FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS NUMÉRICO II – PRÁCTICA 4

Licenciatura en Matemática – Segundo Cuatrimestre 2020

Formulación variacional de problemas elípticos. Método de elementos finitos

La resolución de ejercicios marcados con (*) puede saltearse, aunque sus resultados pueden ser útiles para resolver otros ejercicios.

1. Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

   a) La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $H^1(I)$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:
   $$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

   b) La función $H \notin H^1(I)$.

2. *a*) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\, dx = 0$ para toda $g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

   b) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\, dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

3. (*)

   a) Demuestre que si $f, g \in L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.

   b) Si la $f \in L^p$ del item previo es derivable entonces $f' = g$.

4. (*)

   a) Considere una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$. Probar que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, además $\int_I \theta = 0$.

   b) Si $I = (a, b)$, defina $\phi(x) = \int_a^x \theta$ y pruebe que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.

   c) Si f en L^1_{loc} y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ c.t.p. (Sug. tome ϕ como en el item previo y utilice el ejercicio 2).

5. (*) Si $g \in L^1_{loc}(I)$ tome $c \in I$ cualquiera, y escriba para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$. Probar que $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

6. (*) Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el ejercicio 3 deduzca la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x.

   Deducir de este ejercicio, que si $u \in H^1(I)$ con $I = (a, b)$ intervalo de $\mathbb{R}$, entonces u tiene un representante continuo, que denotamos también por u, que verifica $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\, dt$.

7. Utilizando el ejercicio previo demuestre que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

8. *Para este ejercicio, dado un dominio Ω, definimos $H_0^1(\Omega)$ como la clausura en $H^1(\Omega)$ del conjunto $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ de funciones $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto contenido en Ω. Se puede demostrar que esta definición es equivalente a la dada en clase.*

   Usando el ejercicio previo demuestre que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Pruebe utilizando este hecho que para I acotado en $\mathbb{R}$ existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

   $$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \qquad \text{(Desigualdad de Poincaré)}$$

   y por ende

   $$\|u\|_{H^1} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

9. (*)

   a) Demuestre que la función

   $$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{2}{3}}$$

   está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

   b) Para que valores de α la función

   $$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2))|^\alpha$$

   está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$?

   Concluir que las funciones de $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ no son necesariamente acotadas y por lo tanto el resultado del ejercicio 7 no se extiende a más dimensiones.

10. Probar que las siguientes formas bilineales son continuas y coercitivas en los respectivos espacios V.

    a) $V = \mathbb{R}^n$, $a(u, v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A definida positiva.

    b) $V = L^2(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0, 1]$.

    c) $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0, 1]$.

    d) $V = H_0^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0, 1]$.

    e) $V = H^1(0, 1)$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. ¿Es esta forma bilineal simétrica?

11. Para el problema

    $$\begin{aligned} -u'' + u &= f \qquad \text{en } I = (0, 1) \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned}$$

    con $f \in C(\bar{I})$,

a) probar que existe una solución única en $H^1(I)$ de la formulación débil.

b) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\overline{I})$), y que proporciona una solución clásica.

12. Dar la formulación variacional y probar existencia de solución de la ecuación

$$-u'' = f \qquad \text{en } \Omega = (0,1),$$

con condiciones de contorno

a) $u(0) = u(1) = 0$ (tener en cuenta la desigualdad de Poincaré, que se prueba en el ejercicio 8),

b) $u(0) = u'(1) = 0$,

c) $-u'(0) + u(0) = u'(0) = 0$.

13. Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ al espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $\Omega = (0,1)$.

a) Verificar que $f \notin L^2(\Omega)$.

b) Mostrar el siguiente caso particular de la desigualdad de Hardy ($(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_0$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$):

$$|\,(f,v)\,| \leq C\|v'\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Concluir que $f \in H^{-1}(\Omega)$ (abusando de notación, denotamos por f también al funcional asociado con la función f).

c) Mostrar, usando el Teorema de Lax–Milgram, que el problema ($12a$) con $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una única solución débil.

d) Hallar explícitamente la solución u del item ($13c$) y verificar que $u \notin H^2(\Omega)$.

14. Sea $I = (0,1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I.

a) Definimos para cada $1 \leq i \leq N-1$, $\quad G_i(x) = \begin{cases} (1-x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1-x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$ Verificar que $G_i \in H_0^1(0,1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0,1)$ se tiene que

$$\int_0^1 w'(s)G_i'(s)ds = w(x_i)$$

b) Dada $f \in L^2(0,1)$ considerar el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Escribir el problema en forma variacional sobre H_0^1 y dar formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \ \text{ tal que } \ u \in P_1(I_i) \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq N-1\}$$

- Demostrar que ambos problemas variacionales tienen solución única.

- Demostrar que $\int_0^1 (u-u_h)'v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto).

c) Hallando la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange), escribir un programa para aproximar u como se propone en (b). Verificar lo demostrado en (b).

