FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Numérico

Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 2023

Práctica N° 2: Sistemas lineales y condición

Ejercicio 1 a) Escribir un programa en `Octave` que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz A^{-1}.

Ejercicio 2 Utilizar el programa anterior para calcular la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & -1 \\ 6 & 10 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-n}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar para cada n si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el item anterior con el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 4 Mostrar que si una matriz es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces el algoritmo de eliminación gaussiana no genera ningún pivote nulo.

Ejercicio 5 Probar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no admite descomposición LU.

Ejercicio 6 Probar que toda matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ tiene una descomposición LU.

Ejercicio 7 Analizar si es válida la siguiente afirmación: Si A admite una factorización LU en donde L es una matriz triangular inferior con $1's$ en su diagonal principal, entonces A admite una factorización LU donde U es una matriz diagonal superior con $1's$ en su diagonal principal.

Ejercicio 8 Probar que si A es invertible y admite una descomposición LU entonces todos los menores principales de A son no singulares.

Ejercicio 9 Utilizar el Teorema de Cholesky para demostrar que las siguientes propiedades de una matriz son equivalentes:

1. A es simétrica y definida positiva
2. Existe un conjunto de vectores $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, tales que $a_{ij} = (x^i)^t x^j$.

Ejercicio 10 Considerar la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 11 Probar que los elementos de la diagonal de una matriz definida positiva son positivos.

Ejercicio 12 Tener en cuenta la definición: una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ es *definida positiva* si para todo vector (columna) no nulo $x \in \mathbb{C}^m$ se tiene $x^*Ax > 0$. Acá dado un vector o matriz a, a^* denota el vector o matriz adjunto de a, o sea, $a^* = \overline{a}^t$.

1. Demostrar que si A es definida positiva, entonces es hermitiana ($A^* = A$). Concluir que si $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es definida positiva, entonces es simétrica.
2. Mostrar que puede ocurrir que una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ que verifica $x^tAx > 0$ para todo vector no nulo $x \in \mathbb{R}^m$ no sea simétrica.

Ejercicio 13 Probar que si los menores principales de A son no singulares, entonces A admite una factorización LDU en donde L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal, U es una matriz diagonal superior con 1's en la diagonal y D es una matriz diagonal.

Ejercicio 14 Si A es una matriz simétrica cuyos menores principales son no singulares, entonces A admite descomposición LDL^t en donde D es una matriz diagonal y L una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal.

Ejercicio 15 Determinar la factorización LL^t, en donde L es una matriz triangular inferior con elementos positivos en su diagonal, para la matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 17/16 & 1/4 \\ 1 & 1/4 & 33/64 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de A, es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

b) Adaptar el programa del Ejercicio 1 para que resuelva un sistema $Ax = b$, con A tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y b), y devolver x.

   Utilizar los comandos `tic` y `toc` de `Octave` para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando los comandos `inv` y \, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

Ejercicio 17 Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a)
$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

b)
$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejercicio 18 Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ y entre las normas $\|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$

Ejercicio 19 Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar con coordenadas en el intervalo $[-1, 1]$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que tanto la norma de un vector como de una matriz se calculan en Octave con el comando `norm`. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando `rand`) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$. Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

Ejercicio 20 Se tiene el sistema $Ax = b$.

a) Sea x la solución exacta y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $r := b - A\tilde{x}$. Si notamos $e = x - \tilde{x}$, mostrar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto b se conoce una aproximación $\tilde{b}$. $\tilde{x}$ es tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Probar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 21 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos $(b - \tilde{b})$, si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que 10^{-4}?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 22 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \ \|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf\left\{\frac{\|A-B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$cond(A) \geq \sup\left\{\frac{\|A\|}{\|A-B\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 23 a) Estimar la $cond_\infty(A)$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices A y B del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 24 Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

Ejercicio 25 Sea $A_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $A_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \geq Cn^2$ para alguna constante C independiente de n.

b) Probar que $Cond_2(A_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 26 La n-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Demostrar que $cond_\infty(H_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.