Théorème IV. — *Pour qu'une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit qu'elle soit une forme linéaire sur* $(\mathcal{D})$, *continue relativement à la topologie induite par celle de* $(\mathcal{S})$ *sur* $(\mathcal{D})$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante, car alors $T(\varphi)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$, sous-espace dense de $(\mathcal{S})$, donc prolongeable d'une manière unique en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$.

Nous introduirons dans $(\mathcal{S}')$ une topologie, celle de dual de $(\mathcal{S})$, (chapitre III, § 3). $(\mathcal{S}')$ est complet, localement convexe, à base non dénombrable de voisinages. Il possède toutes les propriétés démontrées pour $(\mathcal{D}')$ au § 3 du chapitre III (à l'exception évidemment du critère de convergence, théorème XVI). En particulier $(\mathcal{S}')$ est un espace de Montel où les ensembles bornés sont relativement compacts ; $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont réflexifs, chacun est le dual de l'autre.

On peut donner une autre interprétation de $(\mathcal{S}')$.

Interprétation géométrique de $(\mathcal{S}')$.

Le théorème III permet de montrer ce qui suit :

Théorème V — *Pour qu'une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et suffit qu'elle soit la restriction à* R^n, *considéré comme ouvert de la sphère* S^n, *d'une distribution* $\overline{T}$ *sur la sphère* S^n.

1° La condition est suffisante. Si $\overline{T}$ est une distribution sur S^n, $\overline{T}(\overline{\varphi})$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{S^n}$; donc a fortiori sur le sous-espace $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ des fonctions nulles en ω ainsi que toutes leurs dérivées ; alors la restriction T de $\overline{T}$ à R^n, définie, pour $\varphi \in (\mathcal{D})_{R^n}$, par $T(\varphi) = \overline{T}(\overline{\varphi})$, est définie et continue, non seulement sur $(\mathcal{D})$ mais encore sur $(\mathcal{S})$, donc T appartient à $(\mathcal{S}')$.

2° La condition est nécessaire. Si T est une distribution $\in (\mathcal{S}')$ sur R^n, elle est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$, donc sur le sous-espace vectoriel $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, elle peut se prolonger en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{S^n}$, c'est-à-dire une distribution $\overline{T}$ sur la sphère S^n. Cette distribution $\overline{T}$ n'est évidemment pas unique ; on peut lui ajouter n'importe quelle distribution nulle sur $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$, c'est-à-dire de support ponctuel ω. D'ailleurs le théorème VII exprime simplement que, $(\mathcal{S})$ étant isomorphe à un sous-espace fermé $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ de $(\mathcal{D})_{S^n}$, son dual $(\mathcal{S}')$ est isomorphe au quotient de $(\mathcal{D}')_{S^n}$ par le sous-espace orthogonal à $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$. On peut voir qu'il s'agit là d'un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Comme nous l'avons fait remarquer page 236 la sphère S^n ne joue pas là un rôle particulier. On peut, par exemple, la remplacer par l'espace projectif P^n.

Caractérisation des distributions tempérées par leur croissance

Nous allons maintenant étudier la structure concrète des distributions $\in(\mathcal{S}')$. Le théorème qui suit s'étend à un ensemble borné ou à une suite (ou un filtre à base bornée ou dénombrable) convergeant vers o dans $(\mathcal{S}')$.

Théorème VI *Pour qu'une distribution* $T\in(\mathcal{D}')$ *soit tempérée, il faut et il suffit qu'elle soit une dérivée d'une fonction continue à croissance lente au sens usuel, c'est-à-dire d'une fonction qui est le produit de* $P(x) = (1 + r^2)^{k/2}$ *par une fonction continue bornée sur* R^n :

$$\text{(VII, 4; 1)} \qquad T = D^p[P(x)f(x)] = D^p\left((1+r^2)^{\frac{k}{2}} f(x)\right).$$

2° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit que toutes ses régularisées* $T * \alpha$, $\alpha\in(\mathcal{D})$, *soient des fonctions continues à croissance lente; il existe alors un nombre réel k tel que les* $(T*\alpha)/(1+r^2)^{k/2}$ *soient toutes des fonctions continues bornées sur* R^n.

3° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel k tel que la distribution* $T/(1+r^2)^{k/2}$ *soit bornée sur* $R^n(\in(\mathcal{B}')$, *voir chapitre* VI, § 8), *et suffisant que pour toute fonction* $\varphi\in(\mathcal{S})$, φT *soit bornée sur* R^n.

4° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel k tel que les distributions* $\tau_h T/(1+|h|^2)^{k/2}$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$, *et suffisant que, pour toute fonction numérique* $c(h)$ *à décroissance rapide pour* $|h|\to\infty$, *les* $c(h)\tau_h T$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$.

C'est ce théorème qui justifie le nom de distributions à croissance lente. Il montre en particulier, comme nous l'avions dit au § 2 :

a) que e^x (cas d'une variable, $n=1$) $\notin(\mathcal{S}')$, car aucune de ses primitives n'est à croissance lente;

b) que la série $\sum_0^\infty x^m/m!$ (même cas, $n=1$) n'est pas convergente dans $(\mathcal{S}')$, car les sommes partielles $\sum_0^m$ ne sont pas, même après un nombre quelconque d'intégrations, bornées par un polynôme.

D'autre part, toute distribution tempérée est d'ordre borné sur R^n.

Rappelons qu'on peut remplacer 2° par un théorème plus fin (voir théorème XXII du chapitre VI).

Nous démontrerons le théorème dans l'ordre suivant :

a) Si $T \in (\mathcal{S}')$, il existe k tel que $T/(1+r^2)^{k/2}$ soit une distribution bornée sur R^n. En effet $T(\varphi)$ est borné lorsque φ parcourt un voisinage de 0 dans $(\mathcal{S})$; donc il existe un entier m et un nombre k réel tel que, si les $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}\varphi_j$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}_{L^1})$ (chapitre VI, § 8), les $T(\varphi_j)$ convergent vers 0. Mais

$$(\text{VII}, 4\ ;\ 2) \qquad T(\varphi) = [T/(1+r^2)^{k/2}]\,.\,(1+r^2)^{k/2}\varphi\ ;$$

cela prouve que $T/(1+r^2)^{k/2}$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_{L^1})$, donc $\in (\mathcal{B}')$. La structure des distributions bornées sur R^n (chapitre VI, théorème XXV, $p=\infty$) montre alors que T est somme de dérivées de fonctions continues à croissance lente ; par intégration on pourra ramener cette somme à une dérivée unique (mais avec une valeur plus grande de k). La réciproque étant évidente, cela prouve (1°).

Remarque Si, au lieu d'une distribution, on avait une suite T_j convergeant vers 0 dans $(\mathcal{S}')$, on prouverait seulement (voir page 202, remarque 2°) que les $T_j/(1+r^2)^{k/2}$ convergent faiblement vers 0 dans $(\mathcal{B}')$; on en déduirait que les $T_j/(1+r^2)^{\frac{k+1}{2}}$ convergent fortement vers 0 dans $(\mathcal{B}')$.

b) Si, pour toute $\varphi \in (\mathcal{S})$, φT est dans $(\mathcal{B}')$, on a aussi

$$(\text{VII}, 4\ ;\ 3) \qquad \varphi T = \left(\frac{1}{1+r^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\left((1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}\varphi\right)T\right] \in (\mathcal{D}'_{L^1})$$

(théorème XXVI (1°) du chapitre VI). On peut alors poser, pour $\varphi \in (\mathcal{S})$,

$$(\text{VII}, 4\ ;\ 4) \qquad T\,.\,\varphi = \varphi T\,(1) = \iint \cdots \int \varphi T.$$

