
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

DM ECEN -- Segundo Cuatrimestre 2024

Contenido

1	Sucesiones Numéricas	3
2	Sucesiones monótonas	4
3	Teorema de Bolzano–Weierstrass	5
4	Límite superior e inferior de una sucesión real	6
5	Criterio de Cauchy de convergencia de sucesiones	8
6	Series numéricas	9
7	Series numéricas. Convergencia Condicional y Absoluta	13
8	Criterios para convergencia condicional	14
9	Partes positiva y negativa de series reales	15
10	Reordenamientos de Series	16
11	Convergencia de funciones	17
12	Convergencia puntual y uniforme de series	19
13	Integración y diferenciación de series	19
14	Series de Potencias	22
15	Series de Taylor	25
16	Series de Fourier	27
16.1	Series de Fourier de cosenos	27
16.2	Serie de Fourier de senos	34
16.3	Series de Fourier	36
16.4	Desigualdad de Parseval	42

16.5 Un Teorema de Fourier	43
Bibliografía	47

1 Sucesiones Numéricas

El material de esta Sección y las dos siguientes está principalmente extraído de [3, Secciones 1.5 a 1.8].

Supongamos que tenemos una regla o función que a cada número natural n le asigna un número $a_n \in \mathbb{C}$. Escribimos explícitamente esta regla como

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

o más abreviadamente como $\{a_n\}$. En lugar de decir: la regla $\{a_n\}$, diremos: la *sucesión* $\{a_n\}$. Si $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión real o de números reales.

Decimos que la sucesión $\{a_n\}$ *converge* a p , o *tiene límite* p si para cualquier $\varepsilon > 0$ todos los números a_n salvo posiblemente una cantidad finita están en la bola $B_\varepsilon(p)$. Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - p| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Escribimos $a_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p.$$

Si $\{a_n\}$ no converge a ningún número complejo, decimos que *diverge*, o *es divergente*.

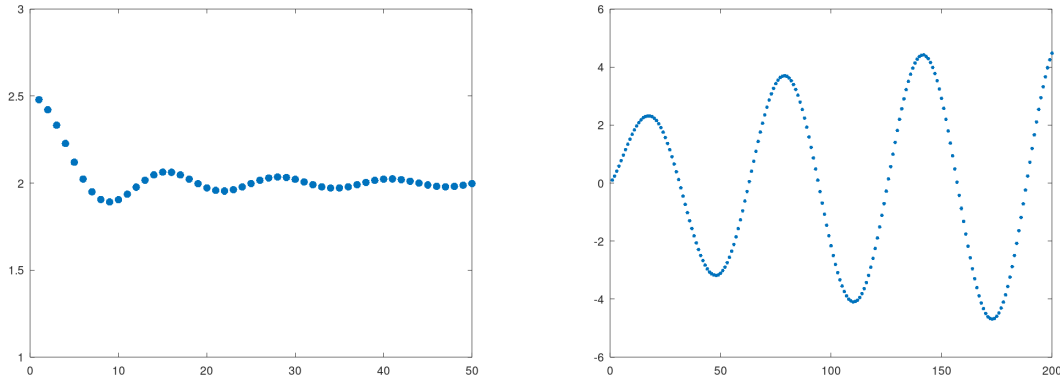


Figura 1: Izq: Sucesión $a_n = 2 + \sin(n/2)/n$, convergente a 2. Der: Una sucesión divergente

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq C$ para todo n . Si $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ entonces decimos que $\{a_n\}$ es acotada superiormente (inferiormente) si $a_n \leq C$ ($a_n \geq C$) para todo $n \in \mathbb{N}$ para alguna constante C .

Teorema 1. *Una sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Supongamos que $a_n \rightarrow p$. De la definición para $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que

$$|a_n - p| < 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Entonces $|a_n| \leq |a_n - p| + |p| < 1 + |p|$ para $n \geq n_0$. Si definimos

$$C = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |p|\}$$

entonces tenemos que $|a_n| \leq C$ para todo n , como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 1. Si $\lim a_n = L$ y $\lim a_n = M$ entonces $L = M$.

Teorema 2 (Operaciones con límites). Suponer que $a_n \rightarrow A$ y $b_n \rightarrow B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim a_n b_n = AB$
3. Si $B \neq 0$, entonces $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Teorema 3. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes de números reales. Si $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande, entonces $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Teorema 4 (Conservación del signo). Sea $\{a_n\}$ una sucesión real con $a_n \rightarrow L \neq 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Más aún, si $L > 0$ (resp. $L < 0$) entonces n_0 puede elegirse tal que $a_n \geq \frac{L}{2}$ (resp. $a_n \leq \frac{L}{2}$) si $n \geq n_0$.

2 Sucesiones monótonas

La sucesión real $\{a_n\}$ es *monótona creciente* si verifica $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n , y es *estrictamente monótona creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para todo n . Análogamente, $\{a_n\}$ es *monótona decreciente* si verifica $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n , y es *estrictamente monótona decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ para todo n . Una sucesión (estrictamente) monótona es una que es (estrictamente) monótona creciente o decreciente.

Lema 1. Una sucesión monótona creciente (resp. decreciente) acotada superiormente (resp. inferiormente) es convergente.

Ejercicio 2. Usando el lema anterior se puede demostrar que la sucesión

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge a un número L con $2 \leq L < 3$.

Definición 1. Una sucesión real $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ si para todo número $N > 0$ existe n_0 tal que

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad a_n \geq N.$$

En este caso escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow +\infty \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

Análogamente, si para cada $N > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \quad \implies \quad a_n < -N$$

decimos que a_n diverge a $-\infty$ y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty, \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow -\infty \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

Teorema 5. Una sucesión monótona creciente (resp. decreciente) es, o bien convergente (a un número real) o bien divergente a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

3 Teorema de Bolzano–Weierstrass

Una sucesión $\{b_n\}$ es una *subsucesión* de $\{a_n\}$ si

$$b_1 = a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_2}, \quad \dots, \quad b_k = a_{n_k}, \quad \dots$$

donde $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Suele escribirse la subsucesión como $\{a_{n_k}\}$.

Teorema 6. *Si $\lim a_n = p$ entonces*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = p$$

para cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea n_0 tal que $|a_n - p| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Como $n_k \geq k$ (por la definición de subsucesión) resulta entonces que $|a_{n_k} - p| < \varepsilon$ si $k \geq n_0$. Así, $\lim a_{n_k} = p$. $\square$

Definición 2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Un número $N \in \mathbb{C}$ es un *punto límite* (o *punto de acumulación*) de $\{a_n\}$ si existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim_k a_{n_k} = N$.

Teorema 7 (Teorema de Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un punto límite.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada, supongamos $l \leq a_n \leq u$ para todo n . Para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{a_n : n \geq k\}$ es no vacío y acotado superiormente y por lo tanto tiene supremo, sea

$$b_k = \sup\{a_n : n \geq k\}.$$

Entonces $\{b_k\}$ es una sucesión monótona decreciente pues

$$\{a_n : n \geq k+1\} \subseteq \{a_n : n \geq k\} \implies b_{k+1} \leq b_k$$

y además acotada inferiormente, pues

$$a_n \geq l \quad \forall n \implies b_k \geq l \quad \forall k.$$

Luego $\{b_k\}$ es convergente a un número $L \in [l, u]$. Veremos que L es un punto límite de $\{a_n\}$. Dado $k \in \mathbb{N}$ sea $n_k \geq k$ tal que

$$a_{n_k} > b_k - 2^{-k}.$$

Entonces, como $b_k - 2^{-k} < a_{n_k} \leq b_k$ y $b_k \rightarrow L$ resulta por el teorema de intercalación de límites que $a_{n_k} \rightarrow L$. Puede ocurrir que $\{a_{n_k}\}$ no sea una subsucesión de $\{a_n\}$ pues $\{n_k\}$ puede no ser estrictamente monótona. Para esto, sea $m_1 = n_1$. Ahora elegimos $m_2 = n_{k_2}$ tal que $n_{k_2} > n_1$ y $k_2 > 1$. Esto es posible pues $n_k \geq k \rightarrow \infty$. Por esta misma razón podemos elegir $m_3 = n_{k_3}$ tal que $n_{k_3} > n_{k_2} = m_2$ y $k_3 > k_2$. Siguiendo con este proceso hallamos una sucesión de índices $m_1 < m_2 < \dots$ y por lo tanto $\{a_{m_i}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ y también, como $k_1 < k_2 < \dots$, resulta que $\{a_{m_i} = a_{n_{k_i}}\}$ es una subsucesión de $\{a_{n_k}\}$, y por lo tanto a_{m_i} tiene el mismo límite L que a_{n_k} . $\square$

Teorema 8. *Toda sucesión acotada $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ tiene al menos un punto límite.*

Demostración. Escribimos $z_n = a_n + ib_n$, siendo a_n y b_n las partes real e imaginaria de z_n . Como $\{z_n\}$ es acotada, resulta que las sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son también acotadas. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass existe alguna subsucesión $\{a_{n_k}\}$ convergente, digamos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Siendo que la (sub-)sucesión b_{n_k} es acotada, también por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que tiene una (sub-)subsucesión $\{b_{n_{k_l}}\}$ convergente

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} b_{n_{k_l}} = \beta.$$

Siendo que $\{a_{n_{k_l}}\}_l$ es una subsucesión de a_{n_k} , resulta que $a_{n_{k_l}} \rightarrow \alpha$ si $l \rightarrow +\infty$. Ahora es fácil verificar que la subsucesión $\{z_{n_{k_l}}\}_l$ es convergente y

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} z_{n_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{n_{k_l}} + ib_{n_{k_l}}) = \alpha + i\beta$$

concluyendo la prueba. □

4 Límite superior e inferior de una sucesión real

Sea dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales. Notemos que tenemos dos posibilidades: $\{a_n\}$ es acotada o $\{a_n\}$ no es acotada, y en este último caso, puede ser no acotada superiormente, no acotada inferiormente o ambas.

1. Si $\{a_n\}$ no es acotada superiormente, entonces a_n tiene una subsucesión a_{n_k} que diverge a $+\infty$: en efecto, elegimos n_1 tal que $a_{n_1} > 1$. Luego elegimos n_2 tal que $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} > 2$. Tal n_2 existe, de lo contrario $a_n \leq 2$ para todo $n > n_1$ y en ese caso $\{a_n\}$ sería acotada superiormente por la constante $C = \max\{a_1, \dots, a_{n_1}, 2\}$. Análogamente, podemos encontrar $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} > 3$. Siguiendo con este procedimiento, encontramos una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} > k$ para todo k . Esta subsucesión diverge a $+\infty$.
2. Análogamente, si $\{a_n\}$ no es acotada inferiormente, tiene una subsucesión a_{n_k} que diverge a $-\infty$.
3. Si, $\{a_n\}$ es acotada, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass tiene alguna subsucesión convergente.

Entonces, podemos considerar el conjunto

$$E \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

formado por todos los puntos límites de $\{a_n\}$, incluyendo posiblemente a $+\infty$ o $-\infty$ en el caso en que $\{a_n\}$ no sea acotada. Entonces vemos que E nunca es vacío, pero sí puede suceder que $E \subseteq \{-\infty, +\infty\}$.

Definición 3. Definimos el límite superior de $\{a_n\}$ como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } E = \{-\infty\} \\ +\infty & \text{si } +\infty \in E \\ \sup(E \cap \mathbb{R}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

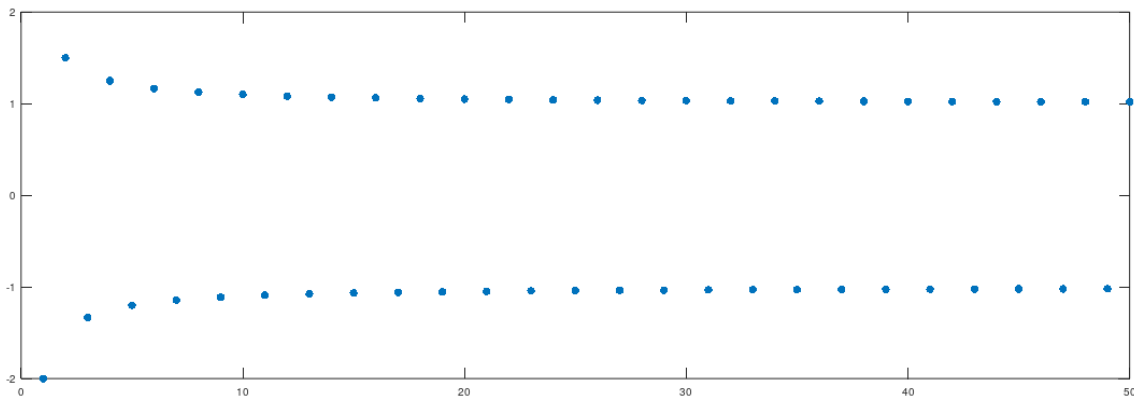


Figura 2: Sucesión $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$, $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada de números reales. Entonces $\limsup a_n$ es un punto límite de $\{a_n\}$. Más aún, $\limsup a_n$ es el mayor de los puntos límites de $\{a_n\}$.

