

ANÁLISIS NUMÉRICO – Práctica 0

Segundo Cuatrimestre de 2019

Clasificación de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Ejercicio 1 Decidir de qué tipo son los siguiente sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

i.
$$\begin{cases} u_t + 2u_x - v_x = 0 \\ v_t - u_x + v_x = x \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} u_t + x^2u_x + xv_x = xt \\ v_t + xu_x + t^2v_x = t \end{cases}$$

Ejercicio 2 Hallar las regiones donde la ecuación

$$(\alpha + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

es hiperbólica, elíptica o parabólica. Estudiar su dependencia del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3 Si $K(t, x, u)$ es una función positiva, acotada y suficientemente derivable, y $C(t, x)$ es una función derivable que conserva el signo, analizar qué tipo de ecuación es

$$u_t = (K(t, x, u)u_x)_x + (C(t, x)u)_x$$

Analizar en particular qué sucede si $K = K(t, x)$.

Ejercicio 4 En cada una de las siguientes ecuaciones

1. $u_{tt} + tu_{xx} = 0$
2. $x^2u_{tt} - t^2u_{xx} = 0$
3. $x^2u_{tt} + 2xtu_{tx} + t^2u_{xx} = 0$
4. $u_{tt} + xu_{xx} + \frac{1}{2}u_x = 0$

Analice

- i. Qué tipo de ecuación es en cada una de las regiones que quedan determinadas.
- ii. Cuál es su forma canónica en cada uno de los dominios donde su tipo se conserva

Discretización de derivadas

Ejercicio 5 Hallar el error local y el orden de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u :

- i. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (forward difference)
- ii. $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (backward difference)
- iii. $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)
- iv. $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

Ejercicio 6 Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicita sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Ejercicio 7 Hallar una fórmula de aproximación para la derivada segunda que utilice los valores de f en $x, x+h$ y $x+2h$. >Cuál es el error local?

Para hacer en R:

Ejercicio 8 Dado el problema de valores de contorno:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, y(1) = 0$$

resolver usando diferencias finitas.

- Usando la discretización habitual para la derivada segunda y diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada.
- Usando la discretización de la derivada segunda del ejercicio anterior y la discretización de la derivada primera dada en el ejercicio 1 iv).

Compare la solución obtenida numericamente con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 9 Resuelva analítica y numéricamente el siguiente problema de contorno:

$$y'' - y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

Utilice un método de diferencias finitas para hallar las soluciones numéricas. Compare la solución obtenida con la exacta para varios valores del paso h de la discretización, y grafique los errores.

Ejercicio 10 Si $\epsilon > 0$, considere el problema

$$-\epsilon u'' - u' = 1 \quad u(0) = u(1) = 0.$$

- i. Discretice la ecuación usando diferencias centradas para las derivadas primera y segunda, y obtenga explícitamente la solución discreta (en función de h y ϵ).

- ii. Para distintos valores de ϵ y h , compare las gráficas de las soluciones discreta y exacta. ¿Qué ocurre si $h \gg 2\epsilon$?

Ejercicio 11 Repita el ejercicio 10, pero ahora discretice usando diferencias centradas para la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

Ecuaciones de recurrencia:

Ejercicio 12 Hallar la solución general de las sig. ecuaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} y(i+2) - y(i+1) - 2y(i) &= 0 \\ y(i+3) - 6y(i+2) + 12y(i+1) - 8y(i) &= 0 \\ y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) &= 0 \end{aligned}$$

Normas de matrices y radio espectral:

Ejercicio 13 Probar que el módulo del mayor autovalor de una matriz cuadrada A no puede ser mayor que la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila o columna (Teorema de Gerschgorin).

Ejercicio 14 Sea A una matriz cuadrada, y P_s la suma de los módulos de los elementos de la s -ésima fila, excluyendo el elemento a_{ss} . Probar que todo autovalor de A satisface (Teorema de Brauer)

$$|\lambda - a_{s,s}| \leq P_s$$

para algún s .

Ejercicio 15 Probar que la norma infinito de una matriz es igual a la mayor de las sumas de los módulos de los elementos de una fila.

Ejercicio 16 Demostrar que para cualquier norma matricial $\| \cdot \|$ subordinada a una norma vectorial $\rho(A) \leq \| \|A\| \|$ donde $\rho(A)$ es el radio espectral de A .

Mostrar una matriz A y una norma $\| \cdot \|$ para la cual $\rho(A) \leq 1$ y sin embargo $\|A\| > 1$.

Ejercicio 17 Sea A , tal que sus autovectores forman una base. Muestre una norma $\| \cdot \|$ subordinada a una norma vectorial tal que $\rho(A) = \| \|A\| \|$.

Ejercicio 18 Demostrar que los autovalores de la matriz tridiagonal de $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \\ c & a & b & 0 \dots & \\ 0 & c & a & b & \dots \\ & & & & \\ 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son reales o complejos, son $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}} \cos(\frac{s\pi}{N+1})$, $s = 1, \dots, N$.
 Sug.: Hallar la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.