FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISIS NUMÉRICO II – PRÁCTICA 1

Licenciatura en Matemática – Segundo Cuatrimestre 2020

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Problemas de valores iniciales[1]

1. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\operatorname{sen}(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\operatorname{sen}(t) + \cos(t)$.

   a) Escribir la iteración del método de Euler para esta ecuación.
   b) Calcular el error de truncado local.
   c) ¿Qué paso h debe elegirse para que el error al estimar $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sea menor que 10^{-2}?

2. Graficar simultáneamente en la región $[0, 10] \times [0, 10]$ las soluciones que se obtienen del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y'(t) &= (y(t) - 5)(\cos^2(t) - 0{,}5) \\ y(0) &= k \end{aligned}$$

al utilizar el método de Euler con paso $h = 0{,}01$ para $k = 0, 1, \dots, 10$.

3. Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

   a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.
   b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?
   c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

[1] Una parte importante de esta práctica fue tomada de la Práctica 2, Elementos de Cálculo Numérico, Segundo Cuatrimestre 2019, Departamento de Matemática, FCEN–UBA.

4. Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma
$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$
tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0+h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

5. Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente el problema $y' = y$, $y(0) = 1$, en el intervalo $[0,1]$ con ambos métodos, tomando $h = 0{,}1$, $h = 0{,}0625$, $h = 0{,}05$, $h = 0{,}025$ y $h = 0{,}01$. Para cada h calcular el error que se comete al aproximar $y(1)$: $e_h = |y(1) - y_N|$. Graficar $\log(e_h)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

6. Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

   a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:
   $$y_i = (1+\lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$
   b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar con la solución exacta.
   c) Resolver usando el programa del Ejercicio 4 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?
   d) Repetir los items anteriores considerando el método de Euler implícito. ¿Qué se observa?

7. Considerar la ecuación:
$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{e^{-y}}{t} \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

   a) Probar que $0 \le y(t) \le t$ para $t \ge 1$.
   b) Escribir la iteración dada para esta ecuación por el método de Euler. Probar que la solución numérica resultará creciente.
   c) Calcular el error de truncado del método de Euler aplicado a la ecuación.
   d) Dar un valor de paso h que garantice que el error de la estimación numérica de $y(2)$ sea menor que 10^{-3}.

8. Considerar la ecuación
$$x' = x^2, \qquad x(0) = \frac{1}{2}$$

   a) Calcular el tiempo T en que la solución analítica explota.

b) Si se aplica el método de Euler explícito, ¿se puede esperar un tiempo de explosión finito de la solución numérica?

c) Aplicar el método de Euler adaptativo con el parámetro λ elegido de manera tal que el tiempo de explosión T_λ de la solución numérica diste de T en menos de 10^{-1}.

d) Comparar gráficamente en el intervalo $[0, T - 0{,}1]$ las soluciones obtenidas por el método de Euler con para $h = 0{,}05$, el método de Euler adaptativo y el obtenido aplicando el comando `ode`.

9. Se quiere estimar, aplicando el método de Euler el valor de e como $x(1)$ donde $x(t)$ es solución de $x' = x$, $x(0) = 1$. Hallar un paso h para que el error cometido resulte $< 10^{-3}$. Repetir para el método de Taylor de orden 2.

10. Probar que una ecuación de orden n:

$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big),$$

se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

11. Modificar el programa del Ejercicio 4 para que acepte ecuaciones vectoriales: la solución y deberá ser una matriz de $m \times n$, donde m es el número de pasos temporales y n la cantidad de variables del problema. De este modo, la fila i de y corresponderá al valor de la solución en todas sus variables a tiempo t_i

12. Considerar el método de Euler modificado:

$$y_{i+1} = y_i + h\ f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right).$$

Probar que el error de truncado es $O(h^2)$. ¿Qué ventaja presenta este método respecto del método de Taylor de segundo orden?

13. Considerar el problema

$$x'' - 3x' + 2x = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$$

Resolver la ecuación analíticamente y aproximar el valor de $x(1)$ con un método de Runge-Kutta de orden 2 para distintos valores de h.

14. Implementar un programa que resuelva sistemas de la forma

$$y' = f(t, y),$$

utilizando el método de Runge Kutta de orden 4 dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\Big[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\Big]$$

donde:

$$\begin{gathered} K_1 = f(t_i, y_i) \\ K_2 = f\Big(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}K_1\Big) \\ K_3 = f\Big(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}K_2\Big) \\ K_4 = f\Big(t_i + h, y_i + hK_3\Big). \end{gathered}$$

15. Hallar los errores locales para los métodos de Euler explícito e implícito.

16. Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

    - Adams–Bashforth

    $$x_{n+3} - x_{n+2} = \frac{h}{12}\left(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n\right)$$

    - Adams–Moulton

    $$x_{n+3} - x_{n+2} = \frac{h}{12}\left(5f_{n+3} - 8f_{n+2} - f_{n+1}\right)$$

17. Considerar el método a 2 pasos

    $$x_{n+2} + ax_{n+1} + ax_n = h\left(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right).$$

    Determinar a, β_0, β_1 y β_2 de modo tal que el método resultante tenga orden 4.