Demostración. Basta demostrar que $s = \limsup a_n$ es un punto límite, ya que por definición de punto límite no puede haber uno mayor que s . Dado $\varepsilon = 2^{-j}$, sea $\ell_j \in E$ tal que

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \ell_j \leq s.$$

Como ℓ_j es punto límite de $\{a_n\}$, existe una subsucesión que converge a ℓ_j , y por lo tanto existe n_j tal que

- $|a_{n_j} - \ell_j| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- $n_j > j$.

Luego

$$|a_{n_j} - s| \leq |a_{n_j} - \ell_j| + |\ell_j - s| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De esta manera, obtenemos una sucesión $\{a_{n_j}\}$ tal que

$$a_{n_j} \rightarrow s \quad \text{si } j \rightarrow \infty.$$

Puede ocurrir que $\{a_{n_j}\}$ no sea una subsucesión de $\{a_n\}$, pues n_j puede no ser estrictamente creciente. Sin embargo $n_j \rightarrow \infty$ si $j \rightarrow \infty$. Entonces sea $j_1 = 1$ y $n'_1 = n_{j_1}$. Luego elegimos $j_2 > j_1$ tal que $n_{j_2} > n_{j_1}$ y definimos $n'_2 = n_{j_2}$. Después, elegimos $j_3 > j_2$ tal que $n_{j_3} > n_{j_2}$, y ponemos $n'_3 = n_{j_3}$. Continuando con este proceso, encontramos una sucesión $a_{n'_j}$ que es subsucesión de $\{a_n\}$. Además, $a_{n'_j}$ es también una subsucesión de $\{a_{n_j}\}$ y por lo tanto tiene límite s . $\square$

Similarmente, podemos definir el *límite inferior* de $\{a_n\}$ como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } E = \{+\infty\} \\ -\infty & \text{si } -\infty \in E \\ \inf(E \cap \mathbb{R}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y tenemos el teorema:

Teorema 10. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces $\liminf a_n$ es un punto límite de $\{a_n\}$. Más aún, $\liminf a_n$ es el menor de los puntos límites de $\{a_n\}$.

Remark 1. Trabajando con el campo de números reales extendido $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ podemos extender los resultados anteriores al caso en que $\{a_n\}$ no es acotada.

Ejercicio 3. Supongamos que $M > \limsup a_n$. Entonces existe n_0 tal que $a_n < M$ para todo $n \geq n_0$. Similarmente, si $m < \liminf a_n$ entonces existe n_0 tal que $a_n > m$ para todo $n \geq n_0$.

Ejercicio 4. Probar que $\limsup a_n = \liminf a_n = L$ si y solo si $\lim a_n = L$.

Ejercicio 5. a) Dada una sucesión real $\{a_n\}$ acotada superiormente, sea $u_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Mostrar que u_n es decreciente y consecuentemente $U = \lim u_n$ existe finito o es $-\infty$. Demostrar que

$$U = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}). \quad (1)$$

b) Análogamente, si $\{a_n\}$ es acotada inferiormente probar que

$$\liminf a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\}). \quad (2)$$

Si convenimos que las sucesiones $\{+\infty\}$ y $\{-\infty\}$ convergen a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente, entonces para cualquier sucesión real, acotada o no, valen las igualdades (1) y (2).

5 Criterio de Cauchy de convergencia de sucesiones

El material de esta Sección y hasta la Sección 13 está extraído del libro [3, Capítulo 5]. También se puede consultar [1, Capítulos 8 y 9]

Decimos que $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0, m \geq n_0.$$

Teorema 11. Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración. Sea $\{a_n\}$ convergente a $p \in \mathbb{C}$, y $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que

$$|a_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Luego si $n, m \geq n_0$ entonces

$$|a_n - a_m| = |(a_n - p) + (p - a_m)| \leq |a_n - p| + |a_m - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $\{a_n\}$ es de Cauchy.

Ahora supongamos que $\{a_n\}$ es de Cauchy, y queremos probar que entonces es convergente. Notemos primeramente que a_n es acotada: sea n_0 tal que

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \text{si } n, m \geq n_0.$$

En particular

$$|a_n| \leq 1 + |a_{n_0}| \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Entonces $|a_n| \leq C$ para todo n con

$$C = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\} + 1.$$

Por el Teorema 8 sabemos que $\{a_n\}$ tiene un punto límite, digamos $p \in \mathbb{C}$. Sea $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión tal que $a_{n_k} \rightarrow p$ si $k \rightarrow +\infty$. Veremos que toda la sucesión $\{a_n\}$ converge a p . Para esto, sea $\varepsilon > 0$, y sea k_0 tal que

$$|a_{n_k} - p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } k \geq k_0. \quad (3)$$

Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, existe n_0 tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } m, n \geq n_0. \quad (4)$$

Fijemos k' tal que $k' \geq k_0$ y $n_{k'} \geq n_0$. Entonces, si $n, m \geq n_0$ tenemos por ecuaciones (3) y (4) que

$$|a_n - p| \leq |a_n - a_{n_{k'}}| + |a_{n_{k'}} - p| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $\{a_n\}$ converge a p . $\square$

6 Series numéricas

Dada una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ consideramos otra sucesión $\{S_n\}$ definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j.$$

La sucesión $\{S_n\}$ se llama *serie infinita*, o simplemente *serie*, y cada S_n es una *suma parcial* de la serie. Si existe el límite $S = \lim S_n$ decimos que la serie *es convergente* y que *converge a S*, además S es la *suma* de la serie, y escribimos

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Si $\lim S_n$ no existe, la serie *diverge*. Escribiremos la serie $\{S_n\}$ en forma más explícita como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o $\sum a_n$.

Teorema 12. Si una serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$.

Demostración. Si $\sum a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

por lo tanto

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = 0$$

como queríamos. $\square$

Si $\sum a_n$ es convergente, podemos aplicar el criterio de Cauchy a la sucesión $\{S_n\}$ para obtener el siguiente resultado.

Teorema 13. *Una serie $\sum a_n$ es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon \quad n > m \geq n_0.$$

Ejemplo 1. *Considerar la serie geométrica $\sum aq^n$ ($a \neq 0$). Si $q \geq 1$ la serie diverge siendo que el término general aq^n no converge a 0. Si $0 < q < 1$ la serie es convergente por el teorema anterior (verificar). Además, en este caso la suma de la serie es $aq/(1 - q)$.*

Teorema 14. *Si la sucesión de números reales $\{a_n\}$ es no negativa, $a_n \geq 0$, para todo n suficientemente grande, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es acotada superiormente. Si $\sum a_n$ no converge, entonces diverge a $+\infty$.*

Teorema 15 (Criterio de comparación). *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series con términos reales que satisfacen $0 \leq a_n \leq b_n$ para n suficientemente grande. Entonces:*

1. *Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.*
2. *Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.*

Teorema 16 (Criterio de la raíz, o de Cauchy). *Supongamos que $a_n \geq 0$ para todo n . Si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

entonces la serie $\sum a_n$ converge. Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

Demostración. Supongamos $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$. Sea q tal que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} < q < 1.$$

Entonces por Ejercicio 3 existe n_0 tal que

$$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < q \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Luego, para $n \geq n_0$ tenemos $0 \leq a_n < q^n$. Como la serie $\sum q^n$ es convergente, por el criterio de comparación resulta que $\sum a_n$ converge.

Si $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, elegimos p tal que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > p > 1.$$

Entonces, existe una subsucesión $\{a_{n_i}\}$ tal que

$$\sqrt[n_i]{a_{n_i}} > p \quad \forall n_i.$$

Luego

$$a_{n_i} > p^{n_i} \rightarrow +\infty \quad \text{si } i \rightarrow +\infty.$$

Por el Teorema 12 resulta que $\sum a_n$ diverge. □

Teorema 17 (Criterio del cociente). *Supongamos que $a_n \geq 0$ para todo n . Si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

entonces la serie $\sum a_n$ converge. Si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

Ejemplo 2. *Usando el criterio de la raíz o del cociente podemos ver que, si $\alpha > 0$ y $0 < t < 1$ entonces la serie $\sum n^\alpha t^n$ es convergente.*

Remark 2. *Dada una sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos puede demostrarse que*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el Ejercicio 4, si existe el límite

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

entonces también existe el límite

$$\lim \sqrt[n]{a_n}$$

y ambos son iguales.

Remark 3. *El criterio de la raíz es más “fuerte” que el criterio del cociente, en el sentido de que podría suceder que el criterio del cociente no sea concluyente y que sí lo sea el criterio de la raíz. Por ejemplo, dados $0 < r < s < 1$ considerar la sucesión $\{a_n\}$ definida por*

$$a_n = \begin{cases} r^n & \text{si } n \text{ es par} \\ s^n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 0, & \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= +\infty \\ \liminf_n \sqrt[n]{a_n} &= r, & \limsup_n \sqrt[n]{a_n} &= s. \end{aligned}$$

Siendo $s < 1$ el criterio de la raíz permite deducir que la serie $\sum a_n$ es convergente. Sin embargo el criterio del cociente no es aplicable.

Teorema 18. (Criterio integral) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos. Sea $f(x)$ una función monótona decreciente definida en $N \leq x < +\infty$ con $N > 0$, tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq N$. Entonces la serie $\sum a_n$ es convergente si y solo si la integral impropia $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ existe.*

Demostración. Supongamos que la integral impropia $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ existe, esto es, el límite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_N^y f(x) dx.$$

existe. Pero entonces existe C tal que

$$\int_N^y f(x) dx \leq C \quad \forall y > N,$$

y en particular

$$\int_N^m f(x) dx \leq C \quad \forall N < m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Por otro lado, si $n \geq N$ entonces

$$a_n = f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) = a_{n+1}, \quad \text{para } n < x < n+1.$$

Integrando en $[n, n+1]$ obtenemos

$$a_n \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq a_{n+1}.$$

Luego para $m \geq N$ tenemos

$$\sum_{n=N}^m a_n \geq \int_N^{m+1} f(x) dx \geq \sum_{n=N+1}^{m+1} a_n. \quad (6)$$

De la segunda desigualdad y (5) tenemos

$$\sum_{n=N+1}^{m+1} a_n \leq \int_N^{m+1} f(x) dx \leq C.$$

Así las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas y por lo tanto la serie $\sum a_n$ converge.

Recíprocamente, supongamos que la serie $\sum a_n$ converge. Entonces de (6) vemos que para todo $n \geq N+1$

$$\int_N^n f(x) dx \leq K$$

para alguna constante K . Pero entonces la sucesión de números

$$\int_N^n f(x) dx$$

es monótona creciente (pues $f(x) \geq 0$) y acotada superiormente, y por lo tanto converge a un número L . Veremos que

$$\int_N^{+\infty} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_N^y f(x) dx = L.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$L - \varepsilon < \int_N^m f(x) dx \leq L \quad \text{si } m \geq n_0, m \in \mathbb{N}.$$

Luego, si $y > n_0$, elijamos $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, tal que $m \leq y < m + 1$. Entonces, usando nuevamente que $f(x) \geq 0$ resulta

$$L - \varepsilon < \int_N^m f(x) dx \leq \int_N^y f(x) dx \leq \int_N^{m+1} f(x) dx \leq L,$$

y esto concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 3. Utilizando el criterio integral, si $\alpha > 0$ se puede probar que la serie $\sum 1/n^\alpha$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

7 Series numéricas. Convergencia Condicional y Absoluta

La serie $\sum a_n$ se dice que *converge absolutamente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente. Si $\sum a_n$ es convergente pero no absolutamente convergente, entonces se dice que es *condicionalmente convergente*.

Teorema 19. Si una serie de números complejos es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Demostración. Sean S_n las sumas parciales de una serie $\sum a_n$. Entonces, si $n < m$ tenemos

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq \sum |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m|.$$

Si definimos T_n las sumas parciales de $\sum |a_n|$, vemos entonces que

$$|S_m - S_n| \leq T_m - T_n.$$

(notar que $T_m - T_n \geq 0$). Si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy, luego dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $T_m - T_n < \varepsilon$ si $n_0 \leq n < m$. Pero entonces $|S_m - S_n| < \varepsilon$ si $n_0 \leq n < m$. Deducimos entonces que $\{S_n\}$ es de Cauchy, y por lo tanto $\sum a_n$ es convergente. $\square$

Remark 4. Los criterios de comparación, de la raíz, del cociente y el criterio integral enunciados en la sección anterior, asumen que los términos de las series son reales no negativos para n suficientemente grande. Por lo tanto esos criterios pueden utilizarse para establecer convergencia absoluta.

