Análisis Numérico

Primer cuatrimestre 2022

Introducción a la descomposición SVD

Outline

Outline

SVD

Teorema (Descomposición SVD)

Sea A una matriz real $m \times n$ con $m \geq n$. Entonces $A = USV^t$ donde

- U es $m \times n$ con $U^t U = Id$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$
- V es $n \times n$ con $V^t V = Id$
- $S = \text{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ es $n \times n$, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

SVD

Teorema (Descomposición SVD)

Sea A una matriz real $m \times n$ con $m \geq n$. Entonces $A = USV^t$ donde

- U es $m \times n$ con $U^t U = Id$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$
- V es $n \times n$ con $V^t V = Id$
- $S = \text{diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right)$ es $n \times n$, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

- *Vectores singulares a izquierda*: columnas de U, $u_1, u_2, \ldots, u_n$
- *Vectores singulares a derecha*: columnas de V, $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- *valores singulares*: σ_i, $i = 1, \ldots, n$
- Si $m < n$ definir la SVD considerando A^t

SVD: interpretación geométrica

- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una BON de $\mathbb{R}^n$

SVD: interpretación geométrica

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una BON de $\mathbb{R}^n$
- $Av_i = USV^t v_i = USe_i = \sigma_i Ue_i = \sigma_i u_i$

SVD: interpretación geométrica

- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una BON de $\mathbb{R}^n$
- $Av_i = USV^t v_i = USe_i = \sigma_i Ue_i = \sigma_i u_i$
- Podemos pensar a A como una transformación

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad A(x) = Ax$$

En este caso tenemos una BON de dom A, $\{v_i\}_{i=1}^n$ y una BON del rango de A, $\{u_i\}_{i=1}^n$. En estas bases A actúa como una matriz diagonal

$$A\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \beta_i u_i, \qquad \text{o} \qquad A(\beta_i) = S(\beta_i)$$

Propiedades de la SVD

- Los autovalores de la matriz simétrica $A^t A$ son σ_i^2. Los vectores singulares a derecha forman una BON de autovectores de $A^t A$

Propiedades de la SVD

- Los autovalores de la matriz simétrica A^tA son σ_i^2. Los vectores singulares a derecha forman una BON de autovectores de A^tA

$$A^tA = (USV^t)^t(USV^t) = (VSU^t)(USV^t) = VS(U^tU)SV^t = VS^2V^t$$

Propiedades de la SVD

- Los autovalores de la matriz simétrica A^tA son σ_i^2. Los vectores singulares a derecha forman una BON de autovectores de A^tA

$$A^tA = (USV^t)^t(USV^t) = (VSU^t)(USV^t) = VS(U^tU)SV^t = VS^2V^t$$

- Si A es *full rank* ($rg(A) = \min(m, n) = n$), entonces la solución de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

es $x = VS^{-1}U^tb$. $VS^{-1}U^t$ se llama inversa de Moore-Penrose de A

Propiedades de la SVD

- Los autovalores de la matriz simétrica A^tA son σ_i^2. Los vectores singulares a derecha forman una BON de autovectores de A^tA

$$A^tA = (USV^t)^t(USV^t) = (VSU^t)(USV^t) = VS(U^tU)SV^t = VS^2V^t$$

- Si A es *full rank* ($rg(A) = \min(m, n) = n$), entonces la solución de

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

es $x = VS^{-1}U^tb$. $VS^{-1}U^t$ se llama inversa de Moore-Penrose de A

$$A^tAx = A^tA(VS^{-1}U^tb) = (VS^2V^t)(VS^{-1}U^tb)$$
$$= VS^2(V^tV)S^{-1}U^tb = VS^2S^{-1}U^tb = VSU^tb$$

Propiedades de la SVD

- $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$

Propiedades de la SVD

- $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$
- Supongamos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Entonces:
  - $rg(A) = r$
  - $ran(A)(= Im(A)) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$
  - $\ker A = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

Propiedades de la SVD

- $\|A\|_2 = \sigma_1, \ \|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$
- Supongamos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Entonces:
  - $rg(A) = r$
  - $ran(A)(= Im(A)) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$
  - $\ker A = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

recordar que $A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \beta_i u_i$

Propiedades de la SVD

- $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$
- Supongamos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Entonces:
  - $rg(A) = r$
  - $ran(A)(= Im(A)) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$
  - $\ker A = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

  recordar que $A\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \beta_i u_i$
- Para $k < n$ sea $S_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$, y $A_k = US_kV^t$. Entonces A_k tiene rango k y

$$\|A - A_k\|_2 = \min \{\|A - B\|_2 : B \text{ matriz } m \times n \text{ de rango } k\}$$

Propiedades de la SVD

- $\|A\|_2 = \sigma_1$, $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$
- Supongamos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Entonces:
  - $rg(A) = r$
  - $ran(A)(= Im(A)) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$
  - $\ker A = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

recordar que $A\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \beta_i u_i$

- Para $k < n$ sea $S_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0)$, y $A_k = US_kV^t$. Entonces A_k tiene rango k y

$$\|A - A_k\|_2 = \min\{\|A - B\|_2 : B \text{ matriz } m \times n \text{ de rango } k\}$$

$A - A_k = U(S - S_k)V^t$ por lo tanto $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. Además sea B con $\operatorname{rg} B = k$. Sea h vector unitario en $\ker(A) \cap \langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle$. Entonces

$$\|A - B\|_2^2 \geq \|(A - B)h\|_2^2 = \|Ah\|_2^2 = \|USV^th\|_2^2 = \|S(V^th)\|_2^2 \geq \sigma_{k+1}\|V^th\|_2^2 = \sigma_{k+1}$$

Propiedades de la SVD

```
n = 10;
A = imread('imagen.jpg');
[U,S,V] = svd(A,"econ");
d = diag(S);
d1 = d(1:n);
d1(1:n) = d(1:n);
U1 = U(:,1:n);
S1 = diag(d1);
V1 = V(:,1:n);
A1 = U1*S1*V1';
imshow(A1,[min(min(A1)) max(max(A1))])
```