Aplicaciones

18. **Sistema predador-presa.** Se tienen dos poblaciones, una de predadores y otra de presas, cuyo número a tiempo t denotamos $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. En ausencia de presas, x tiende a decaer a una tasa α, mientras que en ausencia de predadores y tiende a crecer a una tasa β. Además, los encuentros de predadores y presas hacen crecer la población de los primeros y decrecer la de los segundos, de acuerdo a cierta proporción. De esto modo, se obtiene el sistema:

    $$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy, \end{aligned}$$

    donde γy es la tasa de crecimiento de x (mayor cuanto más presas haya) y δx es la tasa de mortandad de presas (mayor cuanto más predadores haya). Se asume que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son todos positivos.

    a) Dar condiciones sobre los parámetros y los niveles de x e y que garanticen la estabilidad de las poblaciones. Es decir, que $x(t + \Delta t) = x(t)$ e $y(t + \Delta t) = y(t)$ para todo $\Delta t > 0$.

b) Elegir valores de α, β, γ, δ, x_0 e y_0 que satisfagan las condiciones del item anterior y resolver utilizando el método de Euler. Realizar dos gráficos: uno de x e y en función de t (simultáneamente) y otro de y en función de x. ¿Se mantiene constante la solución?

c) Tomar $\alpha = 0{,}25$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0{,}01$, $x_0 = 80$ e $y_0 = 30$. Resolver utilizando el método de Euler y realizar gráficos como los del item anterior.

d) Para los mismos parámetros del item anterior, resolver ahora utilizando el método de Runge–Kutta de orden 4 del ejercicio 14. Comparar con la solución obtenida con el método de Euler.

19. **El modelo SIR de transmisión de enfermedades infecciosas.** La población se divide en tres grupos o compartimentos: susceptibles, infectados y recuperados. En tiempo t estos grupos tienen $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ individuos, respectivamente, que bajo ciertas hipótesis evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas (ver por ejemplo `http://mat.uab.cat/matmat_antiga/PDFv2013/v2013n03.pdf`):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI\\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \nu I\\ \frac{dR}{dt} &= \nu I.\end{aligned}$$

donde $\nu = \frac{1}{D}$ siendo D el tiempo que dura la infección en un individuo, y $\beta > 0$ es la razón de transmisión de la enfermedad, que se puede calcular como $\beta = \frac{R_0 \nu}{N}$, donde N es la cantidad de individuos de la población, $N = S(t) + I(t) + R(t)$, y R_0, número básico de reproducción, es la cantidad de contagios provocados por un individuo en el tiempo que dura la infección (y por lo tanto, $R_0\nu$ es la cantidad de contagios provocados por un individuo por unidad de tiempo).

Algunas propiedades que se pueden deducir de este sistema de ecuaciones son:

- Los límites de $S(t), I(t)$ y $R(t)$ cuando $t \to \infty$ existen, y más aún, la enfermedad siempre se extingue, esto es, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.
- La situación de epidemia depende del número $R_e = \frac{S(0)}{N} R_0$, llamado índice de reproducción efectiva. Si $R_e < 1$ entonces $I(t)$ decrece monótonamente a 0 y no se produce epidemia. Si $R_e > 1$, entonces $I(t)$ comienza creciendo hasta alcanzar un máximo y luego decrece a 0.
- La epidemia concluye antes de que toda la población se infecte. Más específicamente, $\lim_{t\to\infty} S(t) \geq S(0)e^{-R_0}$.

Para una población de 10^6 habitantes con 100 individuos infectados a tiempo 0, estimar la duración de la epidemia, el valor máximo de $I(t)$ y el tiempo en que se alcanza, y la cantidad total de individuos susceptibles al finalizar la epidemia para valores de R_0 =5, 2, 1.3.

20. **Galileo.** Leer el siguiente párrafo:

> – Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que 'una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos, llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo'. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 o 3 dedos; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.
>
> Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descripto en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo.

La posición de un objeto en caída libre puede modelarse con la ecuación:

$$\ddot{x} = \frac{\gamma}{m}\dot{x}^2 - g \tag{1}$$

siendo x la altura, m la masa del cuerpo, $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ la aceleración gravitatoria y γ una constante que representa el rozamiento con el fluido en que se produce la caída. Deben darse condiciones sobre la altura y la velocidad iniciales.