Sea c_n una sucesión de términos complejos y escribamos $c_n = a_n + ib_n$ con a_n y b_n las partes real y compleja de c_n . Las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se llaman partes real e imaginarias de la serie $\sum c_n$. Las siguientes afirmaciones se pueden deducir fácilmente:

- $\sum c_n$ es convergente si y solo si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes.
- $\sum c_n$ es absolutamente convergente si y solo si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas absolutamente convergentes.

Sin embargo, si $\sum c_n$ es condicionalmente convergente, puede suceder que una (pero no ambas) de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ sea absolutamente convergente (ver ejercicio 7).

8 Criterios para convergencia condicional

Los siguientes criterios dan condiciones que aseguran la convergencia de series que pueden no ser convergentes absolutamente.

Teorema 20 (Series telescópicas). *Sea $\{b_n\}$ una sucesión. La serie*

$$\sum (b_{n+1} - b_n)$$

es convergente si y solo si $\{b_n\}$ es convergente y en este caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - b_1$$

Teorema 21 (Criterio para series alternadas). *Sea $\{b_n\}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos tal que $b_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Entonces la serie alternada $\sum (-1)^{n-1} b_n$ es convergente.*

Demostración. Consideremos las sumas parciales de la serie alternada

$$S_{2n} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2n-1} - b_{2n}.$$

La sucesión $\{S_{2n}\}_n$ es creciente, pues como $\{b_n\}$ es decreciente se sigue que

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq 0.$$

Además $\{S_{2n}\}_n$ es acotada superiormente pues

$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \leq b_1.$$

Entonces existe

$$\lim S_{2n}.$$

Por otro lado, la sucesión $\{S_{2n+1}\}_n$ es decreciente, ya que

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -b_{2n+2} + b_{2n+3} \leq 0.$$

Además $\{S_{2n+1}\}_n$ está acotada inferiormente pues

$$S_{2n+1} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n}) + b_{2n+1} \geq 0.$$

Entonces existe

$$\lim S_{2n+1}$$

Por lo tanto tenemos

$$\lim S_{2n+1} - \lim S_{2n} = \lim (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim b_{2n+1} = 0.$$

Sea $S = \lim S_{2n+1} = \lim S_{2n}$. Ahora es fácil ver que $\{S_n\}$ es convergente y converge a S . $\square$

Ejercicio 6. *La serie $\sum (-1)^{n-1}/n$ es convergente. Como no es absolutamente convergente, es condicionalmente convergente.*

Ejercicio 7. Sean $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = a_n + ib_n$. Probar que $\sum c_n$ es condicionalmente convergente.

Sean a_n y b_n son dos sucesiones complejas, y definamos A_n las sumas parciales de $\sum a_n$:

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Entonces se tiene la siguiente *fórmula de sumación parcial* de Abel:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k). \quad (7)$$

Se puede demostrar teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}.$$

De la fórmula (7) deducimos que si la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ y la serie $\sum A_k (b_{k+1} - b_k)$ son convergentes entonces lo es también la serie $\sum a_k b_k$.

Teorema 22 (Criterio de Dirichlet). Sea $\sum a_n$ una serie con sumas parciales acotadas. Sea b_n una sucesión decreciente de números reales que tiende a 0. Entonces $\sum a_k b_k$ es convergente.

Demostración. Teniendo en cuenta la fórmula (7), notemos que la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ converge a 0 pues para alguna constante M tenemos $|A_n| \leq M$ para todo n (sumas parciales de $\sum a_n$ acotadas) y $b_n \searrow 0$. Además, siendo $b_k - b_{k+1} \geq 0$ tenemos

$$|A_k (b_{k+1} - b_k)| \leq M (b_k - b_{k+1})$$

y como la serie $\sum M(b_k - b_{k+1}) = M b_1$ es telescópica convergente, resulta, por comparación, que $\sum A_k (b_{k+1} - b_k)$ es absolutamente convergente. Esto implica que $\sum a_k b_k$ converge. $\square$

Ejercicio 8. Probar que si la serie $\sum a_n$ diverge, entonces la serie $\sum n a_n$ también es divergente.

Ejercicio 9. Demostrar el criterio de Abel: Si la serie $\sum a_n$ converge y $\{b_n\}$ es una sucesión monótona convergente, entonces la serie $\sum a_n b_n$ es convergente. Sugerencia. Tener en cuenta la fórmula (7).

9 Partes positiva y negativa de series reales

Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. Denotaremos $\{p_m\}$ la subsucesión de $\{a_n\}$ que consiste de todos los términos positivos de la sucesión. También denotaremos por $\{-q_m\}$ la subsucesión de $\{a_n\}$ formada por todos los términos negativos. Sean

$$P_n = \sum_{m=1}^n p_m, \quad Q_n = \sum_{m=1}^n q_m.$$

Entonces para cualquier n existen n' y n'' con $n' + n'' \leq n$, tales que

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = P_{n'} - Q_{n''}, \quad \sum_{k=1}^n |a_k| = P_{n'} + Q_{n''}. \quad (8)$$

Notemos que si $a_n \neq 0$ para todo n entonces $n' + n'' = n$.

Si hay una cantidad infinita de términos a_n positivos (resp. negativos), entonces $n' \rightarrow \infty$ (resp. $n'' \rightarrow \infty$) si $n \rightarrow \infty$.

Teorema 23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces $\sum p_m$ y $\sum q_m$ son convergentes. Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente entonces $\sum p_m$ y $\sum q_m$ son ambas divergentes.*

Demostración. Supongamos que $\sum a_n$ es absolutamente convergente. Sea, como antes, $\{P_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\sum p_m$. Si p_n es el $\hat{n}$ -término de $\sum a_n$ entonces, como las sumas parciales de $\sum |a_n|$ son acotadas (por la convergencia absoluta) claramente

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k \leq \sum_{k=1}^{\hat{n}} |a_k| \leq K$$

para alguna constante K . Así las sumas parciales P_n de $\sum p_n$ son acotadas superiormente. Además $\{P_n\}$ es creciente, y luego es convergente. Similarmente se prueba que $\sum q_n$ es convergente.

Ahora supongamos que $\sum a_n$ es condicionalmente convergente. Entonces $\sum |a_n|$ es divergente. Supongamos que $\sum p_n$ es convergente. Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\sum q_n$. Dado n existen n_1 y n_2 tales que $S_{n_1} = P_{n_2} - Q_n$, o sea

$$Q_n = S_{n_1} - P_{n_2}.$$

Como las sumas parciales S_m y P_m son, en este caso, convergentes, son acotadas, digamos $|S_m| \leq K_1$ y $Q_m \leq K_2$ para todo m . Por lo tanto también la sucesión $\{Q_n\}$ sería acotada:

$$Q_n = S_{n_1} - P_{n_2} \leq |S_{n_1}| + P_{n_2} \leq K_1 + K_2.$$

Como la sucesión $\{Q_m\}$ es creciente, entonces resulta que es convergente. Pero entonces deducimos que la segunda igualdad de (8) que $\sum a_n$ converge absolutamente, que es una contradicción. Luego $\sum p_n$ diverge. Análogamente se demuestra que $\sum q_n$ diverge. $\square$

10 Reordenamientos de Series

Definición 4. *Sea $\sum a_n$ una serie y sea $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación biyectiva. Así para cada $k \in \mathbb{N}$, $n(k)$ es un natural, y para cada natural n' existe un único $k' \in \mathbb{N}$ tal que $n(k') = n'$. Entonces la serie $\sum b_k$, donde $b_k = a_{n(k)}$, se llama un reordenamiento de la serie $\sum a_n$.*

Teorema 24. *Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente, y $\sum b_n$ un reordenamiento de $\sum a_n$. Entonces $\sum b_n$ es convergente a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Teorema 25. *Si cualquier reordenamiento de $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente.*

Ejercicio 10. *Sea $\sum a_n$ una serie condicionalmente convergente. Entonces para cada $A \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n$ es convergente a A .*

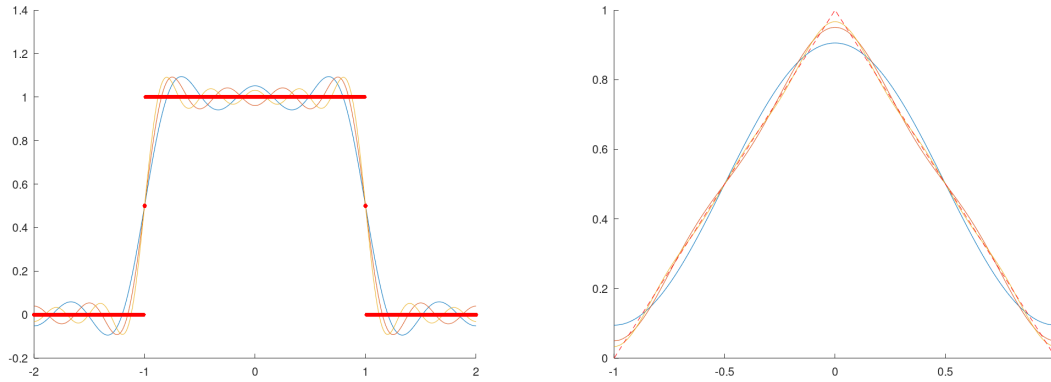


Figura 3: Izq: convergencia puntual. Der: convergencia uniforme

11 Convergencia de funciones

Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I . Supongamos que existe una función $f(x)$, definida en I , tal que para cada $x \in I$ se tiene $\lim f_n(x) = f(x)$. Entonces decimos que $\{f_n(x)\}$ *converge* (o *converge puntualmente*) a $f(x)$ y escribimos

$$f_n \rightarrow f \text{ puntualmnte en } I.$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

entonces decimos que $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente* a $f(x)$ e I . En este caso, $f(x)$ es el *límite uniforme* de $\{f_n(x)\}$, y escribimos

$$f_n \rightrightarrows f \text{ en } I.$$

Ejercicio 11. La sucesión $\{x/n\}$ converge uniformemente a 0 en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 12. La sucesión $\{x^n\}$ converge puntualmente en el intervalo $[0, 1]$ a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En este caso la convergencia no es uniforme en el intervalo $[0, 1]$ (ni tampoco en $[0, 1)$).

Teorema 26. El límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un intervalo I , es continuo en I .

Demostración. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ en I , siendo las f_n continuas en I . Sea $x_0 \in I$. Queremos probar que f es continua en x_0 . Supondremos que x_0 es un punto interior de I , la demostración se puede modificar fácilmente en el caso que x_0 sea un extremo de I . Por la convergencia uniforme sabemos que para $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I, \quad \forall n \geq n_0,$$

en particular tenemos

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I.$$

Ahora usamos que f_{n_0} es continua en x_0 . Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I, |x - x_0| < \delta.$$

Entonces, para todo $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |[f(x) - f_{n_0}(x)] + [f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)] + [f_{n_0}(x_0) - f(x_0)]| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, resulta que f es continua en x_0 . □

Ejercicio 13. Decidir si la sucesión $\{1/(1+x^{2n})\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

Ejercicio 14. Suponer que una sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones converge uniformemente en $[a, b]$ y además la sucesión $\{f_n(b)\}$ es convergente. Entonces $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Ejercicio 15. La sucesión del ejercicio 13, ¿converge uniformemente en $[0, 1]$?

Teorema 27 (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy). Una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ definidas en un intervalo I , es uniformemente convergente a alguna función $f(x)$ en I , si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in I$ se tiene

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0, m \geq n_0. \quad (9)$$

Demostración. Supongamos que $f_n \Rightarrow f$ en I . Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I \quad \forall n \geq n_0.$$

Sean $n, m \geq n_0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I \\ |f_m(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Se sigue que si $n, m \geq n_0$ entonces para todo $x \in I$ tenemos

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos.

Recíprocamente, supongamos que (9) vale. Entonces, para cada $x \in I$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto converge. Llamemos $f(x)$ al límite de $\{f_n(x)\}$. Esto define una función f en I . Probaremos que $f_n \Rightarrow f$ en I .