$T\,.\,\varphi$ est une forme linéaire sur $(\mathcal{S})$, continue parce que limite de formes linéaires continues $\alpha_\nu T\,.\,\varphi$, $\alpha_\nu \in (\mathcal{D})$ (théorème de Banach-Steinhaus ; voir théorème XX du chapitre VI). Donc $T \in (\mathcal{S}')$. *a*) et *b*) prouvent (3°).

c) Si $T \in (\mathcal{S}')$, son expression suivant (VII, 4 ; 1) montre que les $\tau_h T/(1+|h|^2)^{k/2}$ sont bornées dans $(\mathcal{D}')$. Réciproquement, s'il en est ainsi, alors (chapitre VI, théorème XXII) il existe un entier $m \geqslant 0$, tel que, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D}^m_K)$, les $\tau_h(T * \check{\alpha})/(1+|h|^2)^{k/2}$ soient, sur un ouvert Ω relativement compact, des fonctions continues bornées ; cela revient à dire que $(T * \alpha)/(1 + r^2)^{k/2}$ est une fonction continue bornée sur R^n, ou que $T * \alpha$ est à croissance lente; la formule (VI, 6 ; 22) montre alors que l'on a (VII, 4 ; 1), donc que $T \in (\mathcal{S}')$.

d) Si, quelle que soit la fonction $c(h)$ à décroissance rapide pour $|h| \to \infty$, les distributions $c(h)\tau_h T$ forment un ensemble borné dans $(\mathcal{D}')$, alors les nombres $c(h)\tau_h T \cdot \varphi$ sont, pour $h \in R^n$, bornés pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$ fixée; autrement dit la quantité $\tau_h T \cdot \varphi$ est, pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$, une fonction de h à croissance lente. Montrons que cette croissance est uniformément lente lorsque φ parcourt $(\mathcal{D}_K)$. Pour h fixé, la quantité

$$\text{(VII, 4 ; 5)} \qquad \log |\tau_h T \cdot \varphi| / \log \sqrt{1 + |h|^2}$$

est une fonction continue de $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$. En vertu de l'hypothèse, ces fonctions continues de φ sont, lorsque h varie dans R^n, bornées dans leur ensemble pour toute φ fixée. Donc, d'après un théorème classique de Baire[1], ces fonctions de φ sont bien bornées dans leur ensemble sur un ouvert convenable de $(\mathcal{D}_K)$. Soit k la borne supérieure. Alors les $\tau_h T/(1 + |h|^2)^{k/2}$ sont bornées pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$, donc aussi pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, et par suite forment un ensemble borné dans $(\mathcal{D}')$, et d'après *c*), $T \in (\mathcal{S}')$.

Alors *c*) et *d*) démontrent 4°.

e) Supposons que, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D})$, $(T * \alpha)$ soit à croissance lente (cette croissance pouvant a priori dépendre de α). Alors, pour toute fonction $c(h)$ à décroissance rapide, les fonctions $c(h)\tau_h(T * \alpha)$ sont bornées sur tout compact de R^n pour α fixe. Cela prouve (théorème XXII du chapitre VI) que les distributions $c(h)\tau_h T$ sont bornées dans $(\mathcal{D}')$; (*d*) prouve alors que $T \in (\mathcal{S}')$. Alors (1°) et (*e*) prouvent (2°).

Remarque La borne inférieure des valeurs de k possibles dans ce théorème peut être appelée l'ordre de croissance de T à l'infini. Toutes les définitions donnent la même valeur de k, si pour (1°) on prend *une somme finie* de dérivées.

Mesures positives tempérées Nous dirons qu'une mesure μ sur R^n est à croissance lente dans l'espace $(\mathcal{C}')$ des mesures, s'il existe un entier l tel que l'intégrale

$$\text{(VII, 4, 6)} \qquad \iint \cdots \int \frac{|d\mu|}{(1 + r^2)^l}$$

[1] Voir BOURBAKI [2], § 5, n° 4, théorème 2, page 111