La Torre de Pisa mide 55,8 mts. La masa de una bala de cañón es de 16 Kg, y la de una bala de mosquete 0,0082 Kg. Las costantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 0{,}0058$ y $\gamma_m = 3{,}74 \times 10^-5$, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

Implementar un programa llamado `galileo` para obtener la dinámica de la caída de ambas balas utilizando el método de Euler modificado, y graficar, en una misma figura, la posición de cada bala en función del tiempo. A partir de los resultados obtenidos, responder:

a) ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?

b) Modificar el programa para que se detenga en el momento en que la bala de cañón alcanza el suelo. ¿Cuán lejos del piso está la bala de mosquete?

   Nota: No debe cometerse el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. La bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.

21. **Tiro oblicuo.** Un proyectil de masa m se arroja desde un punto del plano (x_0, y_0), con una velocidad inicial dada por el vector (v_0^x, v_0^y). La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg - \gamma\dot{y}, \end{aligned}$$

donde g es la aceleración gravitatoria $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, y γ es una constante de rozamiento con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formular el problema en forma de sistema de orden uno.

Tomando $m = 10\mathrm{Kg}$ y $\gamma = 0{,}2\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}}$, y suponiendo que el proyectil se lanza desde 30 metros de altura con una velocidad inicial horizontal de $40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ¿Qué distancia recorre antes de tocar el piso?

Hacer un programa que permita responder esta pregunta, utilizando el método de Euler modificado para resolver el sistema.

22. **Péndulo.** Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \text{ en } [0, T] \\ \dot{\theta}(0) = v_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.
b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0{,}05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.
c) Graficar la solución que se obtiene al utilizar método de Runge Kutta del Ejercicio 14.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_o = 0$.

23. Hallar el error local de las siguientes discretizaciones de la derivada primera indicando en cada caso las hipótesis de suavidad que requiere de la función u:

a) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ (diferencia *forward*)
b) $u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$ (diferencia *backward*)
c) $u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ (diferencias centradas)
d) $u'(x) \sim -\frac{1}{h}(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h))$

24. Hallar el error local para la discretización habitual de la derivada segunda, y explicitar sus requerimientos de suavidad:

$$f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

25. **Resorte.** Se tiene una masa sujeta a un resorte. Suponiendo que no existe rozamiento, la posición $y(t)$ de la masa a tiempo t está regida por la ecuación:

$$m\ddot{y} = -ky,$$

donde m es la masa y k la constante del resorte.

Supongamos que la masa se encuentra en movimiento y que se registra que su posición a tiempo 0 es $y(0) = 0$, mientras que a cierto tiempo t_f, es $y(t_f) = y_f$.

a) Discretizar el intervalo $[0, t_f]$ con paso h. Utilizando la discretización usual para la derivada segunda y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, discretizar el problema, formulándolo como un sistema lineal.

b) Hacer un programa que reciba como input la masa m, la constante k y el paso h, construya la matriz del sistema, lo resuelva, y grafique la solución.

c) Resolver para $t_f = 10$, con los siguientes datos:

- $y_f = 1$, $m = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$.
- $y_f = 1$, $m = 0{,}025$, $k = \frac{1}{2}$.
- $y_f = 1$, $m = \frac{1}{4}$, $k = 0{,}05$.
- $y_f = 1$, $m = 0{,}025$, $k = 0{,}05$.

Observar el efecto que producen las modificaciones en los distintos parámetros.

26. **Resorte con rozamiento y fuerza externa.** Si al problema anterior se le agrega rozamiento y un forzante se obtiene una ecuación de la forma:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + f,$$

donde b es el coeficiente de rozamiento y $f = f(t)$ el forzante.

a) Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar la discretización usual de la derivada segunda y diferencias centradas para la derivada primera.

b) Repetir usando diferencias forward para la derivada primera.

c) Modificar el programa del ejercicio anterior para incorporar los nuevos términos de la ecuación utilizando diferencias centradas o forward para la derivada primera.

d) Para $f = 0$ proponer soluciones de la forma $y(t) = Ae^{\lambda t}$. Hallar valores de λ en función de los parámetros m, k y b. Estudiar el comportamiento de la solución de acuerdo a la naturaleza de los valores de λ hallados.

e) Resolver tomando $y_0 = 1$, $t_f = 10$, $y_f = 0$, con distintas combinaciones de los parámetros:

- $m = 0{,}25$, $m = 0{,}025$.
- $k = 0{,}5$, $k = 0{,}05$.

- $b = 5 \times 10^{-3}$, $b = 0{,}05$, $b = 0{,}1$.

Analizar si los resultados obtenidos son cualitativamente consistentes con lo esperado.

27. Calcular el error de truncado de las discretizaciones usadas en el ejercicio anterior, tanto para diferencias centradas como para forward. ¿Cuál parece preferible?