Nuevamente por (9), sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $x \in I$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0, m \geq n_0.$$

Dejemos n fijo ($n \geq n_0$), y hacemos $m \rightarrow \infty$, entonces $f_n(x) - f_m(x) \rightarrow f_n(x) - f(x)$, por lo que se obtiene que para todo $x \in I$ vale

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Esto vale para todo $n \geq n_0$, lo que demuestra la convergencia uniforme de f_n a f . □

12 Convergencia puntual y uniforme de series

Considerar una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ de funciones $u_n(x)$ definidas en un intervalo I . Notemos que para cada $x \in I$ se trata de una sucesión numérica. Sea

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Si $\{S_n(x)\}$ converge uniformemente en I a una función $S(x)$, decimos que la serie $\sum u_n(x)$ es *uniformemente convergente* a $S(x)$ en I . Si $\{S_n(x)\}$ es puntualmente convergente, decimos que la serie $\sum u_n(x)$ es *puntualmente convergente*.

Teorema 28. *Si una serie $\sum u_n(x)$ de funciones continuas $u_n(x)$ sobre un intervalo I es uniformemente convergente en I , entonces su suma $S(x)$ es continua en I .*

Demostración. Tener en cuenta que $\sum_{k=1}^n u_n(x)$ es continua y usar el teorema 26. $\square$

Teorema 29. *Una serie $\sum u_n(x)$ de funciones $u_n(x)$ sobre un intervalo I es uniformemente convergente en I , si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in I$ se tiene*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si } m \geq n \geq n_0.$$

Demostración. Aplicar el criterio de convergencia uniforme de Cauchy, Teorema 27, a la sucesión de sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. $\square$

Si $\sum |u_n(x)|$ es uniformemente convergente, decimos que $\sum u_n(x)$ es absolutamente uniformemente convergente, o normalmente convergente. Es claro que convergencia normal implica convergencia uniforme.

Teorema 30 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $\{u_n(x)\}$ una sucesión de funciones definidas sobre un intervalo I . Sea M_n una sucesión de constantes positivas tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in I$. Si $\sum M_n$ es convergente, entonces $\sum u_n(x)$ es normalmente (y por lo tanto uniformemente) convergente en I .*

Demostración. Como $\sum M_n$ es convergente, por el Teorema 13 sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$M_n + M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon \quad \text{si } m > n \geq n_0.$$

Entonces, por la hipótesis $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in I$, se sigue que

$$|u_n(x)| + |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si } m > n \geq n_0, \quad \forall x \in I.$$

Entonces por Teorema 29 se tiene que $\sum |u_n(x)|$ es uniformemente convergente en I . $\square$

13 Integración y diferenciación de series

Teorema 31. *Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones continuas sobre un intervalo cerrado, acotado $[a, b]$. Supongamos que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a una función $f(x)$ en $[a, b]$. Entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

Demostración. Por Teorema 26 sabemos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y por lo tanto integrable en $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, sea n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{si } n \geq n_0, \quad x \in [a, b].$$

Entonces, si $n \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

que prueba (10). □

Notar que podemos escribir (10) como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

indicando que si $f_n \Rightarrow f$ en $[a, b]$ entonces podemos “intercambiar la integral y el límite”.

Remark 5. En el Teorema anterior, si la convergencia de $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ no es uniforme, entonces en general (10) es falso. Considerar el siguiente ejemplo. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n & \text{si } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $f \rightarrow 0$ puntualmente en $[0, 1]$. Sin embargo

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 32 (Integración término a término). Sea $\sum u_n(x)$ una serie de funciones continuas $u_n(x)$ sobre un intervalo cerrado, acotado $[a, b]$. Si $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ en $[a, b]$, entonces $S(x)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (11)$$

Demostración. Aplicar Teorema 31 a la sucesión de sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. □

Ejemplo 4. La serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

es uniformemente convergente para $x \in [-t, t]$ con $0 < t < 1$. Entonces, integrando término a término tenemos

$$\log \frac{1+t}{1-t} = 2 \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots \right).$$

Notar que (11) puede escribirse como

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Existen Teoremas análogos para diferenciación.

Teorema 33. Sean $f_n(x)$ funciones con derivadas continuas en un intervalo cerrado, acotado $[a, b]$. Supongamos que $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ y que $f_n \rightarrow f$ puntualmente en $[a, b]$. Entonces $f(x)$ es diferenciable y para cada $x \in [a, b]$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Demostración. Sea $g(x)$ el límite uniforme de $\{f'_n(x)\}$ en $[a, b]$. Entonces g es continua y por Teorema 31 aplicado al intervalo $[a, x]$ para $x \in [a, b]$, tenemos

$$\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)].$$

Por la convergencia puntual $f_n \rightarrow f$ resulta

$$\int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a)$$

o

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Como g es continua, resulta por el Primer Teorema Fundamental de Cálculo que f es derivable y $f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$. $\square$

La conclusión del Teorema anterior se puede expresar como

$$(\lim f_n)'(x) = \lim f'_n(x) \quad \text{para } x \in [a, b]$$

que puede interpretarse como “intercambiar los operadores límite y derivada”, o “derivada del límite es el límite de las derivadas”. Para que esto sea válido no es suficiente la convergencia uniforme $f_n \Rightarrow f$, como en el caso de integración (Teorema 31) como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sean

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad x \in [-1, 1].$$

Entonces $f_n \Rightarrow f$ en $[-1, 1]$ siendo $f(x) = |x|$. Notemos que f no es derivable en $x = 0$. Sin embargo las f_n son derivables en $x = 0$ y $f'_n(0) = 0$ para todo n .

Teorema 34 (Diferenciación término a término). Sean $u_n(x)$ funciones con derivadas continuas en un intervalo cerrado, acotado $[a, b]$. Supongamos que $\sum u'_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$ y que $\sum u_n(x) \rightarrow S(x)$ puntualmente en $[a, b]$. Entonces $S(x)$ es diferenciable y para cada $x \in [a, b]$ tenemos

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x). \tag{12}$$

Demostración. Aplicar Teorema 33 a la sucesión de sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. $\square$

Notar que (12) puede expresarse como

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

que en el caso de sumas finitas ya sabíamos que vale.

14 Series de Potencias

Esta sección y la siguiente están extraídas del libro [3, Secciones 5.6 y 5.7].

Una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

se llama *serie de potencias* centrada en x_0 . Los números $a_0, a_1, \dots$ son reales y se llaman *coeficientes* de la serie y $x \in \mathbb{R}$ es la variable. Muchos de los resultados que veremos son válidos también para series de potencias con coeficientes complejos y variable compleja.

Teorema 35. *Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es convergente para $x = \xi$, $\xi \neq x_0$, entonces es absolutamente convergente para x en el intervalo $|x - x_0| < |\xi - x_0|$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ (además de $\varepsilon < |\xi - x_0|$), la serie converge normalmente en $|x - x_0| \leq |\xi - x_0| - \varepsilon$.*

Demostración. Como $\sum a_n(\xi - x_0)^n$ converge, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(\xi - x_0)^n = 0$$

y por lo tanto $|a_n(\xi - x_0)^n| \leq C$ para todo n para alguna constante C . Sea x tal que $|x - x_0| < |\xi - x_0|$. Entonces, si definimos $\gamma = \frac{|x - x_0|}{|\xi - x_0|}$, tenemos $0 \leq \gamma < 1$ y

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(\xi - x_0)^n| \frac{|x - x_0|^n}{|\xi - x_0|^n} \leq C\gamma^n.$$

Por comparación resulta que la serie $\sum |a_n(x - x_0)^n|$ converge, ya que la serie geométrica $\sum C\gamma^n$ es convergente.

Para ver la convergencia normal, sea $\varepsilon > 0$ y definamos $\eta = x_0 + |\xi - x_0| - \varepsilon$. Entonces

$$0 < \eta - x_0 = |\xi - x_0| - \varepsilon$$

y por lo tanto $|\eta - x_0| < |\xi - x_0|$. Luego $\sum |a_n(\eta - x_0)^n|$ es convergente. Si x es tal que $|x - x_0| \leq |\xi - x_0| - \varepsilon$ tenemos

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n(\eta - x_0)^n| = M_n$$

con $\sum M_n < +\infty$. Entonces por el criterio M de Weierstrass se sigue que $\sum |a_n(x - x_0)^n|$ converge uniformemente en el intervalo $|x - x_0| \leq |\xi - x_0| - \varepsilon$. $\square$

Corolario 1. Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es divergente en $\xi \neq x_0$, entonces también es divergente en todo x con $|x-x_0| > |\xi-x_0|$.

Sea A el conjunto

$$A = \left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ es convergente} \right\}.$$

Notar que $A \neq \emptyset$ pues $x_0 \in A$. Supongamos que A es acotado y definimos $R = \sup A - x_0$. Sea η tal que $|\eta - x_0| < R$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\eta - x_0)^n$ converge. En efecto, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\eta - x_0)^n$ fuera divergente, entonces, por el Corolario 1, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ también divergería para todo x con $|x - x_0| > |\eta - x_0|$, y en particular divergería para todo $x > x_0 + |\eta - x_0|$, por lo que $\sup A - x_0 \leq |\eta - x_0| < R$, que es una contradicción. Por otro lado, si $|\eta - x_0| > R$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\eta - x_0)^n$ diverge. En efecto, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\eta - x_0)^n$ convergiera, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ convergería también para todo x con $|x - x_0| < |\eta - x_0|$ (Teorema 35), en particular convergería para $x_0 \leq x < x_0 + |\eta - x_0|$, y así $\sup A - x_0 \geq |\eta - x_0| > R$, que es una contradicción.

Si A no es acotado definimos $R = +\infty$ y es fácil ver que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Así, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 36. Para toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ existen dos posibilidades:

1. Converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Existe un número no negativo R tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge para $|x - x_0| < R$ y diverge para $|x - x_0| > R$.

El número R se llama *radio de convergencia* de la serie, y en el caso 1 ponemos que $R = +\infty$. El intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ es el *intervalo de convergencia* de la serie. En los extremos del intervalo de convergencia, $x = x_0 + R$ o $x = x_0 - R$ la serie puede converger o diverger.

Teorema 37 (Fórmula de Cauchy–Hadamard). Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, el radio de convergencia R es

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (13)$$

Remark 6. En la fórmula (13) convenimos que $1/0 = +\infty$ o $1/+\infty = 0$.

Demostración. Supongamos primero que $M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq +\infty$. Notemos que para cualquier x tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = M|x-x_0|.$$

Luego por el criterio de la raíz (Teorema 16) sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $|x-x_0|M < 1$ y diverge si $|x-x_0|M > 1$. Así, si $M > 0$ tenemos que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{M}$. Si $M = 0$, entonces la serie converge para todo x , y por lo tanto $R = +\infty$ ($= 1/0$).

Si $M = +\infty$, entonces

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

para todo $x \neq x_0$. Luego, si $x \neq x_0$ existe una subsucesión de $\left\{ \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} \right\}$ que converge a $+\infty$ (Teorema 9 y Remark 1) y así el término general de la serie no tiende a 0, por lo que no converge. O sea, la serie no converge para ningún $x \neq x_0$, o $R = 0$ ($= 1/+\infty$). $\square$

Remark 7. Las demostraciones anteriores pueden adaptarse para una serie compleja

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con coeficientes y variable compleja. En este caso el radio de convergencia R se calcula similarmente con la fórmula de Cauchy–Hadamard (13). La serie converge en el disco del plano complejo $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ y diverge en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$. En cada punto de circunferencia $|z - z_0| = R$ puede converger o diverger.

Usando la Fórmula de Cauchy–Hadamard es fácil ver que las series que se obtienen derivando o integrando término a término un serie de potencias de radio de convergencia R también tienen radio de convergencia R .

Teorema 38. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie de potencias de radio R . Entonces las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \quad y \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad (14)$$

también tienen radio de convergencia R .

Por Teorema 35 se sigue que la serie de potencias $\sum a_n(x - x_0)^n$ de radio R y las de (14) son normalmente (y por lo tanto uniformemente) convergentes en $(x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego podemos aplicar los Teoremas 32 y 34 para obtener los siguientes resultados.

Teorema 39. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $R \neq 0$. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ para $|x - x_0| < R$. Entonces $f(x)$ es continua en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (\alpha - x_0)^{n+1}$$

para $|x - x_0| < R, |\alpha - x_0| < R$.

Teorema 40. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie de potencias de radio de convergencia $R \neq 0$. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ para $|x - x_0| < R$. Entonces f es derivable con continuidad en $(x_0 - R, x_0 + R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Corolario 2. La función $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ es infinitamente derivable en $(x_0 - R, x_0 + R)$, y para $k \in \mathbb{N}$ vale

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

15 Series de Taylor

Supongamos que $f(x)$ es una función infinitamente diferenciable en un intervalo $(a - R, a + R)$, $R \neq 0$. Entonces podemos considerar los desarrollos de Taylor de f con resto de orden n arbitrario:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}(x)$$

para $|x - a| < R$, donde el resto R_{n+1} puede expresarse como

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

siendo ξ un punto que depende de x y verifica $|\xi - a| < |x - a|$. Entonces el siguiente resultado se obtiene fácilmente.

