Análisis Numérico

Primer cuatrimestre 2022

Método SOR

Outline

Outline

1. Método SOR

2. Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Método SOR

Método SOR para $Ax = b$

Con la escritura habitual $A = L + D + U$, dado un parámetro ω, el método SOR construye la sucesión $\{x^k\}$ con

$$x^{k+1} = B_\omega x^k$$

siendo

$$B_\omega = (D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U\right)$$

Método SOR

Método SOR para $Ax = b$

Con la escritura habitual $A = L + D + U$, dado un parámetro ω, el método SOR construye la sucesión $\{x^k\}$ con

$$x^{k+1} = B_\omega x^k$$

siendo

$$B_\omega = (D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U\right)$$

KAHAN (Teorema 3.23 Apunte)

$$\rho(B_\omega) \geq |1 - \omega|$$

Método SOR

Método SOR para $Ax = b$

Con la escritura habitual $A = L + D + U$, dado un parámetro ω, el método SOR construye la sucesión $\{x^k\}$ con

$$x^{k+1} = B_\omega x^k$$

siendo

$$B_\omega = (D + \omega L)^{-1} \left((1-\omega)D - \omega U\right)$$

KAHAN (Teorema 3.23 Apunte)

$$\rho(B_\omega) \geq |1 - \omega|$$

Como consecuencia, para $\omega \in \mathbb{R}$, el método SOR es convergente solo si $0 < \omega < 2$

Outline

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Lema 3.18 Apunte

Si $A = L + D + U$ es tridiagonal entonces para $\alpha \neq 0$ tenemos

$$\det(D + L + U) = \det(D + \alpha L + \alpha^{-1} U)$$

Teorema

Sean $\lambda \neq 0$ y μ dado por

$$\mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega \lambda^{\frac{1}{2}}} \tag{1}$$

para algún $\omega \neq 0$. Entonces

$$\mu \text{ autovalor de } B_J \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ autovalor de } B_\omega$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Demostración. Usando que $\det(D+\omega L)^{-1} = \det(D)^{-1}$ tenemos si $\omega\lambda \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\det(B_\omega - \lambda I) &= \det((D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U) - \lambda I) \\
&= \det(D+\omega L)^{-1} \det\left((1-\omega)D - \omega U - \lambda(D+\omega L)\right) \\
&= \det D^{-1} \det\left((1-\omega)D - \omega U - \lambda(D+\omega L)\right) \\
&= \det\Big((1-\omega)I - \omega D^{-1}U - \lambda(I + \omega D^{-1}L)\Big) \\
&= \det\Big((1-\omega-\lambda)I - \omega D^{-1}U - \lambda\omega D^{-1}L\Big) \\
&= \omega^n \lambda^{\frac{n}{2}} \det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\lambda^{\frac{1}{2}}} I - \lambda^{-\frac{1}{2}} D^{-1}U - \lambda^{\frac{1}{2}} D^{-1}L\right) \\
&\overset{Lema 3.18}{=} \omega^n \lambda^{\frac{n}{2}} \det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\lambda^{\frac{1}{2}}} I - D^{-1}U - D^{-1}L\right) \\
&\overset{def.B_J}{=} \omega^n \lambda^{\frac{n}{2}} \det\left(\frac{1-\omega-\lambda}{\omega\lambda^{\frac{1}{2}}} I + B_J\right) \\
&= \omega^n \lambda^{\frac{n}{2}} \det\left(B_J - \frac{\omega+\lambda-1}{\omega\lambda^{\frac{1}{2}}} I\right)
\end{aligned}
$$

de donde sigue la demostración.

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?).

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.

<u>Caso 1</u> $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \leq 0$:

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.
<u>Caso 1</u> $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \leq 0$: En este caso

$$\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \leq 0 \qquad \forall\mu \text{ autovalor de } B_J.$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.
Caso 1 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \leq 0$: En este caso

$$\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \leq 0 \qquad \forall\mu \text{ autovalor de } B_J.$$

En este caso λ es complejo y tenemos

$$|\lambda| = \omega - 1 \qquad (\text{notar que } 1 < \tilde{\omega} < \omega)$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.
<u>Caso 1</u> $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \leq 0$: En este caso

$$\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \leq 0 \qquad \forall\mu \text{ autovalor de } B_J.$$

En este caso λ es complejo y tenemos

$$|\lambda| = \omega - 1 \qquad (\text{notar que } 1 < \tilde{\omega} < \omega)$$

Como $|\lambda|$ depende solo de ω, tenemos

$$\rho(B_\omega) = \omega - 1$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Supongamos A tridiagonal s.d.p. En este caso Jacobi y Gauss-Seidel convergen (¿por qué?). Si μ es autovalor de B_J, despejando $\lambda^{\frac{1}{2}}$ de (1) obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right)^2$$

Sea $\beta = \rho(B_J)$. Calculemos $\rho(B_\omega)$.

