FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 2

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

"Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be"

Bertrand Russel

A. Sucesiones en espacios métricos

Definición. Dado un espacio métrico (X, d), decimos que una sucesión $\{p_n\} \subseteq X$ *converge* a $p \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0.$$

Notar que $\{d(p_n, p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales. En este caso decimos que la sucesión $\{p_n\}$ es *convergente* y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

(si es necesario, se aclara que la convergencia es en X). Una sucesión que no es convergente se dice que es *divergente*.

1. Sea $\{p_n\} \subseteq X$ una sucesión en un espacio métrico X. Probar
   a) $\{p_n\} \subseteq X$ converge a p si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ todos los términos salvo a lo sumo una cantidad finita pertenecen a $N_\varepsilon(p)$.
   b) Si $\{p_n\} \subseteq X$ converge a p y a q en X, entonces $p = q$.
2. Probar que toda sucesión convergente en un espacio métrico es acotada.
3. Sea E un subconjunto de un espacio métrico X. Demostrar que $p \in \overline{E}$ si y solo si existe una sucesión $\{p_n\} \subseteq E$ que converge a p.
4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^k$ y $x \in \mathbb{R}^k$. Escribamos
   $$x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k), \qquad x = (x^1, x^2, \dots, x^k).$$
   Demostrar que
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{si y solo si} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^i = x^i \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

Definición. Sea $\{p_n\}_n$ una sucesión y $\{n_k\}_k$ una sucesión de números enteros monótona creciente, o sea, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Decimos que $\{p_{n_k}\}_k$ es una *subsucesión* de $\{p_n\}$. O sea, la subsucesión es $p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, \dots$.

5. *a*) Sea $\{p_n\} \subset X$ una sucesión en un espacio métrico compacto X. Probar que $\{p_n\}$ tiene una subsucesión convergente en X. *Sugerencia.* Ya sabemos que todo subconjunto infinito de un espacio métrico compacto tiene un punto límite.

   b) Probar que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente.

Definición. El diámetro de un conjunto $E \subseteq X$ de un espacio métrico (X, d) es el número (posiblemente infinito)

$$\operatorname{diam} E = \operatorname{ínf}\{d(p,q) : p, q \in E\}.$$

6. Probar que si E es un subconjunto de un espacio métrico, entonces $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \overline{E}$.

Definición. Una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico (X, d) es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$.

7. Ejercicio 20 de [R, cap 3].[1]

8. Mostrar que en todo espacio métrico una sucesión de Cauchy es acotada.

9. Sea $\{p_n\}$ una suceción de Cauchy en un espacio métrico compacto X. Probar $\{p_n\}$ es convergente a algún punto de X. *Sugerencia.* Si el conjunto $\{p_n\}$ es infinito, entonces sabemos que tiene un punto límite p en X. Probar que p es el límite de toda la sucesión.

10. Probar que en $\mathbb{R}^k$ toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición. Un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

11. Ejercicios 21 de [R, cap 3].

12. Ejercicios 22 de [R, cap 3].

13. Ejercicios 23 de [R, cap 3].

14. Ejercicios 24 de [R, cap 3]. En vez de *completez* solemos decir *completación.*

15. Ejercicios 25 de [R, cap 3].

B. Funciones en espacios métricos

Definición. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos, $E \subseteq X$, $f : E \to Y$ una función, y p un punto límite de E. Decimos que $f(x)$ *tiende a* $q \in Y$ *cuando* x *tiende a* p y escribimos

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E \quad \text{y} \quad 0 < d_X(x,p) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y(f(x), q) < \varepsilon$$

Si además $p \in E$ y $q = f(p)$ decimos que f es continua en el punto p. Si f es continua en todos los puntos de E decimos que f es continua en E.

Notar que en la definición de límite, no se necesita $p \in E$ (f puede no estar definida en p).

16. Probar que si f tiene límite en p, el límite es único.

[1]W. Rudin. Principios de Análisis Matemático

17. Con X, Y, E, f y p como en la definición, probar que
$$\lim_{x\to p} f(x) = q$$
si y solo si
$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$$
para toda sucesión $\{p_n\} \subseteq E$ que converge en X a p.

18. Probar los siguientes resultados.
   a) Una función $f : X \to Y$ de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continua en X si y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo abierto V de Y. Notación: Para $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ es la *imagen inversa* de V por f.
   b) Una función $f : X \to Y$ de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continua en X si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo cerrado C de Y.

19. Para $1 \le i \le k$ sea $f_i : X \to \mathbb{R}$ una función real definida en el espacio métrico X. Definimos la función $f : X \to \mathbb{R}^k$ por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$ para $x \in X$. Probar que f es continua en X si y solo si cada f_i es continua en X.

20. Sea f una función continua definida en un espacio métrico compacto X con valores en un espacio métrico Y. Probar que $f(X)$ es compacto en Y. Notación: $f(X) = \{y \in Y : y = f(x)$ para algún $x \in X\}$ es la imagen de X por f.

Definición. Sea $f : X \to Y$ una función de con (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Decimos que f es *uniformemente continua* en X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $p, q \in X$ y $d_X(p, q) < \delta$ entonces $d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$.

21. Probar que si f es una función continua en un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y, entonces f es uniformemente continua en X.

22. Ejercicio 2 de [R, cap 4]

23. Ejercicio 3 de [R, cap 4]

24. Ejercicio 4 de [R, cap 4]

25. Ejercicio 5 de [R, cap 4]

26. Ejercicio 6 de [R, cap 4]

27. Ejercicio 13 de [R, cap 4]

28. Ejercicio 15 de [R, cap 4]

29. Ejercicio 18 de [R, cap 4]

30. Ejercicio 22 de [R, cap 4]

31. Sean X e Y espacios métricos, y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

32. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$d(x, x_0) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) - \epsilon < f(x) \qquad (\text{resp. } f(x_0) + \epsilon > f(x)).$$
Probar que

a) f es continua en x_0 si y solo si f es semicontinua infereiormente y superiormente en x_0.

b) f es semicontinua inferioremnte si y solo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) f es semicontinua superiormente si y solo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Si $A \subseteq X$ y χ_A es su función característica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y solo si A es abierto (resp. cerrado).

33. Consideramos las funciones $e, i : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$e(f) = f(0), \qquad i(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

a) Demostrar que si usamos en $\mathcal{C}([0,1])$ la distancia d_∞ entonces ambas funciones resultan continuas. ($d_\infty(f,g) = \sup(|f(x) - g(x)| : x \in [0,1])$.)

b) Demostrar que si en cambio usamos la distancia d_1, entonces i es continua pero e no lo es. ($d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$.)

c) Analizar si es posible que una función $\xi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para d_1 pero no para d_∞.