Teorema 41. *Si $f(x)$ es infinitamente diferenciable en $(a - R, a + R)$, y si $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ puntualmente en dicho intervalo cuando $n \rightarrow \infty$, entonces*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \quad (15)$$

La serie (15) se llama *serie de Taylor* de f alrededor de $x = a$, y en el caso $a = 0$ suele llamarse *serie de Maclaurin*.

Ejemplo 6. *Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$. Notemos que todas las derivadas de f coinciden con f , esto es $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = 1$. El resto de Taylor es*

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{n!}x^{n+1}$$

que verifica para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{n!}x^{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto $f(x) = e^x$ tiene un desarrollo en serie de Taylor dado por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Sea ahora $f(x)$ una función dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n \quad \text{si } |x - a| < R. \quad (16)$$

Aquí suponemos que la serie de potencias converge para todo $x \in (a - R, a + R)$, y al valor de la suma de la serie en x lo llamamos $f(x)$. De esta manera f tiene una expansión en serie

alrededor que $x = a$. Nos preguntamos si f tiene una serie de Taylor, y en ese caso, si la serie que define a f coincide con la serie de Taylor de f alrededor de a .

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ que define a f tiene radio de convergencia al menos R , se sigue del Corolario 2 que f es infinitamente derivable en el intervalo $(a-R, a+R)$ y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}.$$

Luego $f^{(k)}(a) = k!a_k$. Despejando a_k y reemplazando en (16) obtenemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Así, si f tiene una expansión en serie de potencias con radio de convergencia positivo, dicha expansión debe ser la serie de Taylor, que es el contenido del siguiente Teorema.

Teorema 42. *Si una función $f(x)$ tiene una expansión en serie de potencias alrededor de un punto $x = a$, entonces esta serie es la serie de Taylor de f alrededor de $x = a$.*

Corolario 3 (Unicidad del desarrollo en serie de potencias). *Sean $\sum a_n(x-a)^n$ y $\sum b_n(x-a)^n$ dos series de potencias alrededor de $x = a$ que convergen para $|x-a| < R$, tales que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad \text{si } |x-a| < R.$$

Entonces $a_n = b_n$ para todo n .

Demostración. Si $f(x)$ denota la suma de ambas series para $|x-a| < R$, entonces sabemos que dichas series deben ser la serie de Taylor de f alrededor de $x = a$, y por lo tanto $a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ para todo n . $\square$

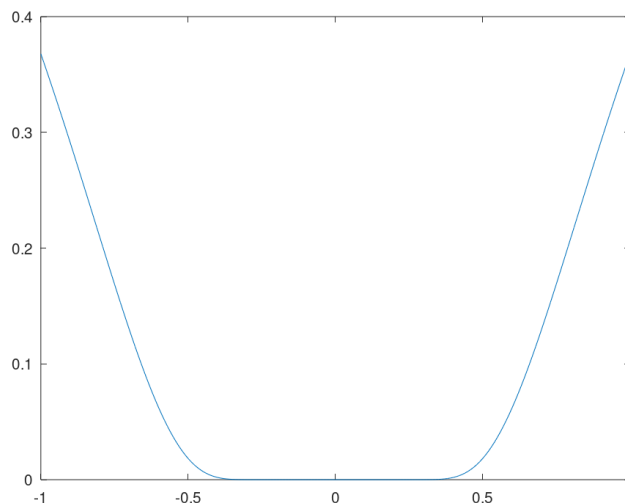


Figura 4: $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Aunque no se distingue, f se anula solo en $x = 0$

Ejemplo 7. Una función infinitamente diferenciable que no tiene desarrollo en serie de potencias:

Sea (ver Figura 4)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Resulta que $f(x)$ es infinitamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$, y en particular $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n (esto se puede probar por inducción). Entonces, si f tuviera un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, con radio de convergencia R , este desarrollo debería ser

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \text{si } |x| < R,$$

por lo que f se anularía en un entorno alrededor de $x = 0$, que sería una contradicción, ya que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

16 Series de Fourier

En esta Sección seguiremos el Capítulo 1 del libro [2], ver también [4].

Diremos que una función f es *continua a trozos* (o *seccionalmente continua*) en un intervalo $[a, b]$ si para alguna partición

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

resulta que f es continua en cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, n$, y además existen (y son finitos) los límites laterales

$$f(x_{i-1}+) = \lim_{x \rightarrow x_{i-1}+} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_i-) = \lim_{x \rightarrow x_i-} f(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Notar que una función continua a trozos en un intervalo $[a, b]$ es acotada en todo el intervalo. Además es integrable pues lo es en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y vale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx.$$

Observemos también que una combinación lineal o un producto de funciones continuas a trozos es una función continua a trozos. Denotemos por $\mathcal{C}_p(a, b)$ al conjunto (que es un espacio vectorial) de funciones continuas a trozos.

16.1 Series de Fourier de cosenos

Supongamos que $f(x) \in \mathcal{C}_p(0, \pi)$ tiene una representación en *serie de Fourier de cosenos*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{para } x \in (0, \pi) \quad (17)$$

donde los coeficientes a_n , $n = 0, 1, \dots$, son números reales. Dada la función f queremos encontrar una fórmula para los coeficientes a_n . Para esto supondremos que la serie (17)

y cualquier otra serie relacionada que aparezca admiten integración término a término (por ejemplo, para (17) esto ocurre si suponemos que la serie converge uniformemente, ver Teorema 32). Entonces integrando (17) tenemos

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^\pi dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi \cos(nx) dx = \frac{\pi a_0}{2}$$

ya que todas salvo la primera de las integrales del lado derecho se anulan. Por lo tanto

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx. \quad (18)$$

Para $m \geq 1$ fijo, multipliquemos (17) por $\cos(mx)$ obteniendo

$$f(x) \cos(mx) = \frac{a_0}{2} \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \cos(mx) \quad \text{para } x \in (0, \pi).$$

Nuevamente, suponiendo que es válido, integramos término a término:

$$\int_0^\pi f(x) \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^\pi \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx. \quad (19)$$

Ahora tenemos en cuenta que, siendo $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(mx) dx &= 0 \\ \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue de (19) que

$$\int_0^\pi f(x) \cos(mx) dx = \frac{a_m \pi}{2},$$

o

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(mx) dx \quad m = 1, 2, \dots$$

Notar que si en esta expresión ponemos $n = 0$ se obtiene la fórmula (18) para a_0 , por lo que podemos escribir

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(mx) dx \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Para una función f cualquiera en $\mathcal{C}_p(0, \pi)$ definimos su *serie de Fourier de cosenos* como la serie dada por el lado derecho de (17) con los coeficientes a_n dados por (20) y escribimos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{para } x \in (0, \pi). \quad (21)$$

Decimos que la serie *representa* a la función f . Notemos que ponemos el signo $\sim$ en lugar de $=$ pues dada f cualquiera no podemos asegurar que la serie converja a $f(x)$ ya que en esta

definición no asumimos ningún tipo de convergencia de la serie. Para una f particular podrá ocurrir que la serie converja o no, converja puntualmente o uniformemente, etc.

El hecho de que f sea continua a trozos asegura que las integrales (18) que definen a los coeficientes a_n existen.

Una serie de Fourier que representa una función $f(x)$ en un intervalo $(0, \pi)$, también representa una función fuera de ese intervalo:

- Si la serie (21) converge a $f(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$, entonces también converge a la extensión par y periódica de período 2π de $f(x)$ en todo el eje x . O sea, converge a $F(x)$ donde F está definida por las condiciones

- ✓ $F(x) = f(x)$ si $0 \leq x \leq \pi$,
- ✓ $F(-x) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- ✓ $F(x + 2\pi) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esto ocurre porque cada término de la serie (21) es par y periódico de período 2π . Notar que $F(x)$ se obtiene a partir de $f(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, reflejándola en el eje y y luego extendiendo por periodicidad.

- Claramente una serie de Fourier de cosenos no puede representar una función $f(x)$ para todo x si f no es par y periódica de período 2π .

Ejemplo 8. Considerar la función $f(x) = x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Es fácil verificar que los coeficientes de Fourier de la serie de cosenos de f son

$$a_0 = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Así podemos escribir

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) \quad 0 < x < \pi. \quad (22)$$

En la Figura 5 vemos las sumas parciales S_3 y S_5 de la serie. Podemos ver que en el intervalo $(-\pi, \pi)$ la serie representa la función $|x|$. En la Figura 6 S_3 y S_5 se grafican en $(-3\pi, 3\pi)$.

Como los términos pares de la serie (22) se anulan, podemos reescribirla como

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \quad 0 < x < \pi. \quad (23)$$

Ejemplo 9. Los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos de la función $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, son

