FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS NUMÉRICO II – PRÁCTICA 3

Licenciatura en Matemática – Segundo Cuatrimestre 2020

Métodos de diferencias finitas para ecuaciones hiperbólicas

1. *a*) Sea $a > 0$, resuelva la ecuación $u_t + au_x = 0$, en toda la recta, con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

   b) Proceda análogamente con $u_t - au_x = 0$.

   c) Reemplace $e^{i(kx+\omega t)}$ en ambas ecuaciones y halle ω en cada caso. Concluya que ningún modo es amortiguado y que en un lapso Δt su fase cambia en $-ak\Delta t$.

   d) Analizar la estabilidad de la ecuación en diferencias obtenida discretizando por diferencias centradas la parte espacial y con un método explícito de primer orden en t la ecuación diferencial:

   $$u_t + au_x = bu_{xx} \qquad a > 0,\ b > 0$$

   ¿Coinciden los resultados con los que corresponden a los casos límite $a = 0$ (problema sin convección) y $b = 0$ (problema sin difusión)?

2. Verifique que el esquema explícito con up-wind para la ecuación

   $$u_t + u_x = 0$$

   puede escribirse como:

   $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

   observe que esta expresión da un esquema centrado en x para

   $$u_t + u_x = \frac{\Delta x}{2}u_{xx}$$

   Concluya que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en x para la ecuación de transporte al cual se le agrega "difusión artificial". Compare el orden del esquema up-wind con la de este último. Encuentra alguna contradicción?

3. Demostrar el siguiente resultado. Si $q(x) \approx c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 ...$ para $x \approx 0$ entonces

$$arctg(q(x)) = c_1 x + c_2 x^2 + (c_3 - \frac{1}{3} c_1^3) x^3 ...$$

   si $x \approx 0$.

4. Analice los modos de Fourier cuando se utiliza up-wind.
   Estudie los errores del factor de amortiguamiento $\lambda(k)$ y de fase para el k-ésimo modo. Resuelva numéricamente el problema $u_t + u_x = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x)$ (característica del intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$). Grafique la solución numérica vs. la exacta para distintos valores de tiempo y compare con los resultados obtenidos.

5. Considere $a > 0$ constante. Se define el método de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} a\nu(1 + a\nu) u_{j-1}^n + (1 - a^2\nu^2) u_j^n - \frac{1}{2} a\nu(1 - a\nu) u_{j+1}^n \qquad \nu = \frac{\triangle t}{\triangle x}$$

   para aproximar las soluciones de

$$u_t + a u_x = 0$$

   Halle el error de truncado. Analice la estabilidad por el método de Fourier y realice un análisis similar al del ejercicio anterior con los modos de Fourier. Resuelva numéricamente el mismo problema allí propuesto con este esquema y compare.

6. *a*) Probar que las soluciones de la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad x \in [a, b] \tag{1}$$

   satisfacen:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b))$$

   b) Probar que la discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

   satisface una relación análoga.

   c) Analizar qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

   ¿Qué error de truncado poseen estos esquemas?

7. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

realize un estudio similar al de los ejercicios 4 y 5, para el esquema (Box Scheme)

$$\frac{1}{2}\frac{(u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a\frac{1}{2}\frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

Piense en como "despejar" el término de la capa $n+1$. Puede intuir el despeje correcto utilizando la condición CFL. Estudie qué tipo de condiciones de contorno necesita el esquema.

8. Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden (caso particular de (1) con $f(u) = \frac{u^2}{2}$):

$$u_t + uu_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x)$$

a) Verifique que la solución queda definida implícitamente por $u = u_0(x - ut)$.

b) Las curvas características son de la forma $(x(t), t)$ con $x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.

c) Demuestre que $u_x = \frac{u_0'(x-ut)}{1+tu_0'(x-ut)}$ y por ende si para algún x_0 es $u_0'(x_0) < 0$ entonces existe un tiempo crítico t_c en el cual deja de existir u_x. Haga la misma cuenta para u_t.

9. Resolver numéricamente el problema del ejercicio previo.

a) Utilizar como dato inicial $u_0(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Resolver utilizando el método explícito de primer orden en t:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t\ u_i^n \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\triangle x} \right)$$

¿Necesita una condición de contorno a la derecha? Utilice $\triangle x = 0{,}1$. Pruebe con valores de $\triangle t = 0{,}2$, y $\triangle t = 0{,}05$. ¿Qué observa?

b) Repetir el análisis para $u_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

c) Para el problema del ítem ii) utilizar el esquema explícito con "up-wind":

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \triangle t u_i^n \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\triangle x} \right)$$

Utilizar $\triangle x = 0{,}1$, y $\triangle t = 0{,}1$, $\triangle t = 0{,}01$, y $\triangle t = 0{,}001$ Analizar los resultados.

Algunos ejercicios adicionales sobre la ecuación de ondas

10. Considere las siguientes discretizaciones de la ecuación de ondas (para este caso $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$)

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$
$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2} r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}$$

estudie consistencia y estabilidad de ambos esquemas.

11. La función u satisface la ecuación:

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad x \in [0,1]$$

con condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$ y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \frac{1}{8}\sin(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0$$

Usar la representación usual de las derivadas segundas, y una aproximación por diferencias centradas para la condición inicial sobre la derivada, para calcular numéricamente una solución para $t = 0{,}5, t = 1$, con $\triangle x = 0{,}1$, $\triangle t = 0{,}1$.

Hallar la solución analítica, y calcular el error de la solución numérica.

12. i) Escribir la ecuación de onda $u_{tt} = u_{xx}$ como un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (defina $p = u_x$ y $q = u_t$) .
ii) Discretizar las ecuaciones obtenidas según:

$$\frac{1}{2\triangle x}(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = \frac{1}{\triangle t}(q_{i,j+1} - \frac{1}{2}(q_{i+1,j} + q_{i-1,j}))$$
$$\frac{1}{2\triangle x}(q_{i+1,j} - q_{i-1,j}) = \frac{1}{\triangle t}(p_{i,j+1} - \frac{1}{2}(p_{i+1,j} + p_{i-1,j}))$$

Probar que esta discretización es estable para $\frac{\triangle t}{\triangle x} \leq 1$.