15. Considerar el problema:
$$\begin{cases} -u'' + \beta u' = f & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
siendo $\beta > 0$.

   a) Plantear la formulación débil de este problema, de la forma:
   $$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V, \tag{1}$$
   para un espacio adecuado V.

   b) Probar que F y a son continuas, y que si β es suficientemente chico, a es coercitiva. Concluya existencia y unicidad de solución para el problema débil.

   c) Sea $\mathcal{T}_h$ una partición unifome del intervalo $[0,1]$, de parámetro $h > 0$ dada por $\{x_i\}$, $x_i = ih$. Sea
   $$V_h = \{f \in C([0,1]) : \ f|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\}.$$
   Considerar el problema discretizado:
   $$u_h \in V_h : \qquad a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \tag{2}$$
   Si $u_h \in V_h$ es la solución de (2), y u es la solución de (1), probar, utilizando el lema de Céa, que
   $$\|u - u_h\|_{H^1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

16. Dada $f \in C([0,1])$, considere el siguiente problema:
$$\begin{cases} u \in C^2[0,1] \\ -u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x) & 0 < x < 1, \quad a \in \mathbb{R} \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

   a) Hallar la forma débil en un espacio adecuado V.

   b) Probar que si $u \in C^2([0,1])$ es una solución débil entonces es solución clásica del problema (incluyendo las condiciones de borde).

   c) Probar que si $u \in H^1(0,1)$ y $u(0) = 0$, entonces vale la desigualdad de Poincaré.

   d) Probar que si $|a| < 2$, existe una solución única en V de la formulación débil.

   e) Describir un espacio aproximante $V_h \subset V$, adecuado para este problema, y mostrar una base.

17. (*) Sea $I = (0,1)$ y $k(x)$ la función

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in I_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ k_2 & \text{si } x \in I_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

con $k_1, k_2 > 0$ constantes. Considerar el problema variacional: Hallar $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I k(x) u' v' \, dx = \int_I v \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{3}$$

a) Probar que (3) tiene una única solución u.

b) Probar que u es solución (en sentido clásico) de

$$\begin{cases} -k(x)u'' = 1 & \text{en } I_1 \cup I_2 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \text{ continua en } x = \dfrac{1}{2} \\ k_1 u' \left(\dfrac{1}{2}^{(-)}\right) = k_2 u' \left(\dfrac{1}{2}^{(+)}\right). \end{cases}$$

c) Discretizar la ecuación usando elementos finitos lineales sobre una malla uniforme con $2N$ intervalos de longitud $h = \frac{1}{2N}$. Hallar la matriz de rigidez y el vector independiente del sistema resultante de tamaño $(2N-1) \times (2N-1)$.

d) Interpretar desde el punto de vista de diferencias finitas cómo queda impuesta la condición sobre la derivada de u en $x = \frac{1}{2}$ en la discretización dada en (c).

18. Definir

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0,1]), \text{ tales que } \phi \text{ es cúbica en cada } I_i\}$$

y probar que en general V_h no está incluido en H^2. Pensar cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset V_0^2$. Construir las bases para W_h.

19. Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f. Llevar el problema a la forma débil: Hallar $u \in H_0^2(0,1)$ tal que

$$< u'', v'' > = < f, v > \quad \forall v \in V_0^2(0,1)$$

a) Probar que la formulación variacional tiene única solución en $H_0^2(0,1)$

b) Discretice este problema utilizando el ejercicio anterior.

20. Sea $k \geq 0$ un entero y K un rectángulo $[a,b] \times [c,d]$, y sean ξ_i y η_j, $0 \leq i, j \leq k$, con $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_k = b$ y $c = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_k = d$. Mostrar que la terna[1] $(K, Q_k, \mathcal{N})$ es un elemento finito, donde $\mathcal{N}$ denota el conjunto de evaluaciones en los nodos $(\xi_i, \eta_j), 0 \leq i, j \leq k$.

[1] Denotamos por Q_k el espacio de polinomios (en las variables x e y) de grado a lo sumo k en cada variable, es decir, $Q_k = \langle \{x^r y^s : r, s \leq k\} \rangle$.

21. Suponer que $K = [a, b] \times [c, d]$, y $\mathcal{N}$ denota las cuatro evaluaciones en los puntos medios de los lados de K. ¿Es la terna $(K, Q_1, \mathcal{N})$ un elemento finito?

22. Mostrar que los elementos finitos introducidos en el ejercicio 20 son de clase $\mathcal{C}^0$. Esto es, si Ω es un dominio rectangular y $\mathcal{T} = \{K\}$ es una triangulación de Ω consistiendo de rectángulos K, entonces es posible ubicar los nodos en los elementos del tipo descripto en el ejercicio 20 asociados a cada rectángulo de manera que la interpolación global sea C^0.

23. Sea K un rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenados) de vértices $a_i, i = 1, \cdots, 4$, y sea $\mathcal{N}$ el conjunto de variables nodales determinadas por las siguientes evaluaciones:
$$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \ldots, 4 \right\}.$$
Mostrar que $(K, Q_3, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

24. Mostrar que el elemento del ejercicio 23 es de clase $\mathcal{C}^1$.

25. (*)

    a) Deducir, a partir del Teorema de Green, las fórmulas de integración por partes para funciones $v, w \in H^1(\Omega)$
    $$\int_\Omega v \partial_x w = - \int_\Omega \partial_x v\, w + \int_{\partial\Omega} vw\, n_1$$
    $$\int_\Omega v \partial_y w = - \int_\Omega \partial_y v\, w + \int_{\partial\Omega} vw\, n_2$$
    siendo Ω un dominio suave o poligonal, $\partial\Omega$ la frontera de Ω, y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal unitaria exterior a Ω.

    b) Para $v \in H^2(\Omega)$ y $w \in H^1(\Omega)$ demostrar la identidad
    $$- \int_\Omega \Delta v\, w = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} v\, w$$
    donde $\partial_{\mathbf{n}} v$ indica la derivada normal de v.

26. Sea $\Omega = [0, 1]^2$, y considerar una triangulación de Ω consistente de 4 cuadrados congruentes. Usando elementos finitos bilineales (Q_1) discretizar los siguientes problemas
$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$
y
$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$
Escribir el sistema lineal correpondiente en cada caso.

27. Considerar la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$
Resolverla numéricamente con freefem++ para una sucesión de mallas cada vez más finas, y analizar los órdenes de convergencia en normas L^2 y H^1. Considerar el caso: Dominio $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, solución $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, elementos P_1 y P_2.