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \quad n \geq 0, n \neq 1$$

$$a_1 = 0$$

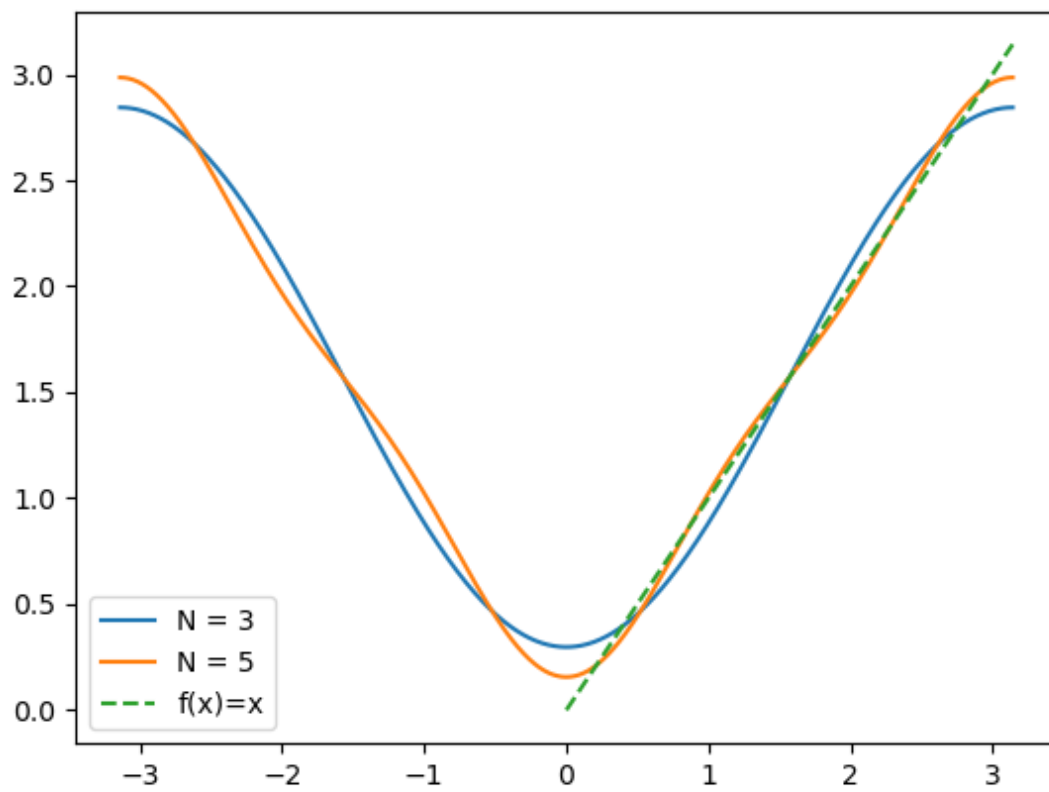


Figura 5: Sumas parciales $S_N(x)$ de la serie (22) de $f(x) = x$

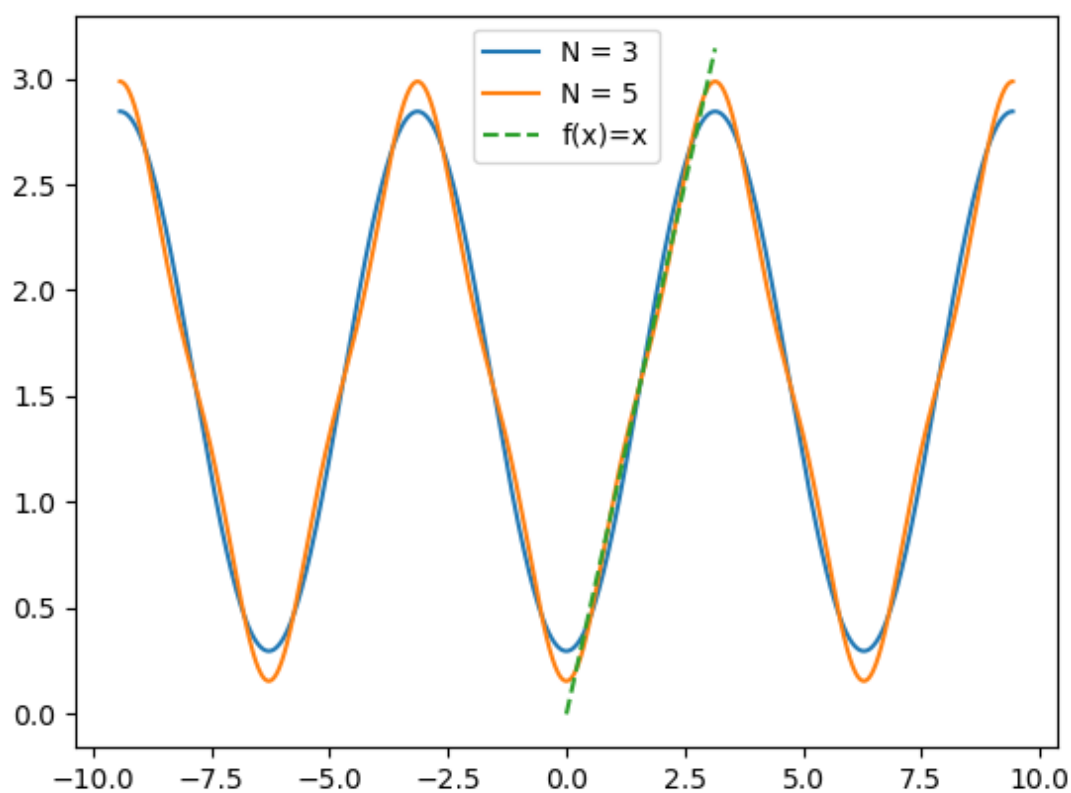


Figura 6: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ de la serie (22) de $f(x) = x, (0 < x < \pi)$

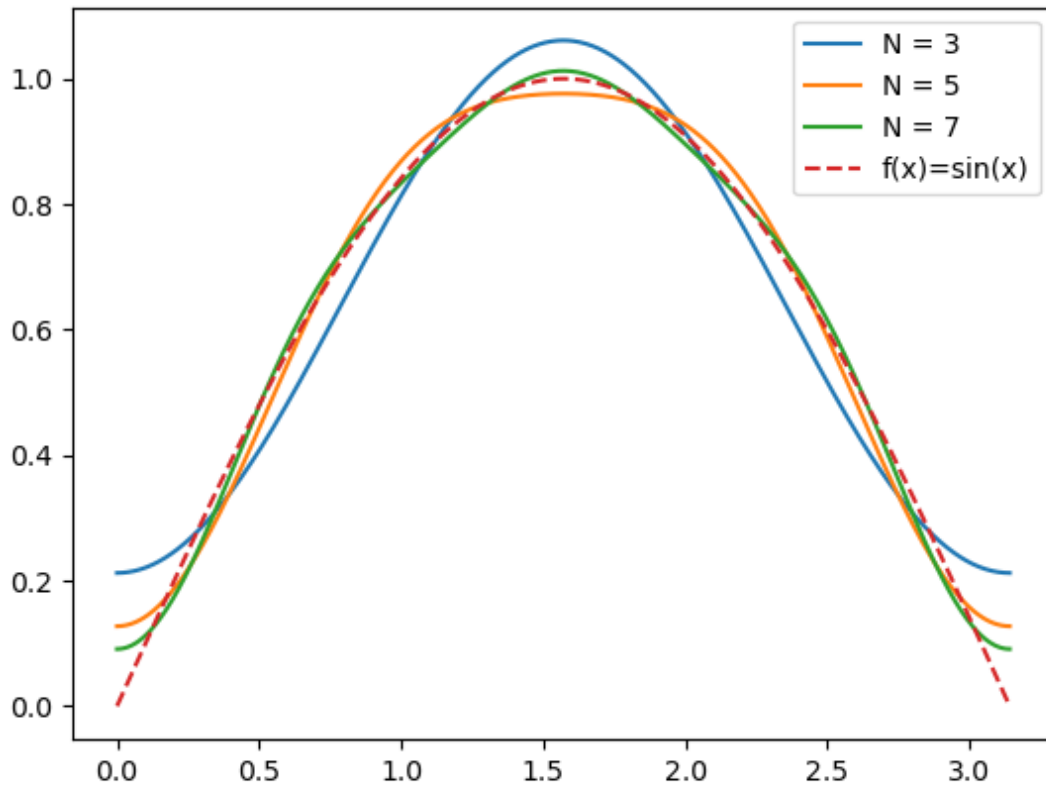


Figura 7: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$ de la serie (22) de $f(x) = \sin x$, $(0 < x < \pi)$

Por lo tanto tenemos la representación

$$\sin x \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos(nx) \quad 0 < x < \pi. \quad (24)$$

En la Figura 7 se muestran algunas sumas parciales en el intervalo $(0, \pi)$ y en la Figura 8 en el intervalo $(-3\pi, 3\pi)$. Como los términos impares de la serie se anulan, podemos reescribirla como

$$\sin x \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \quad 0 < x < \pi.$$

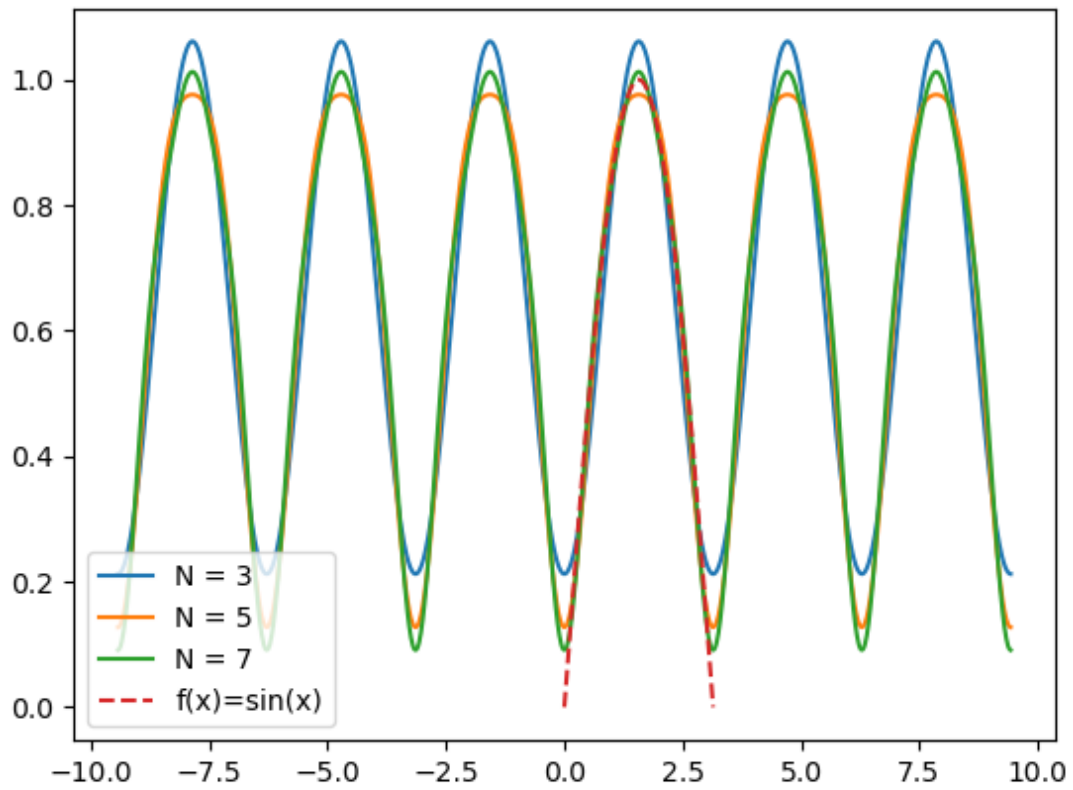


Figura 8: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$ de la serie (22) de $f(x) = \sin x$, $(0 < x < \pi)$

Los gráficos en las Figuras 5, 6, 7, 8 fueron realizados con el Código 1.

```

1
2 import numpy as np
3 from scipy import integrate
4 from math import pi
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 N = [3,5,7] #Sumas parciales que queremos obtener (aca S_3, S_5 y S_7)
8 f = lambda x: np.sin(x) #Definir aca la funcion (en este caso sin(x))
9
10 x = np.linspace(-3*pi,3*pi,1000) #Intervalo para graficar (aca (-3pi,3pi))
11 ax = plt.subplot(111)
12 for k in N:
13     a = [] #Inicializamos el vector de coeficientes de Fourier
14     for n in np.arange(0,k):
15         g = lambda x: 2/pi*f(x)*np.cos(n*x)
16         an,err = integrate.quad(g,0,pi) #Integra entre 0 y pi
17         a.append(an) #Agregamos an a a
18
19 def Scos(x): # Scos sera la serie de cosenos de f (S_k)
20     y = a[0]/2
21     for n in np.arange(1,k):
22         y = y + a[n]*np.cos(n*x)
23     return y
24
25 ax.plot(x,Scos(x), label='N = ' + str(k)) #Grafica S_k
26 print(a) # muestra los coeficientes en linea de comandos
27 x = np.linspace(0,pi,1000)
28 ax.plot(x,f(x),ls='--',label="f(x)=x") # grafica f
29 ax.legend()
30 plt.show()

```

Código 1: Código en Python para calcular Series de Fourier de Cosenos

16.2 Serie de Fourier de senos

Para una función $f \in \mathcal{C}_p(0, \pi)$ se define la serie de Fourier de Senos de f como

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad 0 < x < \pi$$

donde los coeficientes b_n están dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Bajo ciertas condiciones se puede probar que esta serie converge a f en $(0, \pi)$. Podemos hacer algunas observaciones.

- Sea f definida en $0 < x < \pi$. Supongamos que la serie de senos de f converge en $(0, \pi)$. Como la serie converge a 0 en $x = 0$ y $x = \pi$, entonces converge a f en $0 \leq x \leq \pi$ si definimos $f(0) = f(\pi) = 0$. En este caso, la serie de senos converge en todo $x \in \mathbb{R}$ a la extensión $F(x)$ impar y de período 2π de $f(x)$. Esta extensión F puede definirse por

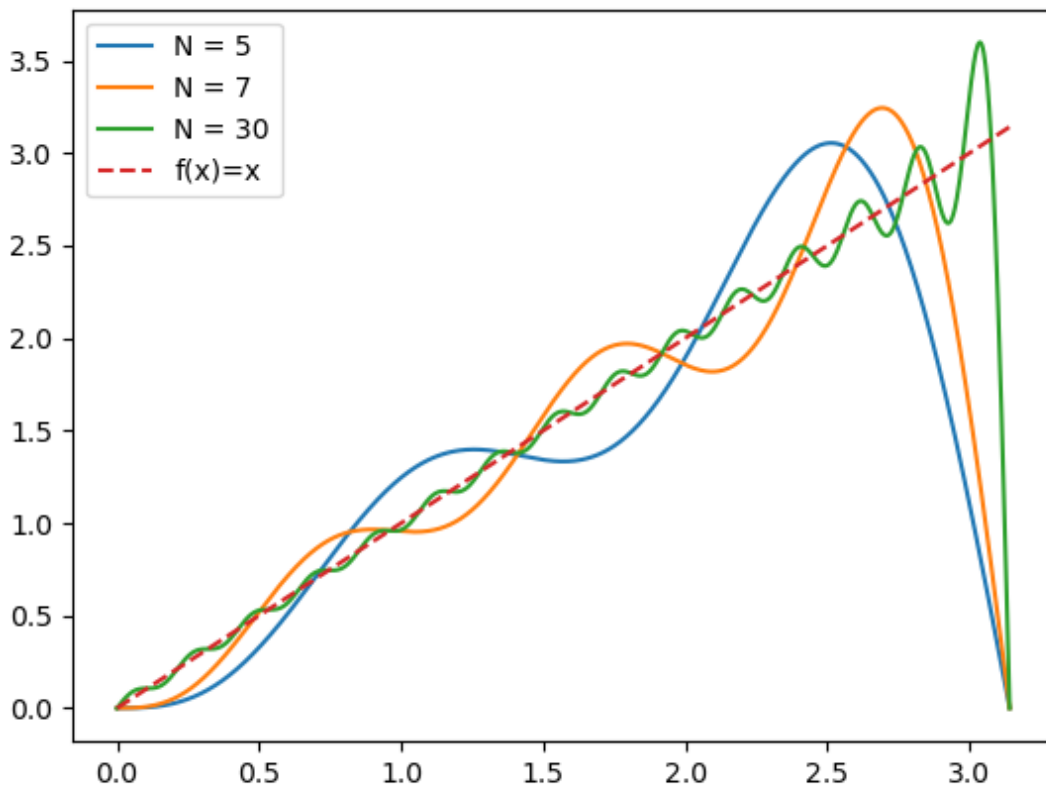


Figura 9: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$ de la serie (25) de $f(x) = x$, $(0 < x < \pi)$

- ✓ $F(x) = f(x)$, $0 \leq x \leq \pi$,
- ✓ $F(-x) = -F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$,
- ✓ $F(x + 2\pi) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Una serie de Fourier de senos en el intervalo $(0, \pi)$ puede usarse para representar también a una función f definida en todo x si esta es par y periódica de período 2π .

