cuadrada*

5a) Sea un segmento filiforme de longitud a que es parte de un circuito por el que circula una corriente I. Calcular el campo ΔB (que en realidad es una porción del campo total que genera el circuito, y por eso el Δ) que genera este segmento del circuito.

5b) Sea una espira cuadrada de lado a por la que circula una corriente I estacionaria. Calcule:

5b1) El momento dipolar magnético $\bar{m}$ de la espira.

5b2) El campo magnético generado por la espira a lo largo del eje que pasa por su centro.

6. *Partícula con carga en un campo magnético uniforme*

Una partícula de masa m y carga q entra en una región de campo magnético uniforme $\bar{B} = B_0\hat{e}_z$ con una velocidad inicial de módulo v_0 y cuya dirección forma un ángulo α con el campo $\bar{B}$:

6.a) Verificar que la trayectoria de la partícula es una hélice, cuya sección transversal es una circunferencia de radio $R = mv_0 \sin\alpha/qB_0$.

6.b) El Hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético se escribe:

$$H = \frac{1}{2m}\left[p - q\,\bar{A}(\bar{r},t)\right]^2 + q\,\varphi(\bar{r},t)$$

Y en particular en el caso de un campo magnético uniforme $\bar{B} = \bar{B}_0$ es posible escribir $\bar{A} = \frac{1}{2}\,\bar{B}_0 \wedge \bar{r}$, eligiendo el *gauge* de Coulomb y quedándose con una expresión simétrica de $\bar{A}$ para x e y. Trabajando la expresión es posible llegar a:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \underbrace{\frac{qB_0}{2m}(x\,p_y - y\,p_x)}_{\text{Término Paramagnético}} + \underbrace{\frac{q^2B_0^2}{8m}(x^2+y^2)}_{\text{Término Diamagnético}}$$

Mostrar que las ecuaciones de movimiento que pueden deducirse a partir de H, son compatibles con los resultados del punto **a)**.

7. *Dos cables paralelos*

Supongamos que por dos alambres paralelos, muy largos y separados por una distancia a, circulan corrientes de intensidades I_α e I_β.

7.a) En el caso en que las corrientes circulen en el mismo sentido, hallar la fuerza magnética sobre el segmento $d\ell$ del alambre β. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

7.b) En el caso en que las corrientes circulen sentidos opuestos, hallar la fuerza magnética sobre el segmento $d\ell$ del alambre β. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?

8. *Esfera con arrollamiento de alambres*

Sobre una esfera de madera de radio a se enrrolla un alambre muy delgado, dando N vueltas y cubriendo toda la superficie con una sola capa de hilo conductor. Los planos de las vueltas del alambre son perpendiculares al eje de la esfera. Por el alambre circula una corriente I.

8.a) Calcular el campo magnético $\bar{B}$ en el centro de la esfera.

8.b) ¿Cómo será el campo magnético $\bar{B}$ en puntos muy alejados de la esfera? Representar esquemáticamente las líneas de campo $\bar{B}$ a grandes distancias.

9. *Experimento de Rowland*

En 1876, el físico Henry Rowland llevó a cabo experimentos con discos cargados rotatorios a fin de verificar que cargas eléctricas en movimiento generan campos magnéticos, de manera equivalente a una corriente eléctrica.

9.a) Un anillo de radio R posee una carga Q distribuída uniformemente en su longitud. El anillo gira en torno a su eje con una velocidad angular ω. Determinar el campo magnético en los puntos del eje del anillo.

9.b) Calcular el valor del campo magnético en el mismo eje si ahora, en lugar de un anillo, se tiene un disco de radio R, con una carga Q distribuída en toda su superficie.

9.c) ¿Qué resultado esperarías obtener a grandes distancias en ambos casos **a)** y **b)**?

10. *Cambio de gauge para $\bar{A}$*

10.a) Mostrar por derivación directa de la ecuación $A(\bar{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \dfrac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\, dv'$, que $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$.

10.b) Dado un potencial vectorial magnético $\bar{A}$, mostrar que $\bar{A}' = \bar{A} + \overline{\nabla\psi}$ (donde ψ es una función arbitraria) es también un potencial vectorial magnético válido asociado al mismo campo $\bar{B}$ que $\bar{A}$.

10.c) Verificar que la selección apropiada de ψ permite que el potencial vectorial de **b** tenga cualquier divergencia que se desee.

11. *Solenoide finito y solenoide infinito*

11.a) A partir del resultado del problema 3, calcular el campo magnético sobre el eje para un solenoide finito de longitud L y radio a que tiene un gran número N de vueltas de alambre, por las que circula una corriente I.

11.b) Considerando ahora un solenoide muy largo (infinito), calcular el campo magnético en su interior como límite del apartado a), considerando que en todo el interio del solenoide el mismo es uniforme e igual al del eje del mismo.

11.c) Utilizando la ley de Ampere-Maxwell y con la suposición de uniformidad hecha anteriormente, calcular nuevamente el campo tanto dentro como fuera de un solenoide infinito de radio a.

11.d) Mostrar que el resultado del apartado **b-c)** coincide con el del punto **a)** para el caso $a/L \to 0$.

11.e) Demostrar que $\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = \Phi$, donde Φ es el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito C. Utilizar esto y el resultado del apartado **b)** para encontrar $\bar{A}$ en regiones afuera ($\varrho > a$) y adentro ($\varrho < a$) de un solenoide muy largo. Comprobar que $\bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B}$.

12. $\varphi^\star$ *de un cable infinito*

12.a) Mostrar que el campo magnético externo $\bar{B}$ de un cable filiforme infinito y recto que transporta una corriente de intensidad I, se puede deducir del potencial escalar en coordenadas cilíndricas $\varphi^\star = -\frac{I\,\vartheta}{2\pi}$, y que $\varphi^\star$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi^\star$. ¿Por qué no es $\varphi^\star$ un armónico cilíndrico, como sería en el caso para el potencial electrostático de una línea de carga?

12.b) ¿Cómo es el potencial vectorial magnético $\bar{A}$ asociado al cable? Representar $\bar{B}$ y $\bar{A}$ gráficamente.

13. $\varphi^\star$ *de una espira circular*

13.a) Mostrar que el potencial escalar magnético para un punto del eje z de una espira circular de radio a, está dado por $\varphi^\star(\bar{r} \in \text{eje } z) = \frac{1}{2}I\,(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}})$.

13.b) Desarrollar esta fórmula según el teorema del binomio para obtener una expresión en serie válida para $z/a \ll 1$.

13.c) El potencial escalar magnético $\varphi^\star$ deberá satisfacer la ecuación de Laplace. Además, por simetría, $\varphi^\star = \varphi^\star(r, \theta)$, donde r es la distancia del centro de la espira al punto del campo y θ es el ángulo entre $\bar{r}$ y el eje z. Mostrar que utilizando los armónicos esféricos se puede obtener una solución para $\varphi^\star$ que se reduce al potencial obtenido en **b)** sobre el eje de simetría.

13.d) Utilizar el $\varphi^\star$ obtenido en **c)** para hallar B_r y B_θ en puntos que no estén en el eje de simetría de la espira.