FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Numérico

Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 2024

Práctica N° 4: Aproximación de autovalores

Ejercicio 1 Sin calcularlos, probar que los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

satisfacen la desigualdad $1 \leq \|\lambda\| \leq 9$.

Ejercicio 2 Mostrar que la parte imaginaria de los autovalores de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 3 Probar, basándose en el teorema de Gershgorin que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene al menos dos autovalores reales.

Ejercicio 4 Si una matriz es estrictamente dominante diagonalmente, probar utilizando el Teorema de Gershgorin, que no tiene autovalores iguales a cero y por lo tanto es no singular.

Ejercicio 5 Aproximar los autovalores dominantes y autovectores asociados a las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Iniciar las iteraciones con $x^{(0)} = (1, 0)$ y $x^{(0)} = (1, 1, 1)$, respectivamente.

Ejercicio 6 (Proceso de Deflación, ver Kincaid-Chenney, Sección 5.2) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Algoritmo:

- **Paso 1:** Obtener un autovalor λ y su correspondiente autovector x (por ejemplo por el método de potencias).
- **Paso 2:** Definir $\beta = x_1/|x_1|$ si $x_1 \neq 0$ y $\beta = 1$ en otro caso.
- **Paso 3:** Definir $\alpha = \sqrt{2}/\|x - \beta e^{(1)}\|_2$, $v = \alpha\left(x - \beta e^{(1)}\right)$, y $U = I - vv^*$, siendo $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^t$.
- **Paso 4:** Obtener $\tilde{A}$ de UAU^* omitiendo la primera fila y la primera columna.

De esta manera, los autovalores de $\tilde{A}$ son también autovalores de A.

Implementar este algoritmo en `Octave` para obtener los autovalores de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7 Desarrollar en función del método de la potencia, un método para obtener el autovalor de módulo mínimo.

Ejercicio 8 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -18 & 40 \\ -12 & 26 \end{pmatrix}$$

Calcular el autovalor de mínimo modulo y un autovector asociado mediante el método de la potencia. Tomar como vector inicial $x^{(0)} = (1, 1)$. Verificar el resultado hallando los autovalores de la matriz A.

Ejercicio 9 En el método de las potencias, sea $r_k = \dfrac{\phi(x^{k+1})}{\phi(x^k)}$. Sabemos que $\lim_{k\to\infty} r_k = \lambda_1$, siendo λ_1 el autovalor de módulo máximo. Probar que

$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_k$$

donde c_k forma una sucesión convergente (y por ende acotada).