Ejemplo 10. Sea $f(x) = x$ con $0 < x < \pi$. Entonces

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad 0 < x < \pi. \quad (25)$$

En las Figuras 9 y 10 se muestran algunas sumas parciales de la serie de Fourier en los intervalos $(0, \pi)$ y $(-3\pi, 3\pi)$. Se puede ver que la serie representa una extensión impar y periódica de la función x modificada de manera que se anule en $x = \pi$. Estos gráficos se realizaron con el Código 2.

```

1
2 import numpy as np
3 from scipy import integrate
4 from math import pi
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 N = [5,7,30] #Sumas parciales que se quieren calcular
8 f = lambda x: x #Introducir aquí la funcion
9
10 ax = plt.subplot(111)
11 x=np.linspace(0,pi,1000)
12
13 for k in N:
14     b = [0] #Ponemos el coeficiente b_0=0
15     for n in np.arange(1,k):
16         g = lambda x: 2/pi*f(x)*np.sin(n*x)
17         bn,err = integrate.quad(g,0,pi)
18         b.append(bn)
19
20     def Ssin(x):
21         y = 0
22         for n in np.arange(1,k):
23             y = y + b[n]*np.sin(n*x)
24         return y
25
26     ax.plot(x,Ssin(x), label='N = ' + str(k))
27     print(b) #Muestra los coeficientes de Fourier
28
29 x=np.linspace(0,pi,1000)
30 ax.plot(x,f(x),ls='--',label="f(x)=x")
31 ax.legend()
32 plt.show()

```

Código 2: Código en Python para calcular Series de Fourier de Senos

16.3 Series de Fourier

Dada $f \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$, la podemos descomponer como

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

donde g y h son funciones en $\mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ definidas por

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (26)$$

Notar que g es una función par y h es impar. Consideremos la serie de Fourier de Cosenos de g

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad 0 < x < \pi \quad (27)$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, \dots \quad (28)$$

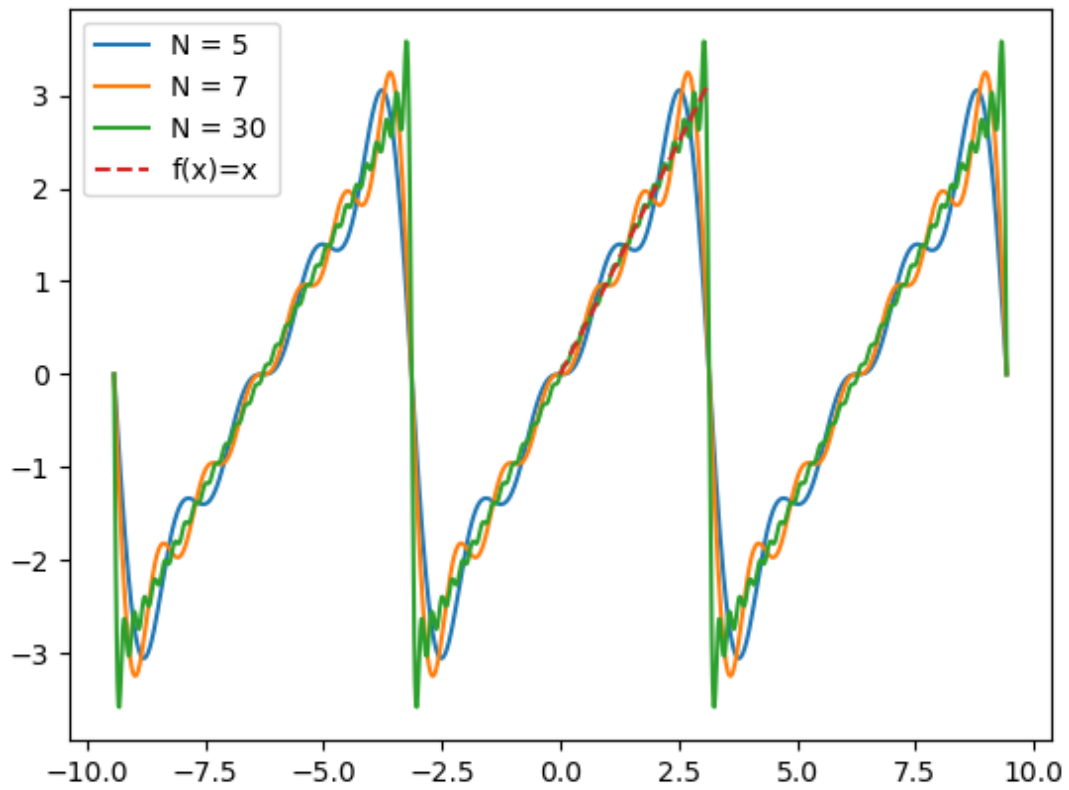


Figura 10: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(-3\pi, 3\pi)$ de la serie (25) de $f(x) = x$, $(0 < x < \pi)$

y la serie de Fourier de Senos de h

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad 0 < x < \pi \quad (29)$$

con

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Si dichas series representan a g y h en el intervalo $(0, \pi)$, sabemos que también las representan en el intervalo $(-\pi, \pi)$, dada la paridad de las funciones g y h y de los términos de las series. Como f es la suma de g y h , entonces la suma de las dos series de g y de h es una representación en serie de f , llamada la *serie de Fourier* de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad -\pi < x < \pi. \quad (31)$$

Teniendo en cuenta la definición (28) de a_n y la definición (26) de g tenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(-x) \cos(nx) dx \right].$$

Haciendo una sustitución $x = -s$ en la segunda integral (y usando que la función $\cos$ es par) obtenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Análogamente, usando la definición (26) de h y (30) de b_n tenemos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx - \int_0^{\pi} f(-x) \sin(nx) dx \right].$$

Con la misma sustitución de antes y usando que $\sin(x)$ es impar llegamos a

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Resumiendo, la serie de Fourier de f está dada por (31) con los coeficientes definidos por (32) y (33). Algunas observaciones:

- Si la serie de Fourier de $f(x)$ representa a f en el intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces también representa en todo $\mathbb{R}$ a la extensión $F(x)$ de $f(x)$ de período 2π . Esto surge de la periodicidad del $\sin$ y $\cos$. Claramente, si f ya era una función definida en todo $\mathbb{R}$ y periódica de período 2π , entonces F coincide con f .
- Si f es par en $(-\pi, \pi)$, entonces la serie (31) coincide con la serie de Fourier de Cosenos en $(0, \pi)$. Del mismo modo, si f es impar en $(-\pi, \pi)$, entonces la serie (31) coincide con la serie de Fourier de Senos en $(0, \pi)$

Ejemplo 11. *La serie de Fourier de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

es

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(n\pi) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi) \right]. \quad (34)$$

Notemos que siendo que

$$x = \frac{x + |x|}{2}$$

la serie (34) es el promedio de la serie de cosenos (22) de la función x en el intervalo $(0, \pi)$ (que es también la serie de Fourier de la función par $|x|$ en $(-\pi, \pi)$) y de la serie de senos (25) de la función x en el intervalo $(0, \pi)$ (y que como es impar, es la serie de Fourier de la función x en $(-\pi, \pi)$).

Las Figuras 11 y 12 muestran gráficas de algunas sumas parciales de la serie (34), que fueron obtenidas con el código de Listing 3.

```

1
2 import numpy as np
3 from scipy import integrate
4 from math import pi
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7 N = [4,10,16] #Sumas parciales a calcular
8 f = lambda x: x*np.heaviside(x,0)
9 #np.heaviside es una funcion ya definida que vale 1 si x>0 y 0 si x<0
10
11 x=np.linspace(-pi,pi,1000)
12 ax = plt.subplot(111)
13 for k in N:
14     a = [1/pi*integrate.quad(f,-pi,pi)[0]] #el coef a_0 lo calculamos aparte
15     b = [0] # b_0 no se usa
16     for n in np.arange(1,k):
17         g = lambda x: 1/pi*f(x)*np.cos(n*x)
18         an,err = integrate.quad(g,-pi,pi) #definimos a_n
19         a.append(an) #agregamos a_n al vector a
20         g = lambda x: 1/pi*f(x)*np.sin(n*x) #definimos b_n
21         bn,err = integrate.quad(g,-pi,pi) #agregamos a_n al vector b
22         b.append(bn)
23
24 def SFourier(x): #calculamos la suma parcial S_k
25     y = a[0]/2;
26     for n in np.arange(1,k):
27         y = y + a[n]*np.cos(n*x) + b[n]*np.sin(n*x)
28     return y
29
30 ax.plot(x,SFourier(x), label='N = ' + str(k)) # grafica la suma S_k
31 print("Coefs a_n = " + str(a)) #muestra los coef a_n
32 print("Coefs b_n = " + str(b)) #muestra los coef b_n
33
34 x=np.linspace(-pi,pi,1000)

```

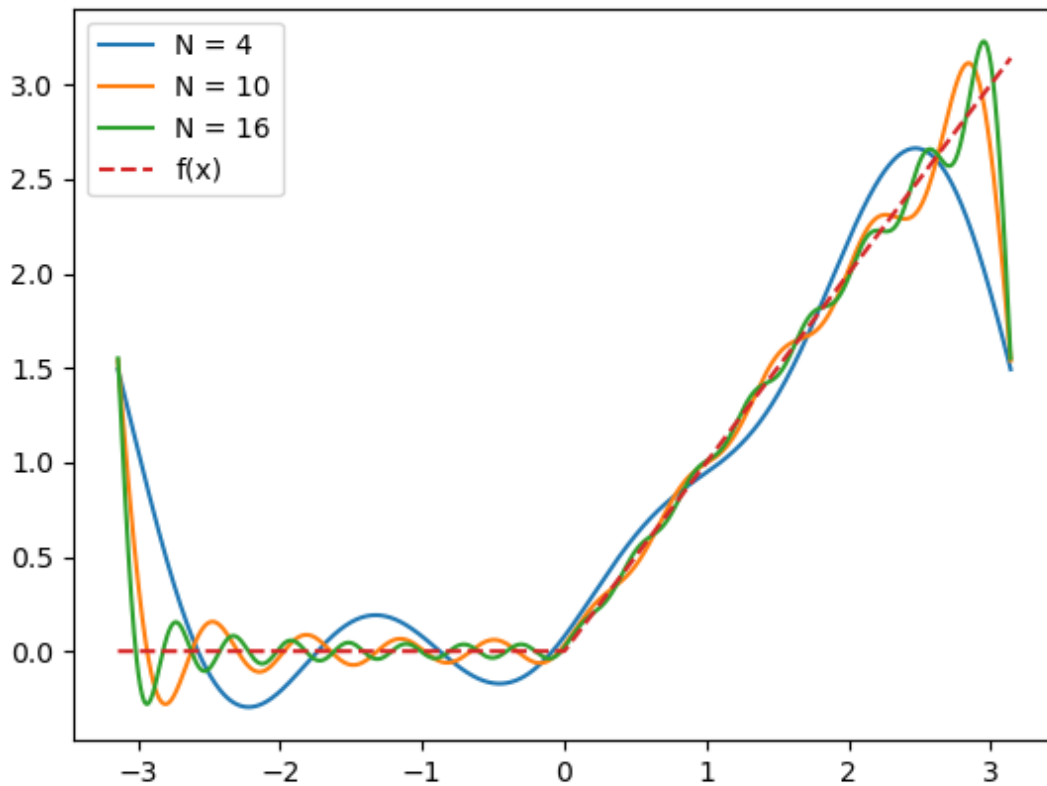


Figura 11: Sumas parciales $S_N(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de la serie (34) de $f(x) = \max\{0, x\}$, $(-\pi < x < \pi)$

