

## PRÁCTICA 6 - Sucesiones y series de funciones

1. Estudiar la convergencia de las sucesiones de funciones  $\{f_k\}$  a continuación. En cada caso determinar la función límite y si la convergencia es uniforme.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f_k(x) &= \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}} \quad x \in \mathbb{R} & \text{(ii)} \quad f_k(x) &= \frac{x^{2k}}{1+x^{2k}} \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{(iii)} \quad f_k(x) &= kx(1-x)^k \quad x \in [0, 1] & \text{(iv)} \quad f_k(x) &= \frac{1}{1+x^{2k}} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes series de funciones. Determinar, en cada caso, si la convergencia es uniforme.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad |x| < 1 & \quad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1}) \quad x \in [0, 1] \\ \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \quad x \in \mathbb{R} & \quad \text{(iv)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{2^k} \quad x \in [-1, 1] \\ \text{(v)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \exp(kx) \quad x \in [-2, -1] & \quad \text{(vi)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 k^2 + k} \quad x \in [0, \infty) \end{aligned}$$

3. Sea  $f_0$  continua en  $[0, a]$ . Se define la sucesión  $\{f_k\}$  por

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t) dt \quad k \in \mathbb{N}, x \in [0, a].$$

Probar que  $\{f_k\}$  converge uniformemente a la función nula.

4. Verificar que la serie  $\sum_n (-1)^n / (n+x^2)$  es uniformemente convergente en el intervalo  $0 \leq x < \infty$ , pero no es absolutamente convergente para ningún  $x \geq 0$ .
5. A partir de la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ , en los casos en que sea posible, derivar o integrar término a término para obtener los siguientes resultados, válidos si  $|x| < 1$ .

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k &= \frac{x}{(1-x)^2} & \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \\ \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k &= \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^2} & \text{(iv)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} &= \log\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ \text{(v)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{(vi)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

6. Si  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ , probar que

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

7. Sea  $f_n(x) = nx/(1+nx)$  para  $0 \leq x < \infty$ . Probar que

$$\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow x \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

8. Sea  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$  para  $0 \leq x \leq 1$ . Luego  $f_n(x) \rightarrow 0$  puntualmente. Probar que, para cada  $0 < x \leq 1$ ,  $\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow 1$  si  $n \rightarrow \infty$ .

9. Para cada una de las sucesiones  $\{f_n\}$  dadas, encontrar  $f(x) = \lim f_n(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  indicado, y chequear si

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx; \quad f'_n(x) \rightarrow f'(x) :$$

- a)  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$  en  $[0, b]$ ;  
b)  $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$  en  $[0, b]$ ;  
c)  $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$  en  $[0, 1]$ .

10. Probar que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{1+x} \quad \text{si } |x| < 1.$$

¿Converge también en un intervalo más grande que contenga a  $x = 1$ ?

11. Encontrar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

- a)  $\sum \frac{n}{n+1} x^n$   
b)  $\sum \alpha^n x^n, \alpha \neq 0$   
c)  $\sum \frac{(2n)!}{2^n} x^n$ ;  
d)  $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}, \alpha > 0.$

12. Para cada una de las siguientes series reales de potencias determinar el conjunto de todos los valores reales  $x$  para los que converge y calcular su suma.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} & \text{(ii)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}} & \text{(iii)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} kx^k \\ \text{(iv)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k kx^k & \text{(v)} \quad & \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k \frac{k+2}{k+1} x^k & \text{(vi)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k} \end{aligned}$$

13. Calcular la suma de las siguientes series para  $|x| < 1$ :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^{n+1}; & \text{(ii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nx^n; \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n; & \text{(iv)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}. \end{aligned}$$

14. Encontrar la serie de Taylor para cada una de las siguientes funciones en  $x = 0$ , y calcular el radio de convergencia:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt & \text{(ii)} \quad & \int_0^x e^{-t^2} dt \\ \text{(iii)} \quad & a^x, a > 0 & \text{(iv)} \quad & \int_0^x \cos t^2 dt \end{aligned}$$

15. Para cada una de las siguiente funciones, encontrar su serie de Fourier de cosenos y su serie de Fourier de senos en el intervalo  $(0, \pi)$ .

- a)  $f(x) = \pi - x$   
b)  $f(x) = x^2$   
c)  $f(x) = x(\pi - x)$

16. Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ .

- a)  $f(x) = x + \pi$   
b)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$   
c)  $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$