# Análisis Numérico

Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 2023

## Práctica N° 6: Cuadrados mínimos[1]

**Ejercicio 1** Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y` y un número `n` y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado `n` que mejor ajusta la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

**Ejercicio 2** La siguiente tabla contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 60.3 | 37.4 | 65 | 74.8 | 39 | 21.1 | 36.1 | 38.6 | 53.1 | 65.7 | 16.8 | 32.4 | 78.8 | 15.3 |
| $y$ | 8 | 6 | 8 | 9 | 6 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 | 9 | 5 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 84.8 | 71.6 | 54.7 | 67.1 | 35 | 49.7 | 80.5 | 66.8 | 60.4 | 30.7 | 50.2 |
| $y$ | 10 | 9 | 7 | 8 | 6 | 7 | 10 | 8 | 8 | 6 | 7 |

Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos. A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

**Ejercicio 3** Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $n$ puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$.

**Ejercicio 4** Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente $f$ junto con

- los polinomios que aproximan a $f$ en el sentido de cuadrados mínimos en $n + 1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,
- el polinomio que resulta de interpolar a $f$ en los puntos anteriores.

**Ejercicio 5** Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y`, y un conjunto de funciones `S`:

$$\texttt{S} = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in < f_1, \ldots, f_n >$ que mejor aproxima a la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

**Nota:** Investigar la estructura de datos `cell` como una forma de dar el conjunto `S`.

[1] Esta práctica está esencialmente tomada del curso *Elementos de Cálculo numérico / Cálculo Numérico* del Departamento de Matemática, ECEN, Universidad de Buenos Aires.

**Ejercicio 6** Sea $S$ el subespacio de funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea $T$ un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

a) Demostrar que $B$ es una base de $S$ y que para todo conjunto de datos $T$ existe una única función $p \in S$ tal que $p$ interpola a $T$.

b) Demostrar que $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en $S$.

c) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.3 | -0.2 | 7.3 | 23.3 |

con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

**Ejercicio 7** Considerar $\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Graficar la función con el comando erf de Octave en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$.

b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5, considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

c) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \mathrm{arctan}(x) + c_3 \frac{x}{x^2 + 1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

**Ejercicio 8** Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8.1 | 3 | 1.1 | 0.5 |

**Ejercicio 9** Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | - 1.1 | - 0.4 | - 0.9 | - 2.7 |

**Ejercicio 10** Considerar la función signo dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma $a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$, considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0.001. Graficar el resultado obtenido.

**Ejercicio 11** Considerar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x)\, dx$$

a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $S_m$, el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$.

b) Hallar una base ortonormal para $S_3$.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre $S_3$ para $f(x) = x^4$.

**Ejercicio 12** Sea

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x) dx.$$

a) Decidir si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $C^1([-1, 1])$.

b) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1, 1]) : f \text{ es impar}\}$.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio $S$ generado por $\{x, x^3\}$.

**Ejercicio 13** a) Demostrar que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f''(x) g''(x) dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1, 1])$.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathcal{P}_2$ para el producto interno definido en el ítem anterior.

c) Probar que si $f$ es una función par en $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, entonces su proyección sobre $\mathcal{P}_2$ es par, y que si $f$ es una función impar, entonces su proyección es impar.

Esta práctica está esencialmente tomada del curso *Elementos de Cálculo numérico / Cálculo Numérico* del Departamento de Matemática, ECEN, Universidad de Buenos Aires