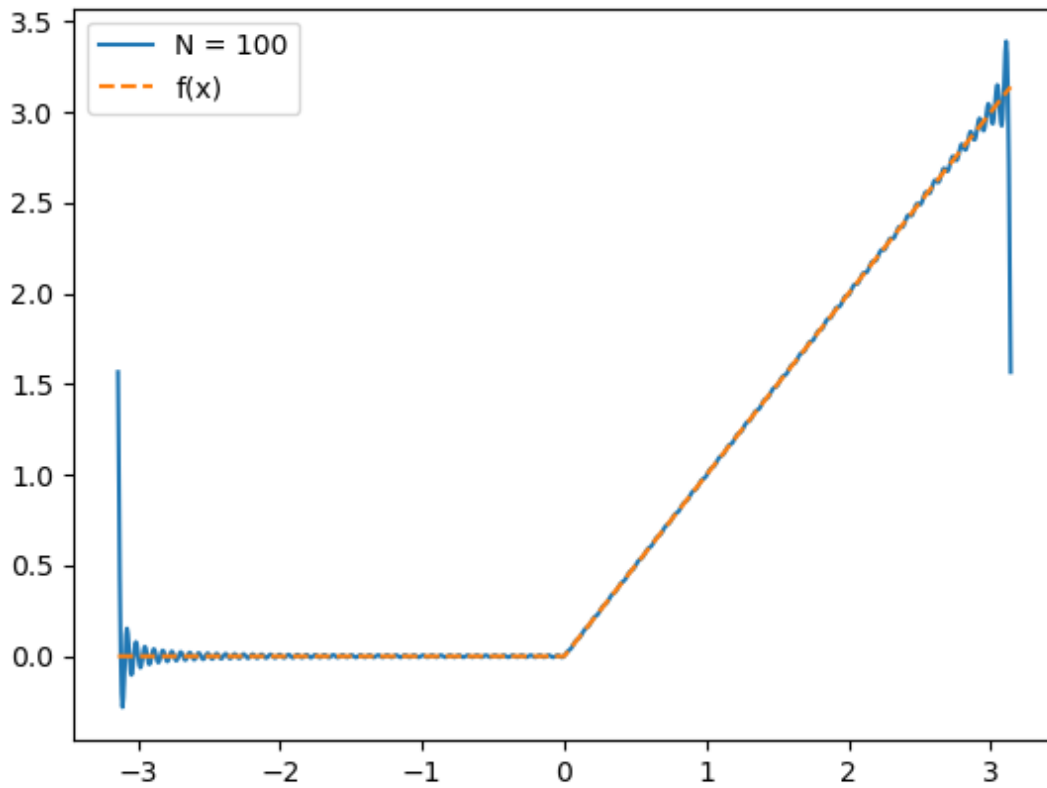


Figura 12: Suma parcial $S_{100}(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de la serie (34) de $f(x) = \max\{0, x\}$, $(-\pi < x < \pi)$

```
35 ax.plot(x,f(x),ls='--',label="f(x)") #grafica f
```

Código 3: Código en Python para calcular Series de Fourier

16.4 Desigualdad de Parseval

Sea $f \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$. Denotemos por S_N las sumas parciales de la serie de Fourier de f :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad -\pi < x < \pi.$$

En el espacio $\mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ consideremos el producto interno L^2 , es decir,

$$(g, h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad g, h \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$$

con la norma asociada

$$\|g\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad g \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi).$$

La norma $\|f - S_N\|$ se llama *error cuadrático medio* entre f y su suma parcial de Fourier. Obtendremos una expresión para este error. Primero teniendo en cuenta que

$$(\cos(nx), \cos(mx)) = \pi \delta_{mn}, \quad (\sin(nx), \sin(mx)) = \pi \delta_{mn}, \quad (\sin(nx), \cos(mx)) = 0$$

podemos ver que

$$(S_N, S_N) = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

Además

$$(f, S_N) = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \|f - S_N\|^2 &= (f - S_N, f - S_N) \\ &= (f, f) - 2(f, S_N) + (S_N, S_N) \\ &= \|f\|^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]. \end{aligned}$$

En particular, siendo que $\|f - S_N\|^2 \geq 0$ obtenemos

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \|f\|^2. \quad (35)$$

Proposición 1 (Desigualdad de Parseval). Sea $f \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ y consideremos su serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad -\pi < x < \pi.$$

Entonces

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \|f\|^2. \quad (36)$$

Demostración. Se sigue de (35) que las sumas parciales de la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ están acotadas, por lo tanto la serie es convergente y su suma verifica (36). $\square$

De (36) obtenemos que las series $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ son convergentes, y por lo tanto el término general de cada serie converge a 0.

Corolario 4. Si a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de una función $f \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

16.5 Un Teorema de Fourier

Un teorema que da condiciones bajo las cuales la serie de Fourier de una función converge a la función se suele llamar un teorema de Fourier. En esta subsección queremos demostrar uno de estos teoremas.

Recordemos que si $f \in \mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ entonces en cada punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$ existen los límites laterales

$$f(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x), \quad f(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x),$$

con uno solo de los límites en los casos $x_0 = \pm\pi$. Definimos las derivadas “laterales” $f'_R(x)$ y $f'_L(x)$ en un punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$ como

$$f'_L(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0}, \quad f'_R(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0}$$

observando que nuevamente solo una de las derivadas se define en $x_0 = \pm\pi$. Observemos no es necesario que f puede tener una discontinuidad de salto en x_0 y tener derivadas f'_L o f'_R debido a que en tales definiciones se usan los límites laterales $f(x_0-)$ o $f(x_0+)$ en lugar del valor $f(x_0)$.

Teorema 43. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es continua a trozos en $(-\pi, \pi)$ y periódica de período 2π . Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ en el que las derivadas $f'_L(x)$ y $f'_R(x)$ existen, la serie de Fourier de f converge al valor medio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

de los límites laterales de f en x .

Notemos que si f es continua en x , entonces $\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x)$. Así, si f es como en el enunciado del Teorema, tenemos que la igualdad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

en cada x en el que f es continua y existen las derivadas $f'_L(x)$ y $f'_R(x)$.

Demostración del Teorema 43. Usando la definición de los coeficientes de Fourier de f tenemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds \cos(nx) + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds \sin(nx) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(s) [\cos(ns) \cos(nx) + \sin(ns) \sin(nx)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(n(s-x)) ds \end{aligned}$$

Definiendo el *núcleo de Dirichlet*

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt) \quad (37)$$

podemos escribir

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(s-x) ds.$$

Como el integrando $f(s) D_N(s-x)$ es periódico de período 2π , es un simple ejercicio probar que si el intervalo de integración se cambia por otro intervalo de longitud 2π la integral no cambia. Así tenemos

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) D_N(s-x) ds,$$

donde, para cada x , estamos integrando en un intervalo de longitud 2π centrado en x . Entonces

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^{x+\pi} f(s) D_N(s-x) ds + \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^x f(s) D_N(s-x) ds = \frac{I_N(x) + J_N(x)}{\pi} \quad (38)$$

con

$$I_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^{x+\pi} f(s) D_N(s-x) ds, \quad J_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^x f(s) D_N(s-x) ds.$$

Haciendo la sustitución $u = s - x$ y llamando $f(u+x) = g(u)$ podemos escribir $I_N(x)$ como

$$I_N(x) = \int_0^{\pi} f(u+x) D_N(u) du = \int_0^{\pi} g(u) D_N(u) du.$$

Notemos que g es continua a trozos en $(-\pi, \pi)$ y periódica de período 2π puesto que f lo es (sugerencia: verificar que f es continua a trozos en cualquier intervalo acotado). En particular g es continua a trozos en $(0, \pi)$.

Sea x tal que $f'_R(x)$ exista. Entonces también existe $g'_R(0)$ y vale

$$g'_R(0) = f'_R(x)$$

(verificar: utilizar que $g(0+) = f(x+)$). Se sigue del Lemma 2 que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N(x) = \frac{\pi}{2} g'_R(0) = \frac{\pi}{2} f(x+). \quad (39)$$

Similarmente, haciendo primero la sustitución $z = s - x$, luego $u = -z$ tenemos

$$\begin{aligned} J_N(x) &= \int_{-\pi}^0 f(z+x) D_N(z) dz \\ &= \int_0^\pi f(-u+x) D_N(-u) dz \\ &= \int_0^\pi f(x-u) D_N(u) ds \end{aligned}$$

donde hemos usado que D_N es una función par. Nuevamente, la función $g(u) = f(x-u)$ es continua a trozos en $(0, \pi)$. Suponemos ahora que x es tal que existe $f'_L(x)$. Es fácil ver que

$$g(0+) = f(x-), \quad g'_R(0) = -f'_L(x).$$

Por lo tanto, aplicando nuevamente el Lemma 2 tenemos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(x) = \frac{\pi}{2} g(0+) = \frac{\pi}{2} f(x-). \quad (40)$$

Luego, si x es tal que existen $f'_R(x)$ y $f'_L(x)$, se sigue de (38) junto con (39) y (40) que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

como queríamos probar. $\square$

Corolario 5. Sea f una función continua a trozos en $(-\pi, \pi)$ tal que f'_R existe en $[-\pi, \pi)$ y f'_L existe en $(-\pi, \pi]$. Si F es su extensión periódica de período 2π a $(-\infty, +\infty)$, entonces la serie de Fourier de f converge en todo punto x a

$$\frac{F(x+) + F(x-)}{2}.$$

En el siguiente Lema usaremos que el el núcleo de Dirichlet $D_N(u)$ definido en (37) se puede expresar como

$$D_N(u) = \frac{\sin[(2N+1)u/2]}{2 \sin(u/2)}, \quad \text{para } u \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (41)$$

Esta expresión puede probarse por inducción.

Lema 2. Sea g una función continua a trozos en $(0, \pi)$ tal que $g'_R(0)$ existe. Entonces tenemos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^\pi g(u) D_N(u) du = \frac{\pi}{2} g(0+),$$

Demostración. Escribimos

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(u) D_N(u) du = A_N + B_N$$

con

$$A_N = \int_0^{\pi} [g(u) - g(0+)] D_N(u) du \quad y \quad B_N = \int_0^{\pi} g(0+) D_N(u) du.$$

Usando la expresión (41) obtenemos

$$A_N = \int_0^{\pi} \frac{g(u) - g(0+)}{2 \sin(u/2)} \sin \frac{(2N+1)u}{2} du = \int_0^{\pi} G(u) \sin \frac{(2N+1)u}{2} du$$

con

$$G(u) = \frac{g(u) - g(0+)}{2 \sin(u/2)}.$$

La función G verifica es continua a trozos en $(0, \pi)$ y existe $G(0+)$ dado por $G(0+) = g'_R(0)$. Por el Lema 3 concluimos entonces que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N = 0.$$

Como

$$B_N = \int_0^{\pi} g(0+) D_N(u) du = g(0+) \int_0^{\pi} D_N(u) du = \frac{\pi}{2} g(0+)$$

concluimos la demostración. □

Lema 3. Sea $G \in \mathcal{C}_p(0, \pi)$. Entonces

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} G(u) \sin \left(\frac{(2N+1)u}{2} \right) du = 0.$$

Demostración. Escribimos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} G(u) \sin \left(\frac{(2N+1)u}{2} \right) du &= \int_0^{\pi} G(u) \sin \left(\frac{u}{2} + Nu \right) du \\ &= \int_0^{\pi} G(u) \sin \frac{u}{2} \cos Nu du + \int_0^{\pi} G(u) \cos \frac{u}{2} \sin Nu du. \end{aligned} \quad (42)$$

La primera integral puede pensarse como el coeficiente a_N de la serie de Fourier de la extensión par de $G(u) \sin \frac{u}{2}$ multiplicado por $\frac{\pi}{2}$. Como esta extensión pertenece a $\mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ se sigue del Corolario 4 que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} G(u) \sin \frac{u}{2} \cos Nu du = 0.$$

Análogamente, la segunda integral en (42) puede pensarse como el coeficiente b_N de la serie de Fourier de la extensión impar de $G(u) \cos \frac{u}{2}$ multiplicado por $\frac{\pi}{2}$. Como esta extensión también pertenece a $\mathcal{C}_p(-\pi, \pi)$ se sigue del Corolario 4 que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} G(u) \cos \frac{u}{2} \sin Nu du = 0.$$

Esto concluye la prueba. □

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol. *Análisis Matemático*. Reverte, 1996.
- [2] James Brown and Ruel Churchill. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw Hill; 8th edition, 2011.
- [3] A. Friedman. *Advanced Calculus*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.
- [4] G.F. Simmons and John S. Robertson. *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, 1993.