Métodos iterativos para un sistema tridiagonal

Supongamos que queremos resolver el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} -u'' &= f \qquad \text{en } (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

En lugar de hallar una función $u(x)$ podemos intentar buscar los valores de u en puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del inervalo [0,1]. Tomemos $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$ con $h = \frac{b-a}{n}$. Entonces buscamos aproximaciones u_i de $u(x_i)$. Teniendo en cuenta las condiciones de borde, ponemos

$$u_0 = u_n = 0.$$

Para aproximar en los nodos interiores x_i, $1 \leq i \leq n-1$, vamos a construir un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Ejercicio 1 *Si u es $\mathcal{C}^4(0,1)$, entonces*

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Teniendo este ejercicio y que

$$-u''(x_i) = f_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

si $f_i = f(x_i)$, resulta natural considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} &= h^2 f_i \qquad i = 1, \ldots, n-1. \\ u_n &= 0. \end{aligned}$$

Llamando $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})^t$, vemos que

$$A\bar{u} = b \tag{1}$$

con $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1}. \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 *[1, Pág. 154] Demostrar que los autovalores de la matriz tridiagonal de $n-1 \times n-1$*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son reales o complejos, son $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\, cos(\frac{s\pi}{n})$, para $s = 1, \ldots, n-1$. Sugerencia. Hallar la ecuación de recurrencia que satisfacen los autovectores.

Ejercicio 3 *Implementar el método de Jacobi para resolver* (1). *Tomar como criterio de parada que la norma* 2 *de la diferencia entre dos iteraciones sucesivas sea menor que una tolerancia* `tol` *fijada. Entonces para distintos valores de n aplicar el método y calcular la cantidad $its(n)$ de iteraciones hasta satisfacer el criterio. Graficar o tabular n contra $its(n)$.*

Ejercicio 4 *Repetir el ejercicio anterior para el método de Gauss-Seidel, y comparar.*

Notar que el método de Gauss-Seidel para el sistema (1) puede implementarse de manera muy sencilla. Suponiendo dados `n` (cantidad de nodos menos 1) y la función `f` podemos hacer:

```
x = (0:n)/n;
h = 1/n;
b = h^2 * f(x);
u = [0; ones(n-1,1); 0];
u0 = zeros(n+1,1);
while (norm(u-u0)>1e-6)
  u0 = u;
  for k = 2:n
    u(k) = (u(k-1) + u(k+1) + b(k))/2;
  endfor
endwhile
```

Referencias

[1] Smith, G.D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. *Oxford applied mathematics and computing science series*. Third Edition. Oxford University Press, New York, 1985.