FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 6

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

INTEGRAL DE LEBESGUE

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

   a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale
   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$
   Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale
   $$\int_E f(x+v)\,dx = \int_{E+v} f(x)\,dx.$$

   b) Probar las mismas afirmaciones para funciones f integrables en $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.

   a) Probar que si f es no negativa entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale
   $$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)\,dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$
   Concluir que si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces para todo $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ vale
   $$\int_E f(av)\,dx = \frac{1}{|a|^n}\int_{aE} f(x)\,dx.$$

   b) Probar las mismas afirmaciones para funciones f integrables en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que $\int_A f(x)\,dx = 0$ para todo $A \subseteq E$ medible. Probar que $f = 0$ en casi todo punto de E.

4. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que
   $$\left|\int_E f(x)\,dx\right| = \int_E |f(x)|\,dx.$$
   Mostrar que f tiene signo constante en c.t.p. en E.

5. Sean $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y f integrable sobre E.

   a) Probar que si $\int_E |f_k - f| \to 0$ si $n \to +\infty$ entonces $f_k \xrightarrow{m} f$ sobre E.

   b) ¿Vale la recíproca?

6. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\geq k\}} |f(x)|\, dx = 0$$

7. a) Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.
   b) Mostrar que en el Lema de Fatou la hipótesis de que las funciones en la sucesión estén acotadas inferiormente por una función integrable es necesaria.

8. Sea (f_k) una sucesión de funciones integrables definidas sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ que converge en c.t.p. de E a una función f.
   a) Probar que si $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E |f_k(x)|\, dx < +\infty$ entonces f es integrable.
   b) Probar que si $0 \leq f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\int_E f = \lim_{k\to+\infty} \int_E f_k.$$

9. Probar que si $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$$

10. Probar el Teorema de Convergencia Dominada utilizando el Teorema de Egorov.

11. Probar que si $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)\, dx = 0.$$

12. Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, dx < +\infty.$$

    Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente p.c.t. $x \in E$ y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

13. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ p.c.t. $x \in [0, 1]$ e integrable en $[0, 1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n\, dx = \alpha$$

    entonces $g = \chi_E$ para algún conjunto $E \subseteq [0, 1]$ medible.

14. Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tal que $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que para todo n, $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| \to 0$ si $n \to +\infty$.

15. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
    - para todo $x \in [0,1]$ la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable en $[0,1]$, y
    - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función acotada de (x,y).

    Probar que

    a) Para todo $x \in [0,1]$ la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

    b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$.

TEOREMAS DE FUBINI Y TONELLI

16. Ejercicio 1 de [W-Z, Cap. 6].[1]
17. Ejercicio 2 de [W-Z, Cap. 6].
18. Ejercicio 3 de [W-Z, Cap. 6].
19. Sea $E \subseteq [0,1]^2$ tal que $|E_x| = |[0,1] - E_y| = 0$ para todo $(x,y) \in [0,1]^2$. Probar que E es no medible.
20. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $k(x,y) = xy$.

    a) Probar que $k^{-1}(E)$ es medible para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ medible.

    b) Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible entonces $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula $h(x,y) = f(xy)$ también es medible.
21. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ medibles y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $h(x) = |(A - x) \cap B|$. Probar que h es medible y satisface $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = |A||B|$.
22. Ejercicio 13 de [W-Z, Cap. 6].

[1] R. Wheeden, A. Zygmund. Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis.