FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Numérico

Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 20223

Práctica N° 5: Descomposiciones SVD y QR

Ejercicio 1 Determinar la SVD de las siguientes matrices (a mano)

$$(a)\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad (c)\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (d)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (e)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 Suponer que A es una matriz $m \times n$ y B es la matriz cuya escritura se obtiene escribiendo a A y haciendo una rotación de 90° en sentido horario. Decidir si A y B tienen los mismos valores singulares.

Ejercicio 3 Mostrar que si A es una matriz $m \times n$ real, entonces tiene una SVD real ($A = U\Sigma V^t$ con U y V reales).

Ejercicio 4 Usando SVD, probar que cualquier matriz en $\mathbb{C}^{m\times n}$ es el límite de una sucesión de matrices de rango completo (full-rank). En otras palabras, el conjunto de matrices de rango completo es denso en $\mathbb{C}^{m\times n}$. Usar la norma $\|\cdot\|_2$, aunque esto no es importante (¿por qué?).

Ejercicio 5 Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 11\\ -10 & 5\end{pmatrix}$$

1. Determinar una SVD real, $A = U\Sigma V'$. Siendo que la SVD no es única, determinar la que tiene menos signos $-$ en U y en V.
2. Hacer una lista de valores singulares y vectores singulares a derecha y a izquierda. Hacer un gráfico de la bola unitaria en R^2 y de su imagen por A, junto con los vectores singulares.
3. Hallar las normas $1, 2, \infty$ y de Frobenius de A.
4. Hallar A^{-1} vía la SVD.
5. Encontrar los autovalores λ_1 y λ_2 de A.

6. Verificar que $\det A = \lambda_1\lambda_2$ y $|\det A| = \sigma_1\sigma_2$.
7. ¿Cuál es el área del elipsoide imagen por A de la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$?

Ejercicio 6 Suponer que $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tiene una SVD $A = U\Sigma V^*$. Encontrar una descomposición espectral (de la forma $C\Lambda C^{-1}$) de la matriz hermitiana $2m \times 2m$ definida por bloques

$$\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7 Hallar (a mano) factorizaciones QR reducidas y completas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8 Sea A una matriz $m \times m$ y sean a_j sus columnas. Probar la desigualdad de Hadamard

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{m} \|a_j\|_2.$$

Ejercicio 9 Escribir dos funciones en Octave `[Q,R] = clgs(A)` y `[Q,R] = mgs(A)` que calculen una factorización QR reducida de una matriz $m \times n$ A usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt clásico y modificado respectivamente. La salida de la función es una matriz $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y una matriz triangular superior $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

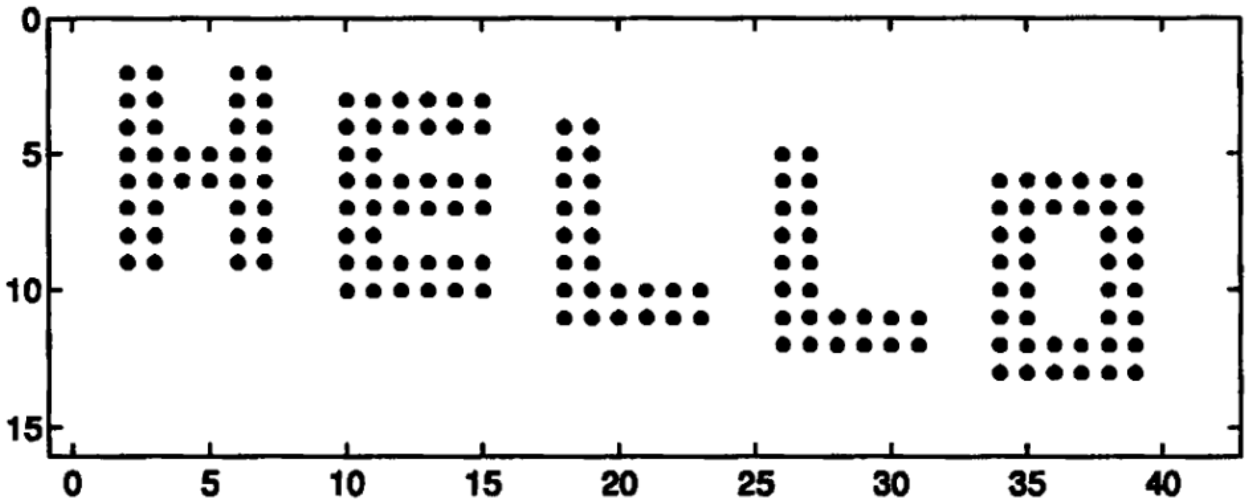
Ejercicio 10 Considerar el siguiente algoritmo

```
[U,X] = qr(randn(80));      #U y V matrices ortogonales aleatorias
[V,X] = qr(randn(80));
S = diag(2.^(-1:-1:-80));    #S matriz diagonal
A = U*S*V';                  #A es una matriz con diag(S) val. singulares

[QC,RC] = clgs(A);  #Calcula la factorización con GS clásico
[QM,RM] = mgs(A);   #Calcula la factorización con GS clásico
```

Graficar, en escala logarítmica usando `plot` y `semilogy`, el vector de elementos diagonales de de R obtenidos con cada factorización. Tratar de explicar la diferencia.

Ejercicio 11 Escribir un programa en Octave que defina una matriz A de 15×40 con entradas 0 salvo por los valores 1 indicados en la figura.



`spy(A)` debe crear un gráfico similar al de la figura.

1. Usar `svd` para calcular los valores singulares de A. Graficarlos usando usando `plot` y `semilogy`. Calcular exactamente $rank(A)$ y relacionarlo con el gráfico.

2. Para cada i entre 1 y $rank(A)$ encontrar la matriz B que mejor aproxima a A en norma 2. Usar el comando `pcolor(B)` con `colormap(gray)` para crear imágenes de esas aproximaciones.

Ejercicio 12 Determinar los autovalores, determinante y valores singulares de un reflector de Householder.

Ejercicio 13 1. Escribir una función de Octave `[W,R] = house(A)` que calcula implícitamente una factorización QR de una matriz $m \times n$ A con $m \geq n$ usando reflexiones de Householder. $W \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una matriz triangular inferior cuyas columnas son los vectores v_k que definen las sucesivas reflexiones de Householder y R es la matriz triangular de la descomposición QR.

2. Escribir una función de Octave `Q = formQ(W)` que toma la matriz W que devuelve `house` y genera la correspondiente matriz ortogonal $m \times m$ Q.

Ejercicio 14 Definir la matriz Z en Octave por `Z = hilb(8)`. Calcular en Octave la factorización de Z de tres maneras: usando la función `mgs` del ejercicio 9; por las rutinas `house` y `formQ` del ejercicio 13, y con el comando `[Q,R] = qr(Z,0)`. Comparar las tres soluciones.