FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 4

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

MEDIDA DE LEBESGUE

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A,B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

2. Sea $E = \{x \in (0,1)$: en el desarrollo decimal de x no aparece el dígito $7\}$. Probar que E tiene medida nula.

3.
   a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de medida nula.
   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida nula.

4. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible tal que $E = A \cup B$ con $|B| = 0$. Probar que A es medible.

6. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación $T(x) = x + v$. Probar que
   a) $|T(E)|_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
   b) Si E es medible, entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r \cdot a : a \in A\}$. Probar que
   a) $|rA|_e = r^n |A|_e$.
   b) Si A es medible, entonces rA es medible y $|rA| = r^n|A|$.

8. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto tal que existe A de medida nula con $E \subseteq A$.
   a) Probar que E tiene medida nula.
   b) Deducir que el cardinal de la familia de conjuntos medibles es 2^c. ¿Cuál es el cardinal de la familia de conjuntos no medibles? (Tener en cuenta que se probará que cualquier intervalo abierto contiene conjuntos no medibles)

9. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ probar que existe $H \supseteq E$ de tipo G_δ tal que $|A|_e = |H|$.

10. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.
    a) Calcular $|B(0,r)|$ en términos de $|B(0,1)|$.

b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por la fórmula

$$f(r) = |A \cap B(0, r)|$$

es continua.

c) Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces para cada $0 \leq s \leq |A|$ existe $B \subseteq A$ tal que $|B| = s$.

d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible con $0 < |A| < +\infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$ existen n subconjuntos disjuntos de A, A_j, $1 \leq j \leq n$, tales que $|A_j| = |A|/n$.

11. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_n$ definimos

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

a) $\limsup_{n\to\infty} A_n$ y $\liminf_{n\to\infty} A_n$ son medibles.

b) $|\liminf_{n\to\infty} A_n| \leq \liminf_{n\to\infty} |A_n|$

c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$ vale $|\cup_{k=n}^{\infty} A_k| < +\infty$ entonces $|\limsup_{n\to\infty} A_n| \geq \limsup_{n\to\infty} |A_n|$.

d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ entonces $|\limsup_{n\to\infty} A_n| = 0$.

12. Construir un conjunto C_δ de $[0, 1]$ siguiendo la construcción del conjunto de Cantor salvo que en el paso k-ésimo cada intervalo que se extrae es de longitud $\delta 3^{-k}$ para cierto $0 < \delta < 1$.

a) Probar que C_δ es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

b) Construir un abierto en $\mathbb{R}$ con frontera de medida positiva.

13. Probar la equivalencia de los siguientes enunciados.

a) E es medible.

b) Para todo $\epsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E - F|_e < \epsilon$.

c) Existen H de clase F_σ y N de medida nula tales que $E = H \cup N$

14. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq R^n$ se verifica

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

a) Todo conjunto medible satisface la condición de Carathéodory.

b) Si E es acotado y satisface la condición de Carathéodory, entonces E es medible.

c) E es medible si y solo si satisface la condición de Carathéodory.

15. a) Probar que si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e = \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente de conjuntos $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $|E_k|_e < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e < \lim_{k\to\infty} |E_k|_e.$$

16. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}$ definimos su *medida interior* por la fórmula

$$|E|_i = \sup\{|F| : F \subseteq E,\ F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

a) $|E|_i \leq |E|_e$
b) Si E es medible, $|E|_i = |E|_e$
c) Si $|E|_e < +\infty$ y $|E|_i = |E|_e$ entonces E es medible
d) Existe E no medible tal que $|E|_i = |E|_e$.
e) $E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$
f) Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son disjuntos, entonces $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.

17. a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_k$ disjuntos tales que $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_e < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$.
b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_k$ tal que $\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|_i > \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_i$.
c) Construir $E \subset \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < +\infty$ y $|E|_e = +\infty$.

18. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y $A \subseteq E$. Probar que

$$|E| = |A|_i + |E - A|_e.$$

19. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida positiva.

a) Mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|I| < \alpha|E \cap I|$.
b) Probar que existe $r_0 > 0$ tal que $E \cap (E + v) \neq \emptyset$ para todo $v \in B(0, r_0)$.
c) Concluir que el conjunto de las diferencias de E definido como

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

20. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal c. *Sugerencia.* Recordar que si α es un cardinal infinito, entonces $\alpha^2 = \alpha$.

21. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que para todo par de puntos $x, y \in E$ se satisface

$$x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x+y}{2} \notin E.$$

Probar que E tiene medida nula. *Sugerencia.* Mostrar que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para todo intervalo I se tiene $|E \cap I| \leq \alpha|I|$.