

PRÁCTICA 5 - Sucesiones y Series Numéricas

1. Dadas las siguientes sucesiones $\{a_n\}_n$ determinar si convergen o divergen y hallar el límite de cada sucesión convergente.

$$\begin{array}{llll} a) & a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} & b) & a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \\ e) & a_n = \frac{n+3}{n^3+4} & f) & a_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} \\ i) & a_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1} & j) & a_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{a}{n}}\right) \\ m) & a_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^n & n) & a_n = e^{-\pi ni/2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} c) & a_n = \cos \frac{n\pi}{2} \\ g) & a_n = \frac{\log n}{\log 5n} \\ k) & a_n = \frac{n}{2^n} \\ o) & a_n = \frac{1}{n} e^{-\pi ni/2} \end{array} \quad \begin{array}{l} d) & a_n = 1 + (-1)^n \\ h) & a_n = \frac{\log(n+3)}{\log n} \\ l) & a_n = 2^{1/n} \\ p) & a_n = ne^{\pi ni/2}. \end{array}$$

Nota. Cuando sea necesario, utilizar la fórmula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, debida a Euler.

2. Demostrar por definición los siguientes límites:

$$\begin{array}{l} a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0 \\ b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1 \\ c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-\sin(n)}{n^2+\cos(n)} = 1 \end{array}$$

3. Determinar el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{l} a) a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ b) a_n = \frac{n+(-1)^n n}{2} \\ c) a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{array}$$

4. Se dice que dos sucesiones a_n y b_n son infinitos equivalentes si $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ y $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. Demostrar que son infinitos equivalentes

$$\begin{array}{l} a) a_n = \log(n+k), b_n = \log(kn) \text{ y } c_n = \log n; \\ b) a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha \text{ y } b_n = \alpha n^{\alpha-1}. \end{array}$$

5. a) Mostrar que si $0 < a < 2$, entonces $0 < \sqrt{2a} < 2$.

b) Mostrar que la sucesión $\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \right\}$ es convergente y calcular el límite de la sucesión.

6. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando adecuadamente la respuesta:

- a) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.
b) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.
c) Si $a_n \geq 0$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

7. En cada caso probar que la serie converge y que la suma es la indicada.

$$\begin{array}{llll} i) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} & ii) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \\ iii) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4} & iv) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2} \\ v) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 & vi) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \\ vii) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1 & viii) & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3^n} - \frac{4}{2^n}\right) = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

8. Analizar el carácter de las siguientes series:

$$\begin{array}{llll} i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)} & ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} \log(4n+1)}{n(n+1)} & iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} & iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\ v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} & vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s} & viii) \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n^2) \\ ix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} & xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} & xii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}} \end{array}$$

9. Sea f una función real monótona creciente y acotada en el intervalo $[0, 1]$. Se definen las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ por

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Demostrar que

$$s_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq t_n \quad \text{y} \quad 0 \leq \int_0^1 f(x) dx - s_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

b) Demostrar que $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas al mismo límite $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Utilizando el ejercicio anterior, establecer las siguientes relaciones.

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}, \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

10. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$

11. a) Probar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente.

b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.

Complementarios

12. Estudiar la convergencia de

a) $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$

b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$

13. Calcular:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k \sin(n!)}{n+1} \quad (0 \leq k < 1)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$

Sugerencia: Usar que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Sea $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}, a_1 = \alpha \neq 0$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

15. Demostrar que la convergencia de una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implica la de $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. ¿Vale la recíproca?

16. a) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}$ con r número real positivo sin usar ningún criterio de convergencia.

b) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ con r número real sin usar ningún criterio de convergencia.

17. a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:

1) Si $l < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2) Si $l > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

3) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

b) Calcular, usando el ejercicio anterior, el límite de las siguientes sucesiones:

1) $a_n = \sqrt[n]{n}$

2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

3) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

c) Comprobar que puede existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ($a_n > 0$) y no existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$).

18. Probar que para $|x| < 1$ la sucesión

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, cualquiera sea el número real α .

19. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{lllll} a) \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!} & b) \frac{n^4-n+2^n n}{(n^3-1)2^n} & c) \frac{n^4-n+2^n n}{(n^3-1)2^n} & d) \frac{8^n-4^n}{3^n} & e) \frac{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}{n} \\ f) \sqrt[n]{n^2+n} & g) \frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} & h) \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} & i) \frac{n}{e^n} & j) \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)^n \\ k) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n & l) \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{\frac{n^2+4}{n+1}} & m) \left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5} \right)^{\sin(n)} & n) (n^4+n)^{1/n^5} & o) n^{\frac{\sin(n)}{n}} \end{array}$$

20. (*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

21. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

22. Hallar la suma de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$

23. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota salta a una altura de $3/4$ partes de la distancia de la que cayó. Calcule la distancia total recorrida hasta que queda en reposo.

24. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

25. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

26. a) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$ es divergente?

b) Si $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ es creciente, entonces:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.