FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Numérico

`Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 2023`

Práctica N° 3: Métodos iterativos para sistemas lineales

Ejercicio 1 Escribir un programa que implemente el método de Jacobi y otro que implemente el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

- que finalice si el método se estaciona,
- que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones,

Sugerencia: utilizar los comandos `tril` y `diag` de `Octave`.

Ejercicio 2 Considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 20x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Probar que la matriz correspondiente a la iteración de Jacobi satisface $\|T_J\|_\infty < 1$. Comenzando con el vector inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, aplicar el método de Jacobi y encontrar el número de pasos necesarios para obtener una exactitud de 10^{-4}.

Ejercicio 3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ by + z &= 1 \end{aligned}$$

1. Determine los valores de a y b para que el sistema tenga única solución.
2. Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Jacobi.
3. Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel.
4. Estudiar la convergencia de los métodos anteriores para los valores de a y b para los que la matriz de coeficientes del sistema es simétrica.

Ejercicio 4 Probar que si $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$ con $k = 1, 2, \ldots$, donde B es matriz $n \times n$ y $\|B\| < 1$, siendo x el punto fijo $x = Bx + c$ y $x^{(0)}$ arbitrario, entonces

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|B\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Ejercicio 5 * El objetivo de este ejercicio es probar que el radio espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ acota inferiormente a toda norma de A, sin utilizar normas complejas.

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\lambda = a + ib$ un autovalor de A y sea $u + iv$ el autovector correspondiente, con $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcular Au y Av y probar que:

$$\|Au\|_2^2 + \|Av\|_2^2 = (a^2 + b^2)(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2).$$

b) Concluir que:

$$|\lambda| \leq \|A\|_2.$$

c) Probar que dada una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$ vale que

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

(Sugerencia: Usar la equivalencia de normas. Notar que si $B = A^m$, entonces λ^m es autovalor de B).

Ejercicio 6 * Sea A una matriz que admite una base de autovectores. Mostrar una norma $|||.|||$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = |||A|||$.

Ejercicio 7 Considerar el sistema $Ax = b$ para $A = \begin{pmatrix} 64 & -6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 2)$.

a) Demostrar que el método de Jacobi converge para todo dato inicial. Verificar, sin embargo, que la matriz no es diagonal dominante.

b) Sea J la matriz de iteración. Hallar las normas 1, ∞ y 2 de J. Hallar una norma $\|\ \|$ en la cual $\|J\|$ sea < 1.

Ejercicio 8 Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante? ¿y simétrica y definida positiva?

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 a) Mostrar que toda matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det(B) > 1$ tiene un autovalor λ, real o complejo, con $|\lambda| > 1$.

b) Decidir si el método de Jacobi converge o no para un sistema dado por la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10 Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$ si y sólo si $|b| < \sqrt{2}/2$.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $a, c \in \mathbb{R}$ para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel aplicados a la resolución de $Ax = v$.

Ejercicio 11 Se desea aplicar el método SOR para resolver $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar el valor óptimo para el parámetro de relajación ω.

Ejercicio 12 Probar que si una matriz A es definida positiva y tridiagonal, entonces $\rho(B_G) = \Big[\rho(B_J)\Big]^2 < 1$ y ω óptimo para el método de SOR resulta:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_{GS})}}$$

siendo B_J y B_{GS} las matrices correspondientes a los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel respectivamente.

Ejercicio 13 a) Probar que si A tiene una base de autovectores v_i, con autovalores λ_i, la matriz

$$B = I + sA, \quad s \in \mathbb{R}$$

tiene los mismos autovectores, con autovalores $\nu_i = 1 + s\lambda_i$.

b) Se sabe que los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_j = -4\sin^2(\frac{\pi j}{2n})$, $j = 1, \ldots, n-1$. Considerar sistemas de la forma $Ax = b$, con A como en el ítem anterior. Decidir si el método de Jacobi converge. ¿Qué sucede con el método de Gauss-Seidel? ¿Cuál resulta preferible?

c) Considerar el problema de Poisson en el intervalo $[0,1]$:

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Formular el problema por diferencias finitas y decidir si los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel pueden aplicarse para resolver el sistema lineal resultante.

Ejercicio 14 a) Sean $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con M inversible. Probar que los autovalores de $-M^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda M + N)$

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 1+\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver un sistema $Ax = b$ se propone el método iterativo:

$$x_{n+1} = -M^{-1}Nx_n + M^{-1}b, \tag{1}$$

Siendo $N = A - M$. Probar que si el método (1) converge a x, entonces x es solución del sistema $Ax = b$.

c) Hallar todos los valores de α para los cuáles el método propuesto converge.

d) ¿Qué restricción debería imponerse sobre α si se quiere garantizar que el error $e_n = x_n - x$ satisfaga:

$$\|e_n\| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \|e_0\|,$$

para alguna norma $\|\cdot\|$?

Ejercicio 15 Utilizar la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema $A_n x = b_n$ para

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4+\frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_n = (1, 2 - \frac{1}{n^2}).$$

¿Cómo es la convergencia? ¿Tiene esto que ver con el mal condicionamiento de A? Dar un ejemplo de una matriz mal condicionada para la cual la convergencia sea rápida.