FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS REAL – PRÁCTICA 1

Licenciatura en Matemática – Primer Cuatrimestre 2020

"Muchos resultados principales del Análisis no tienen nada que ver con la naturaleza algebraica de los números reales y sólo se apoyan en aquellas propiedadedes de los números que están relacionadas con el concepto de distancia. Así, llegamos al concepto de espacio métrico, uno de los más importantes de la matemática moderna."

Kolmogorov

A. Métricas y Espacios Métricos

1. Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$ y, para $n = 2$, graficar las bolas $B(0, 1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1 para cada métrica.

   a) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

   b) $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   c) $d_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

   Mostrar que las tres métricas son topológicamente equivalentes (o sea, que $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y $(\mathbb{R}^n, d_3)$ tienen los mismos conjuntos abiertos).

2. Sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n | a, \quad p^{n+1} \not| a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

   donde p es un número primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = N(a - b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

3. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

   Probar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ). (δ se llama *métrica discreta* y (X, d) es un *espacio métrico discreto*.)

4. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n) \text{ es acotada}\}$, y considerar la función $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por

$$d\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

   Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

5. Considerar el espacio $\mathcal{C}[a,b]$ de funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Probar que los siguientes son espacios métricos:
   a) $(\mathcal{C}[a,b], d_1)$ con $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.
   b) $(\mathcal{C}[a,b], d_\infty)$ con $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

6. Sean (X, d_1) y (X, d_2) espacios métricos.
   a) Probar que $(X_1 \times X_2, d)$ es un espacio métrico con d definida por $d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.
   b) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

7. Sea (X,d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d. Observar que (X, d') es un espacio acotado.

8. Sean (X_n, d_n) espacios métricos para cada $n \in \mathbb{N}$ con $0 \le d_n(x,y) \le 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

   Probar que d es una métrica en X.

9. Usando los dos ejercicios previos, si (X,d) es un espacio métrico, construir una métrica sobre $X^{\mathbb{N}}$, el conjunto de sucesiones de X.

B. Algunas propiedades topológicas

---

10. Sea (X,d) un espacio metrico, y $A, B \subseteq X$.
    a) Probar las siguientes propiedades del interior de un conjunto.
       1) $A^\circ = \bigcup\{G \subseteq A : G \text{ abierto}\}$
       2) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$
       3) Si $A \subseteq B$ entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$
       4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?
       5) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?
    b) Probar las siguientes propiedades de la clausura.
       1) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ cerrado}\}$

2) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$
3) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?
5) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
6) $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

c) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura.

1) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$
2) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$
3) ¿Valen las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

d) Probar las siguientes propiedades de la frontera de un conjunto.

1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
2) ∂A es cerrado
3) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $r > 0$ y $a \in X$ se define la *bola cerrada de centro a y radio r* como el conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$.

    a) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$

    b) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$

12. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) dos espacios métricos. Considerar el espacio métrico $(X \times Y, d)$ con d la métrica definida en el ejercicio 6*a*. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ vale

    a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

    b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

13. Se llama *conjunto derivado* A' de un conjunto A al conjunto de todos los puntos de acumulación de A. Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \subseteq X$, probar las siguientes propiedades del conjunto derivado.

    a) A' es cerrado

    b) Si $A \subseteq B$ entonces $A' \subseteq B'$

    c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

    d) $\overline{A} = A \cup A'$

    e) $(\overline{A})' = A'$

14. Dado un espacio métrico (X,d), probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subseteq X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

15. *a*) Determinar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuales son cerrados o abiertos.

$$[0,1], \qquad (0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{Q} \cap [0,1], \qquad \mathbb{Z}, \qquad [0,1) \cup 2$$

   b) Caracterizar los conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida por usual en $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico.

16. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$ se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Probar:

   a) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

   b) $x \in A \Longrightarrow d_A(x) = 0$

   c) $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$

   d) $\{x \in X : d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

   e) $\{x \in X : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

17. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos, se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Determinar si las siguientes afiermaciones son verdaderas o falsas:

   a) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

   b) $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

   c) $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

   d) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

18. (DEJAR PARA PRÁCTICA 2) Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X.

   a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, demostrar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

   b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, probar que $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

19. Un conjunto es de tipo G_δ si es una intersección (δ) numerable de conjuntos abiertos (G). Un conjunto es de tipo F_σ si es una unión (σ) numerable de conjuntos cerrados (F).

   a) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

   b) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

   c) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

   d) 1) Exibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem para $[0, 1]$.
      2) Exibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
      3) ¿Qué conclusión se obtiene de estos dos ejemplos?

20. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}$ es a lo sumo numerable. Mostrar una colección no numerable de conjuntos cerrados disjuntos.

21. *a*) (Caso especial del Teorema de Baire) Probar que la intersección de una cantidad numerable de conjuntos abiertos densos en $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$.

   b) Deducir que si $\mathbb{R}^n = \cup_{j\in\mathbb{N}} F_j$ donde cada F_j es cerrado, entonces algún F_j tiene interior no vacío.

22. Mostrar que los números irracionales forman un conjunto de tipo G_δ, y esto no es cierto para los números racionales. (Para la segunda parte es posible usar un argumento de contradicción, usando la primera parte y el resultado del ejercicio 21*a*.)

23. Construir un conjunto en $\mathbb{R}$ que no es G_δ ni F_σ. (Usar el ejercicio 22 considerando el conjunto formado por los racionales negativos y los irracionales positivos.)

C. Bases, separabilidad, compacidad

24. Decimos que una colección $\{V_\alpha\}$ (numerable o no) de conjuntos abiertos de un espacio X es una base de X, si para todo $x \in X$ y $G \subseteq X$ abierto tal que $x \in G$, existe α tal $x \in V_\alpha \subseteq G$. En otras palabras, todo abierto de X es unión de una subcolección de $\{V_\alpha\}$.

    Demostrar que todo espacio métrico separable tiene una base numerable. (Sugerencia: considerar las bolas de radio racional y centro en algún subconjunto denso).

25. (Teorema de Lindelöf) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C}$ un cubrimiento abierto de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de $\mathcal{C}$ que cubre A.

26. Para un entero $k = 1, \ldots, n$ y un real α, considerar el hiperplano $H = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k = \alpha\}$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección de cubos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^n$ con aristas paralelas a los ejes coordenados, tal que $H \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_j) < \varepsilon$. (Más adelante veremos que esto implica que H tiene medida exterior 0 en $\mathbb{R}^n$.) PENSAR PARA $n = 2, k = 1$, O SEA EL HIPERPLANO EN ESTE CASO ES UNA RECTA

27. *a*) En $\mathbb{R}$ sea el conjunto $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Mostrar que K es compacto directamente de la definición de compacidad (es decir, sin usar el Teorema de Heine-Borel).

    b) Mostrar un cubrimiento de $(0, 1)$ que no tenga un subcubrimiento finito.

    c) En el espacio métrico $(\mathbb{Q}, d)$, siendo d la métrica usual en $\mathbb{R}$, considerar el conjunto $E = \{r \in \mathbb{Q} : 2 < r^2 < 3\}$. Mostrar que E es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$, pero que no es compacto.

    d) Construir un conjunto compacto de números reales en el cual sus puntos límites formen un conjunto numerable.

28. Sea E el conjunto de todos los $x \in [0, 1]$ tales que su desarrollo decimal contiene solo los dígitos 4 y 7. Decidir si E es numerable, denso en $[0, 1]$, compacto, perfecto.

29. Demostrar que si un espacio métrico X es tal que cada subconjunto infinito tiene un punto límite, entonces X es separable.

30. Demostrar que cada espacio métrico K compacto tiene una base numerable, y por lo tanto es separable. (Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un número finito de bolas de radio $\frac{1}{n}$ que cubren K.)

31. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si para toda n-bola $B(x)$ se tiene que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable, entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

32. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no numerable, y sea P el conjunto de todos los puntos de condensación de A. Mostrar que P es perfecto y que $A \setminus P$ es a lo sumo numerable.