FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Matemático III

LM - PM - LF - PF   Primer Cuatrimestre 2024

Práctica 1: Funciones diferenciables

Repaso de diferenciabilidad

1. Hallar las derivadas parciales y direccionales de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x=0 \vee y=0 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Hallar las derivadas direccionales de f en el origen. Sol.: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   (b) Estudiar la continuidad de f en el origen.
   Sug.: Aproximarse a lo largo de la parábola $y = x^2$.

3. Mostrar que existen las derivadas parciales de f en el origen, pero que no es continua allí, siendo:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^3+y^6+z^3} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

4. Mostrar que f es continua y que existen las derivadas parciales de f en el origen, pero que no es diferenciable allí, siendo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5. Se considera la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Estudiar su continuidad en el origen.

   (b) Calcular la derivada direccional de f en el origen según la dirección del versor (a,b). Deducir de ahí las derivadas parciales de f en el origen.

   (c) ¿Es $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua en $(0,0)$?

   (d) ¿Es f diferenciable en el origen?

Regla de la Cadena

6. Si $F(t) = f(x+ht, y+kt)$ con (x, y) y (h, k) fijos, y donde f se supone con todas las derivadas necesarias, calcular $F'(t), F''(t), F'''(t)$.

7. Sea f un campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$. La sustitución $u = \frac{(x-y)}{2}, v = \frac{(x+y)}{2}$, cambia $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Aplicar en forma adecuada la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$.

8. Sea $G(s, t) = f(2s-t+1, -s+3t)$ (f tiene derivadas de todo orden). Se sabe que en $(1, 0)$ las derivadas de f son: $D_1 f = 1; D_2 f = -1; D_{11} f = 2; D_{12} f = -2; D_{22} f = -3$. ¿Cuánto valen $D_{12}G(0, 0)$ y $D_{22}G(0, 0)$?

9. Sea $u = f(x, y)$, donde $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Expresar $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ en términos de u_r y u_θ.

10. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del siguiente modo:

$$f(x, y) = e^{x+2y}\mathbf{i} + \sin(y + 2x)\mathbf{j},$$
$$g(u, v, w) = \left(u + 2v^2 + 3w^3\right)\mathbf{i} + \left(2v - u^2\right)\mathbf{j}.$$

   (a) Calcular cada una de las matrices jacobianas $\mathrm{J}f(x, y), \mathrm{J}g(u, v, w)$.
   (b) Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$.
   (c) Calcular la matriz jacobiana $\mathrm{J}h(1, -1, 1)$.

11. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f(x, y) = g(\dfrac{(x^2 + y^2)}{2}, xy)$. Si $D_1 g(\frac{5}{2}, -2) = 2$, y $D_2 g(\frac{5}{2}, -2) = 1$, calcular $\nabla f(-1, 2)$ y la derivada direccional de f en $(-1, 2)$ en la dirección que va de $(0, 1)$ hacia $(1, 0)$.

12. Mostrar que la expresión del Laplaciano de una función $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$, tras realizado el cambio de coordenadas polares $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\mathrm{sen}\theta$, será

$$f_{rr} + \frac{1}{r}\, f_r + \frac{1}{r^2}\, f_{\theta\theta}\ .$$

13. Probar que la expresión $f_{xx} + f_{yy}$ es invariante bajo una rotación del sistema coordenado, para cualquier campo escalar $f \in C^2$.

14. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable para la que existe $m \in \mathbb{N}$ con la propiedad

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad (\star)$$

se dice que es *homogénea de grado m*. Verificar que toda f homogénea de grado m satisface la ecuación

$$xD_1 f(x, y) + yD_2 f(x, y) = mf(x, y), \qquad \text{llamada ecuación de Euler.}$$

Sugerencia: Derivar $(\star)$ respecto de t y después poner $t = 1$. (Recíprocamente se puede demostrar que una función f que verifica la ecuación de Euler es homogénea).

Polinomio de Taylor en varias variables

15. Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones:
    (a) $f(x,y)=e^x \sin y$ alrededor de $(0,0)$.
    (b) $f(x,y,z)=x^2-3xz+z^2-4xy+x^4y^2$ alrededor de $(0,0,0)$.
    (c) $f(x,y,z)=xyz^2$ alrededor de $(0,1,2)$.

16. Calcular aproximadamente $A=\frac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05+\sqrt[3]{0{,}98}}}$ usando el hecho $f(a+h)\cong f(a)+\nabla f(a)\times h$, con $f(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}}$ y $a=(1,15,1)$. El valor exacto de A es $0,2421726\ldots$.

17. El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de a lo máximo $0,1$ cm. Acotar el error en el cálculo del volumen del cono.

