FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 5

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

FUNCIONES MEDIBLES

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.

2. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f = \alpha$ es medible. ¿Es f medible?
   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?

3. Sea $\mathcal{B}$ la σ-algebra de Borel en $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar que
   a) si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in \mathcal{B}$.
   b) si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A : B \in \mathcal{B}, A \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$, entonces f es medible si y solo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
   a) Probar que si f es monótona, entonces f es medible Borel.
   b) Probar que si f es derivable sobre $\mathbb{R}$, entonces f' es medible Borel.

5. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, entonces existe $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ en casi todo punto.

6. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es continua en casi todo punto entonces es medible.

7. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^n$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función medible. Probar que dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe $g : I \to \mathbb{R}$ continua tal que
   $$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \delta\}| < \varepsilon.$$
   Sugerencia. Mostrar primero que dada una función simple $\varphi : I \to \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ continua tal que
   $$|\{x \in I : g_\varepsilon(x) \neq \varphi(x)\}| < \varepsilon.$$

8. Sea f la función de Cantor–Lebesgue y $g : [0, 1] \to [0, 2]$ definida por
   $$g(x) = f(x) + x.$$
   - Probar que g es continua y biyectiva con inversa g^{-1} continua.
   - Probar que $|g(C)| = 1$ donce C es el conjunto de Cantor.
   - Mostrar que existe un conjunto medible $E \subseteq [0, 1]$ tal que $g(E)$ no es medible. ¿Contradice esto la medidabilidad de g^{-1}?
   - Mostrar que existe una conjunto medible que no es boreliano.
   - Hallar h_1 medible Borel y h_2 medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

9. Sea E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que para cada $x \in E$ existe $M_x > 0$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$. Probar que si para cada $\alpha > 0$ existe $k_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|\{f_k < \alpha\}| \leq \frac{\alpha}{k}$ para todo $k \geq k_\alpha$, entonces E tiene medida nula.

10. Sea E medible de medida finita y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que para cada $x \in E$ existe $M_x > 0$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq M_x$. Probar que dado $\varepsilon > 0$ existen $F_\varepsilon \subseteq E$ cerrado y $M_\varepsilon > 0$ tales que
$$|E - F_\varepsilon| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \sup_{x\in F_\varepsilon}\left[\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|\right] \leq M_\varepsilon.$$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(x)$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
    a) La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente.
    b) Para cada $\delta > 0$ la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $[\delta, +\infty)$.
    c) No existe $E \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ de medida nula tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja uniformemente sobre E^c.

12. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E y finitas c.t.p. tales que convergen c.t.p. a una función $f : E \to \mathbb{R}$ medible. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos medibles de E que verifica
    - $|E - \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i| = 0$
    - La sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre cada E_i.

13. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre E y finitas en casi todo punto. Consideremos además una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos medibles de E tal que
$$\lim_{k\to+\infty} |E - E_k| = 0.$$
Probar que si $f : E \to \mathbb{R}$ es tal que $\chi_{E_k} f_k \xrightarrow{m} f$ entonces $f_k \xrightarrow{m} f$.

14. Sean E un conjunto medible y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones medibles definidas sobre E y finitas en casi todo punto. Supongamso que $f_k \xrightarrow{m} f$ y $g_k \xrightarrow{m} g$ sobre E.
    a) Probar que $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$ sobre E.
    b) Probar que si E tiene medida finita entonces $f_k g_k \xrightarrow{m} fg$ sobre E.
    c) Mostrar que la hipótesis de medida finita del item anterior no puede retirarse.
    d) Probar que si E tiene medida finita y g es no nula c.t.p. entonces $\frac{f_k}{g_K} \xrightarrow{m} \frac{f}{g}$.

Definición. Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, y x_0 un punto límite de E que pertence a E. Decimos que f es *semicontinua superiormente* (resp. *inferiormente*) si
$$\limsup_{x\to x_0,\, x\in E} f(x) \leq f(x_0) \qquad \left(\text{resp. } \liminf_{x\to x_0,\, x\in E} f(x) \geq f(x_0)\right).$$
Si f es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) en todo punto límite de E que está en E, decimos que f es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) *relativo* a E. Recordemos que
$$\limsup_{x\to x_0,\, x\in E} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup\{f(x) : x \in B'_\delta(x_0) \cap E\}, \qquad \liminf_{x\to x_0,\, x\in E} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf\{f(x) : x \in B'_\delta(x_0) \cap E\}$$
donde $B'_\delta(x_0) = B_\delta(x_0) - \{x_0\}$.

15. Probar que toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semicontinua (inferior o superiormente) relativa a $\mathbb{R}^n$ es medible Borel.