FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análisis Numérico

Licenciatura en Matemática -- Primer Cuatrimestre 2023

Práctica N° 10. Métodos a un paso para problemas de valores iniciales

Ejercicio 1 Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\text{sen}(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\text{sen}(t) + \cos(t)$.

a) Escribir la iteración del método de Euler para esta ecuación.

b) Calcular el error de truncado local.

c) ¿Qué paso h debe elegirse para que el error al estimar $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sea menor que 10^{-2}?

Ejercicio 2 Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

Ejercicio 3 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

Ejercicio 4 Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente la ecuación del ejercicio anterior, en el intervalo $[0, 1]$ con ambos métodos, tomando $h = 0.1$, $h = 0.0625$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ y $h = 0.01$. Para cada h calcular el error que se comete al aproximar $y(1)$: $e_h = |y(1) - y_N|$. Graficar $\log(e_h)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

Ejercicio 5 Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.

c) Resolver usando el programa del Ejercicio 3 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

d) Repetir los items anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

Ejercicio 6 Considerar la ecuación:

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{e^{-y}}{t} \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

a) Probar que $0 \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 1$.

b) Escribir la iteración dada para esta ecuación por el método de Euler. Probar que la solución numérica resultará creciente.

c) Calcular el error de truncado del método de Euler aplicado a la ecuación.

d) Dar un valor de paso h que garantice que el error de la estimación numérica de $y(2)$ sea menor que 10^{-3}.

Ejercicio 7 Probar que una ecuación de orden n:

$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big),$$

se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

Ejercicio 8 Modificar el programa del Ejercicio 3 para que acepte ecuaciones vectoriales: la solución y deberá ser una matriz de $m \times n$, donde m es el número de pasos temporales y n la cantidad de variables del problema. De este modo, la fila i de y corresponderá al valor de la solución en todas sus variables a tiempo t_i

Ejercicio 9 **Sistema predador-presa:** Se tienen dos poblaciones, una de predadores y otra de presas, cuyo número a tiempo t denotamos $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. En ausencia de presas, x tiende a decaer a una tasa α, mientras que en ausencia de predadores y tiende a crecer a una tasa β. Además, los encuentros de predadores y presas hacen crecer la población de los primeros y decrecer la de los segundos, de acuerdo a cierta proporción. De esto modo, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy,\end{aligned}$$

donde γy es la tasa de crecimiento de x (mayor cuanto más presas haya) y δx es la tasa de mortandad de presas (mayor cuanto más predadores haya). Se asume que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son todos positivos.

a) Dar condiciones sobre los parámetros y los niveles de x e y que garanticen la estabilidad de las poblaciones. Es decir, que $x(t + \Delta t) = x(t)$ e $y(t + \Delta t) = y(t)$ para todo $\Delta t > 0$.

b) Elegir valores de α, β, γ, δ, x_0 e y_0 que satisfagan las condiciones del item anterior y resolver utilizando el método de Euler. Realizar dos gráficos: uno de x e y en función de t (simultáneamente) y otro de y en función de x. ¿Se mantiene constante la solución?

c) Tomar $\alpha = 0.25$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0.01$, $x_0 = 80$ e $y_0 = 30$. Resolver utilizando el método de Euler y realizar gráficos como los del ítem anterior.

Ejercicio 10 Escribir dos programas que implementen los métodos de Euler implícito y de Crank-Nicolson para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y. *Sugerencia.* Utilizar el comando `fsolve` para resolver la ecuación no lineal.

Ejercicio 11 Repetir el ejercicio 4 pero ahora para los métodos de Euler implícito y de Crank-Nicolson para verificar numéricamente sus órdenes de convergencia.