<u>Caso 1</u> $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \leq 0$: En este caso

$$\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \leq 0 \qquad \forall\mu \text{ autovalor de } B_J.$$

En este caso λ es complejo y tenemos

$$|\lambda| = \omega - 1 \qquad (\text{notar que } 1 < \tilde{\omega} < \omega)$$

Como $|\lambda|$ depende solo de ω, tenemos

$$\rho(B_\omega) = \omega - 1$$

Esto ocurre si

$$\tilde{\omega} \leq \omega \overset{Kahan}{<} 2, \qquad \text{con } \tilde{\omega} = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{\beta^2}$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Caso 2 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Caso 2 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ Existe μ autovalor de B_J tal que $\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ (*)

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Caso 2 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ Existe μ autovalor de B_J tal que $\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ (*)
Como $\omega^2\mu^2/4 \geq \omega - 1$, se tiene

$$\rho(B_\omega) = \max_{\mu \text{ autov } B_J \text{ con } (*)} f(\mu), \qquad \text{con } f(\mu) = \frac{1}{4}\left[\omega|\mu| + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

<u>Caso 2</u> $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ Existe μ autovalor de B_J tal que $\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ (*)
Como $\omega^2\mu^2/4 \geq \omega - 1$, se tiene

$$\rho(B_\omega) = \max_{\mu \text{ autov } B_J \text{ con } (*)} f(\mu), \qquad \text{con } f(\mu) = \frac{1}{4}\left[\omega|\mu| + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

Notemos que f es creciente como función de μ, por lo tanto si $\beta = \rho(B_J)$ tenemos

$$\rho(B_\omega) = g(\omega) \quad \text{con } g(\omega) = \frac{1}{4}\left[\omega\beta + \sqrt{\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

Caso 2 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ Existe μ autovalor de B_J tal que $\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ (*)
Como $\omega^2\mu^2/4 \geq \omega - 1$, se tiene

$$\rho(B_\omega) = \max_{\mu \text{ autov } B_J \text{ con } (*)} f(\mu), \qquad \text{con } f(\mu) = \frac{1}{4}\left[\omega|\mu| + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

Notemos que f es creciente como función de μ, por lo tanto si $\beta = \rho(B_J)$ tenemos

$$\rho(B_\omega) = g(\omega) \quad \text{con } g(\omega) = \frac{1}{4}\left[\omega\beta + \sqrt{\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

No es difícil ver que $g(\omega)$ es decreciente en $(0, \tilde{\omega}]$ con

$$g(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^2\beta^2/4 = \tilde{\omega} - 1$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Caso 2 $\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ Existe μ autovalor de B_J tal que $\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1) \geq 0$ (*)
Como $\omega^2\mu^2/4 \geq \omega - 1$, se tiene

$$\rho(B_\omega) = \max_{\mu \text{ autov } B_J \text{ con } (*)} f(\mu), \qquad \text{con } f(\mu) = \frac{1}{4}\left[\omega|\mu| + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

Notemos que f es creciente como función de μ, por lo tanto si $\beta = \rho(B_J)$ tenemos

$$\rho(B_\omega) = g(\omega) \quad \text{con } g(\omega) = \frac{1}{4}\left[\omega\beta + \sqrt{\omega^2\beta^2 - 4(\omega - 1)}\right]^2$$

No es difícil ver que $g(\omega)$ es decreciente en $(0, \tilde{\omega}]$ con

$$g(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^2\beta^2/4 = \tilde{\omega} - 1$$

Esto ocurre cuando

$$0 \overset{Kahan}{<} \omega \leq \tilde{\omega}$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

Parámetro óptimo para SOR para matrices tridiagonales s.d.p

Sea A tridiagonal s.d.p. Entonces Jacobi, Gauss-Seidel y SOR(ω) convergen para todo $\omega \in (0,2)$, con $\beta = \rho(B_J) < 1$, $\rho(B_{GS}) = \beta^2$ y

$$\rho(B_\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\omega\beta + \sqrt{(\omega\beta)^2 - 4(\omega-1)}\right]^2 & \text{si } 0 < \omega < \omega_{opt} \\ \omega - 1 & \text{si } \omega_{opt} \le \omega < 2 \end{cases}$$

con

$$\omega_{opt} = \frac{2(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta^2} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ademáms

$$\rho(B_{\omega_{opt}}) < \rho(B_\omega), \qquad \omega \in (0,2) \setminus \{\omega_{opt}\}$$

Método SOR para matrices tridiagonales s.d.p.

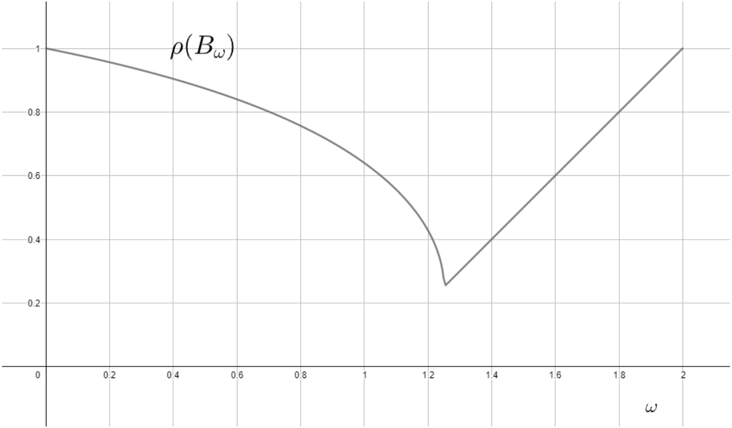

Figure: $\rho(B_\omega)$ si $\rho(B_J) = 0.8$ para $\omega \in (0, 2)$. $\omega_{opt} = 1.25$