Extremos de funciones de varias variables

18. Analizar el siguiente ejemplo:
    (a) Sea f una función C^1 en la recta real. Supongamos que f tiene un único punto crítico x_0 que es un mínimo local estricto de f. Mostrar que entonces x_0 es también un mínimo absoluto para f, esto es, que $f(x)\geq f\left(x_0\right)$ para todo x.
    (b) El siguiente caso muestra que la conclusión de (a) no se cumple para funciones de más de una variable: Sea $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ definida por
    $$f(x,y)=-y^4-e^{-x^2}+2y^2\sqrt{e^x+e^{-x^2}}.$$
    Mostrar que $(0,0)$ es el único punto crítico de f y que es un mínimo local. Mostrar además, de manera informal, que f no tiene mínimo absoluto.

19. Hallar los extremos (absolutos) de las siguientes funciones en los dominios indicados:
    (a) $f(x,y)=xy\left(1-x^2-y^2\right)$, en $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\right\}$.
    (b) $f(x,y)=x^3/3-(3/2)x^2+2x+y^2-2y+1$, en el triángulo limitado por las rectas $x=0, y=0, x+y=1$.
    (c) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)$, en el círculo $\left\{(x,y)/x^2+y^2\leq 4\right\}$.
    (d) $f(x,y)=x^2y^3(1-x-y)$, en el cuadrado $\{(x,y)/|x|+|y|\leq 1\}$.

20. Encontrar el volumen de la máxima caja rectangular con aristas paralelas a los ejes que se puede inscribir en el elipsoide $9x^2+36y^2+4z^2=36$.

21. Hallar el valor máximo y el mínimo del producto de tres números reales x, y, z si su suma debe ser 0 y la suma de sus cuadrados debe ser 1.

22. Hallar la distancia del punto $(-2,3,2)$ a la recta $x-1=-(y+1)=z+1$.

23. El cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+y+z=0$ se intersecan en una elipse (cuyo centro es el origen de coordenadas). Hallar los semiejes de la elipse determinando los extremos de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a las dos restricciones $x^2+y^2=1$ y $x+y+z=0$.

24. Hallar los puntos de la curva de intersección de las dos superficies:
    $$x^2-xy+y^2-z^2=1 \text{ y } x^2+y^2=1$$
    que están más cerca del origen.

25. Considerar la función
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$
en el disco unitario $D = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar los puntos máximo y mínimo en la frontera de D. Usar esto para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D.

26. Una función continua de una variable no puede tener dos máximos locales sin tener un mínimo local. Sin embargo, en dos variables se da el caso:

    Mostrar que la función $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tiene sólo dos puntos críticos en los que hay máximos locales.

27. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$ en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$?

28. Hallar los valores extremos del campo escalar
$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$
en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

29. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ se intersectan en una elipse (cuyo centro es el origen de coordenadas). Hallar los semiejes de la elipse determinando los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x^2 + y^2 = 1$, y $x + y + z = 0$.

30. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva y además tiene derivada de segundo orden continua. Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f\left(1 + x^2 + y^2\right)$ tiene un mínimo local en el origen. Más generalmente, $G(x_1, \ldots, x_n) = f\left(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)$ tiene un mínimo local en el origen de $\mathbb{R}^n$.

Función implícita

31. Verificar que las siguientes ecuaciones definen a y como función de x alrededor de los puntos indicados y calcular las dos primeras derivadas en esos puntos:

    (a) $x^3 - xy - xy^2 - y^3 - 1 = 0$ en $x = 0$.

    (b) $\sin x + \cos y + 2y - \pi = 0$ en $x = 0$.

    (c) $1 - xy - \ln\left(x^2 + y^2\right) = 0$ en $x = 0$.

    (d) $x^2y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$ en $x = 1$.

32. Obtener la ecuación del plano tangente y de la recta normal en el punto indicado de las funciones definidas implícitamente por

    (a) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$, en $(x_0, y_0, z_0) = (2, -2, z_0)$,

    (b) $x^2yz^3 - 2xz + 4zy + 7 = 0$, en $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$,

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$, en $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, z_0)$.

33. Si la ecuación $g(x,y) = 0$ define a y como función de x, por ejemplo $y = w(x)$ y si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define:
$$h(x) = f(x, w(x)).$$
Calcular $h'(x)$ en términos de las derivadas parciales de f y g.

34. Hallar los extremos locales de la(s) función(es) $y = y(x)$ definida(s) implícitamente por la ecuación

$$x^2 + xy + y^2 - 27 = 0.$$

En este ejemplo todavía es posible explicitar y en términos de x, pero es aconsejable ignorar esa posibilidad.

35. En los puntos en que la ecuación $z + x + (y + z)^4 = 0$ define una función $z = \phi(x, y)$, calcular las cuatro (o tres) derivadas parciales de segundo orden de ϕ.

36. Dado el campo de ley

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

estudiar la existencia de inversa local cerca de $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

37. Analizar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es localmente inversible $\mathcal{C}^1$ la aplicación

$$F(x, y) = \left(\frac{x^4 + y^4}{x}, \sin x + \cos y \right).$$

38. Decidir si el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + +xyz & = & u \\ y + xy & = & v \\ z + 2x + 3z^2 & = & w \end{array} \right.$$

puede resolverse en las variables x, y, z en términos de u, v, w cerca del origen.