FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Matemático III

LM - PM - LF - PF   Segundo Cuatrimestre 2024

Práctica 2: Integrales múltiples

1. Calcular cada una de las siguientes integrales.
   (a) $\iint_R (x^3 + y^3)\ \mathrm{d}A, \quad R = [0,1] \times [0,1]$.
   (b) $\iint_R y\ \exp(xy)\ \mathrm{d}A, \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$.
   (c) $\iint_R \ln(x+1)(y+1)\ \mathrm{d}A, \quad R = [0,1] \times [0,1]$.
   (d) $\iint_R |y|\ \mathrm{d}A, \quad R = [0,2] \times [-1,0]$.

2. Sean f continua en $[a,b]$ y g continua en $[c,d]$. Mostrar que

$$\int_R [f(x)g(y)]\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy$$

   donde $R = [a,b] \times [c,d]$.

3. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$ sobre el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$ del plano xy.

4. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

   Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

5. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$ en términos de F.

6. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones D determinadas por los límites de integración:

   (a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$
   (b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$
   (c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\,dydx$
   (d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\,dydx$
   (e) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y)\,dxdy$
   (f) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dydx$
   (g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$
   (h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x\,dydx$
   (i) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\,dxdy \qquad (m,n > 0)$
   (j) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dydx$
   (k) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin y} y\,dxdy$
   (l) $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\,dydx$

7. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

8. Calcular
$$\int_T (x \sin x + y \sin(x+y))\, dxdy$$
siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

9. Calcular el volumen de las siguientes regiones:
   (a) R: la esfera de radio r.
   (b) R un cono de base de radio r y altura h.
   (c) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.
   (d) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
   (e) R: elipsoide con semiejes a,b y c.
   (f) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

10. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, dibujar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

    (a) $\int_0^1 \int_x^1 xy\, dydx$ (b) $\int_0^1 \int_{2-y}^1 (x+y)^2\, dxdy$

    (c) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dxdy$ (d) $\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\, dxdy$.

11. Calcular:
    (a) $\int_C (xyz + x^2y^2z^2)\, dV$, donde $C = [0,1] \times [-3,2] \times [-1,1]$.
    (b) $\int_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y)\, dV$, donde $C = [0,\pi]^3$.

12. Calcular:
    (a) $\int_W x\, dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2 + y^2$.
    (b) $\int_W x^2 \cos z\, dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.
    (c) $\int_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.
    (d) $\int_W (x^3 + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

13. Calcular $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y dibujar la región de integración.

14. Hallar el promedio de $f(x,y) = y\,\mathrm{sen}xy$ sobre $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

15. Hallar el centro de masa de un triángulo con densidad constante.

16. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ y $y = x$ si la densidad es $x + y$.

17. (*) Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y T la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$.
    (a) Mostrar que $T(D^*) = D$.¿Es biyectiva T?
    (b) ¿En qué transforma T el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?
    (c) Calcular la matriz $DT(r,\theta)$.¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
    (d) Escribir la demostración de la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).

18. Sean $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

19. Sean $T(u,v)$ y D los del ejercicio anterior. Calcular:

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

haciendo ese cambio de variables.

20. Transformar la siguiente integral a coordenadas polares y calcularla:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ .$$

21. Calcular las siguientes integrales triples:

(a). $\iiint_V (1+x+y+z)^{-3}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ donde V es el tetraedro definido por los tres planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

(b). $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, donde V es el sólido limitado por la hoja superior del cono $z^2=x^2+y^2$ y el plano $z=1$.

22. Calcular pasando a coordenadas cilíndricas en caso que sea conveniente:

(a) $\iiint_V (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, siendo V el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2=2z$ y el plano $z=2$.

(b) El volumen del sólido limitado por los tres planos coordenados, la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $x+y=1$.

23. Utilizando el teorema del valor medio mostrar que :

$$\frac{1}{6} \leqq \int_D \frac{\mathrm{d}A}{y-x+3} \leqq \frac{1}{4}\ ,$$

donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

24. Una placa de oro tiene la forma y tamaño del rectángulo $[0,2\pi]\times[0,\pi]$ (en centímetros). Su densidad de masa es $\delta(x,y)=y^2\sin^2(4x)+2$ (en gramos por centímetro cuadrado).

Si el oro cuesta \$ 1300 por gramo, ¿cuánto vale la placa?

25. Siendo D la región encerrada por la cardioide de ecuación en coordenadas polares $r=1-\cos\theta$, mostrar que

$$\iint_D x^2\ \mathrm{d}A\ =\ \frac{49}{32}\pi\ .$$

26. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$:

(a) Observar que $I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

(b) Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

27. Sea B la bola unitaria, es decir, $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$. Calcular:

$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}.$$

28. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)\le 1$.

(a) Hallar el volumen de E.

(b) Calcular $\int_E[(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)]\,dxdydz$.

29. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x esta definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2+z^2)\,dxdydz$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z=a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0<k<\pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

30. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

Complementarios

31. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=\sin y$, los planos $x=1, x=0, y=0, y=\pi/2$ y el plano xy.

32. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x+4y=10$. Calcular

$$\int_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

33. Calcular $\int_D y^2x^{1/2}\,dxdy$ donde

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>x^2, y<10-x^2\}$$

34. Calcular $\int_T e^{x-y}\,dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$, y $(2,2)$.

35. Sea D una región de la forma

$$\{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b\ ,\ \ -\varphi(x) \leqq y \leqq \varphi(x)\}$$

donde φ es una función no negativa y continua en el intervalo $[a,b]$, y f una función definida en D tal que, para todo $(x,y)\in D$,

$$f(x,-y) = -f(x,y)\ .$$

Mostrar que

$$\iint_D f\ \mathrm{d}A = 0\ .$$

36. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices (0,0) , (2,10) , (3,17) y (1,7),

(a) Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.

(b) Calcular la integral $\int_P xy\,dxdy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R.

37. Sea W la región determinada por las condiciones $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ y $0\leq z\leq xy$.

(a) Hallar el volumen de W (b) Calcular $\int_W x\,dxdydz$

(c) Calcular $\int_W y\,dxdydz$ (d) Calcular $\int_W z\,dxdydz$

(e) Calcular $\int_W xy\,dxdydz$

38. (a) Hallar la masa de la caja $[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]\times[0,2]$ suponiendo que la densidad es constante ($=\rho$).

(b) Lo mismo que en la parte (a) pero suponiendo ahora que la densidad está dada por $\rho(x,y,z) = x^2+3y^2+z+1$.

39. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h. Demostrar que la distancia del centro de masa a la base es $h/4$.

40. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Esta curva se llama lemniscata.

41. Calcular:

$$\int_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0<b<a$ y centradas en el origen.