FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 3

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

It is not enough to be in the right place at the right time. You should also have an open mind at the right time.

Paul Erdös

A. Convergencia puntual y uniforme de funciones

Definición. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones reales o complejas definidas en un conjunto E tal que para cada $x \in E$ la sucesión de números $\{f_n(x)\}$ converge. Definimos la función límite f de $\{f_n\}$ como

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in E.$$

En este caso diremos que $\{f_n\}$ converge a f *puntualmente* en E.
Definición. Diremos que una sucesión de funciones reales o complejas $\{f_n\}$ definidas en E converge *uniformemente* en E a una función f si para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in E.$$

1. Definir convergencia puntual y uniforme para una sucesión de funciones $f_n : E \to X$, $n \geq 1$, siendo (X, d_X) un espacio métrico arbitrario.

2. Sean (X, d) un espacio métrico y A un conjunto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $A \to X$ y sea $f : A \to X$ una función. Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a f sobre A si y solamente si existen $\alpha > 0$, una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. Encontrar el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones:

   a) $(f_n)_{n\geq 1}$ con $f_n : x \in (-1, 1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
   b) $(g_n)_{n\geq 1}$ con $g_n : x \in (1, +\infty) \mapsto x^{-n} e^x \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
   c) $(h_n)_{n\geq 1}$ con $h_n : x \in [0, 1] \mapsto n^2 x(1 - x^2)^n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Mostrar además que la primera converge uniformemente sobre $(0, \frac{1}{2})$ y que la segunda converge uniformemente sobre $[2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia de la tercera sobre $[0, 1]$?

4. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

   a) $f_n(x) = n^{-1} \sin nx$, en $\mathbb{R}$;
   b) $f_n(x) = \sin(x/n)$, en $\mathbb{R}$;
   c) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$, en $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}^2$;
   d) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$, en $[0, 1]$;

e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ o } x = 0; \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ y } (a,b) = 1; \end{cases}$ en $[0,1]$;

f) $f_n(z) = z^n$, en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5. Sea X un conjunto, sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

   a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

   b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{C}$, entonces f es un elemento de $B(X)$.

   c) La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{C}$ si y solamente si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en el espacio métrico $(B(X), d_\infty)$.

   d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ es uniformemente acotada.

6. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

   para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{nx^2}{1+nx^2} \in \mathbb{R}$. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f_n')_{n\geq 1}$.

8. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en un conjunto E de un espacio métrico. Sea x un punto de acumulación de E tal que para todo n existe el límite $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$. Demostrar que

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t).$$

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. ¿Es uniformemente continua la función f?

10. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones $X \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a funciones f y g, respectivamente.

    a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$ sobre X.

    b) Si las dos sucesiones están uniformemente acotadas, entonces la sucesión $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg sobre X.

11. Sea X un espacio métrico compacto y sea A un conjunto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función $g : A \to X$, entonces la sucesión $(f_n \circ g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente sobre A a la composición $f \circ g$.

12. *Teorema de Dini.* Sea X un espacio métrico compacto. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ en una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ tal que

    - $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$, y
    - $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua,

    entonces la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f en X.

13. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas $X \to \mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f si y solamente si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X que converge a un punto x la sucesión $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$.

14. Ejercicio 9 de [R, cap 7].[1]

Definición. Si X es un espacio métrico, $\mathcal{C}(X)$ es el conjunto de todas las funciones con valores en $\mathbb{C}$ continuas y acotadas. En $\mathcal{C}(X)$ consideramos la distancia $d_\infty(f, g) = \|f - g\|$ siendo

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

15. Demostrar que $(\mathcal{C}(X), d_\infty)$ es un espacio métrico. *Observación.* Notar que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(X)$ si y solo si f_n converge a f uniformemente en X.

16. Demostrar que $\mathcal{C}(X)$ es un espacio métrico completo.

B. Equicontinuidad

Definición. Una sucesión $\{f_k\}$ de funciones definidas en un conjunto E se dice *puntualmente acotada* en E si la sucesión de números $\{f_k(x)\}$ es acotada para cada $x \in E$. Decimos que $\{f_k\}$ es *uniformemente acotada* en E si existe alguna constante M tal que

$$|f_n(x)| < M \qquad \forall x \in E.$$

Definición. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones reales o complejas en un conjunto E de un espacio métrico (X, d) es *equicontinua* en E, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in E,\ d(x, y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Observación. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas en un espacio métrico X es uniformemente acotada si y solo si $\{f_n\}$ es acotada en $\mathcal{C}(X)$. Además $\{f_n\}$ converge unifomemente a $f \in \mathcal{C}(X)$ si y solo si $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(X)$.

17. Mostrar una sucesión de funciones continuas en $[0, 1]$ no uniformemente acotada que converge puntualmente a una función continua acotada. *Ayuda.* Ver Ejemplo 7.6 de R.

18. Mostrar un ejemplo de una sucesión de funciones acotada en $\mathcal{C}([0, 1])$ que no tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}([0, 1])$. *Ayuda.* Ver Ejemplo 7.21 de R.

19. Sean X e Y dos espacios métricos.

    a) Una familia finita de funciones $X \to Y$ continuas en un punto x de X es equicontinua en x.

    b) Sea $B(X, Y)$ el espacio métrico de las funciones acotadas $X \to Y$. La clausura de un subconjunto equicontinuo de $B(X, Y)$ es equicontinua.

    c) Si X es compacto, entonces toda familia *equicontinua en cada punto*[2] $x \in X$ de funciones $X \to Y$ es equicontinua en X.

    d) Si X es compacto, una sucesión de funciones continuas $X \to Y$ que converge uniformemente es equicontinua en X.

[1] W. Rudin. Principios de Análisis Matemático

[2] Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es equicontinua en $x_0 \in X$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ con $d_X(x, x_0) < \delta$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

e) Si X es compacto, entonces una sucesión de funciones $X \to Y$ que es equicontinua en X y converge puntualmente converge uniformemente.

20. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

para cada $x \in [a,b]$, entonces la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente en $[a,b]$.

C. Misceláneos

21. Probar que una función monótona en $\mathbb{R}$ tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades (de salto finito).
22. Ejercicio 13 de [R, cap 7].
23. Ejercicio 14 de [R, cap 7].
24. Ejercicio 17 de [R, cap 7].