

## PRÁCTICA 4 - Integrales de Superficie

1. Dar una parametrización en coordenadas cartesianas para las superficies dadas en coordenadas esféricas por  $r = k$  ( $k = cte$ ). Graficar. Y ahora por  $\varphi = k$  donde  $k$  verifica  $0 < k < \pi/2$ . Hallar un vector normal en cada punto.

2. a) Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right) \quad \Phi_2(u, v) = (a \cos(v), b \sin(v), u^2)$$

son dos parametrizaciones del paraboloide elíptico.

- b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

$0 < b < a$ , y  $u, v \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del toro.

3. Encontrar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto especificado

- a)  $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$  en el punto  $(0, 1, 1)$ .

- b)  $x = u^2 - v^2, y = u + v, z = u^2 + 4v$  en el punto  $(-1/4, 1/2, 2)$ .

4. Sea  $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad z = \theta$$

Graficar. Hallar el vector normal en cada punto y por último hallar su área.

5. Calcular el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con  $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ . (Bóveda de Viviani).

6. Hallar el centro de masa de una semiesfera de radio  $r$  con densidad superficial de masa constante.

7. Determinar la masa de la superficie cilíndrica homogénea cuya directriz en el plano  $xy$  es  $r = \theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , siendo sus generatrices paralelas al eje  $z$ . La superficie está limitada inferiormente por el plano  $z = 0$  y superiormente por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Sugerencia: parametrizar  $S$  mediante una representación  $\frac{1}{2}n$   $r = r(\theta, z)$ .

8. Para la superficie  $S$ , el hemisferio superior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el campo vectorial  $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ , calcular el flujo de  $F$  a través de  $S$  utilizando

- a) la representación  $\Phi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ , y

- b) la representación  $\frac{1}{2}n$  explícita de  $S$ .

9. Calcular  $\int_S xy \, dS$  donde  $S$  es el borde del tetraedro con lados  $z = 0, y = 0, x + z = 1$  y  $x = y$ .

10. Hallar la masa de una superficie esférica de radio  $r$  y centro  $(0, 0, 0)$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el punto  $(0, 0, r)$ .

11. Evaluar el flujo saliente del campo  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  a través de la superficie del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

12. Calcular el rotor y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales,

- a)  $F_1(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$ ,

- b)  $F_2(x, y, z) = (\exp(x, y), \cos(xy), \cos(xz^2))$ .

13. Evaluar  $\int_C F \cdot ds$ , donde

- a)  $F = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$ , y  $C$  es la curva que está parametrizada por  $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

- b)  $F = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$ , y  $C$  es la curva  $(e^t, e^{t+1}, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ .

14. Sea la temperatura de un punto de  $\mathbb{R}^3$  dada por la función  $T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$  calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo  $-\nabla T$ ) a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , orientada de forma que la normal en el punto  $(0,0,\sqrt{2})$  sea  $(0,0,1)$ .
15. Sea  $S$  la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z$  entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  con  $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ .
16. Sea  $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x^2, yx^2)$  que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano  $xy$  a través del cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
17. Verificar el teorema de Stokes para la helicoide  $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ ,  $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$  y el campo vectorial  $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, x, y)$
18. En los siguientes casos calcular el flujo del rotor del campo a través de  $S$  por medio de integrales curvilineas, indicando el sentido de la normal.
  - a)  $\mathbf{F}_1 = (xyz, x, \exp(xy) \cos z)$  a través de del hemisferio  $S_1$  de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con  $z \geq 0$ ,
  - b)  $\mathbf{F}_2 = (x, y, z)$ , a través de la superficie  $S$ , la parte del paraboloide  $x^2 + y^2 + z = 1$  con  $z \geq 0$ .

(Dato: Tomar la normal unitaria hacia arriba.)

19. En cada caso calcular el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  :
  - a)  $\mathbf{F} = (xy^2, yz, zx^2)$  y  $S$  es la superficie del sólido que está entre los cilindros  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  y los planos  $z = 1$ ,  $z = 3$ .
  - b)  $\mathbf{F} = \left( z^2x, \frac{1}{3}y^3 + \tan z, x^2z + y^2 \right)$  y  $S$  es la mitad superior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Sugerencia: Si bien  $S$  no es cerrada, agregarle "la tapa inferior" para cerrarla y después  $\frac{1}{2}S$  se descuenta el flujo sobre esa tapa.
20. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo  $\mathbf{F} = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$  y la superficie  $S$ , siendo
  - a)  $S =$  círculo de radio  $a > 0$  en el plano  $z = 0$ .
  - b)  $S =$  región del plano  $z = 0$  que es intersección de  $x^2 + y^2 \leq 1$  y  $x + y \geq 1$ .
21. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales  $\mathbf{F}$  en el plano es el gradiente de una función escalar  $f$ . Si existe dicha  $f$ , hallarla.
  - a)  $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$
  - b)  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
  - c)  $\mathbf{F}(x,y) = (\cos xy - xy \sin xy, x^2 \sin xy)$

22. Rehacer el ejercicio 17, usando el teorema de Gauss.
23. Verificar el teorema de la divergencia para  $\mathbf{F} = (x,y,z)$  y  $\Omega$  el sólido intersección de  $x^2 + y^2 \leq 1$  y  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .
24. Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , siendo  $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$  y  $S$  la superficie interior de la esfera de radio  $R$ . (Sugerencia: usar el teorema de Gauss)
25. Para cada  $R > 0$  sea la superficie  $S_R = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$  orientada con la normal cuya tercer coordenada es positiva y sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (zx - x \cos(z), -zy + y \cos(z), 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar  $R$  de modo que el flujo del campo  $\mathbf{F}$  a través de  $S_R$  sea máximo.

26. Calcular

$$\int_C (y + \sin(x)) dx + \left( \frac{3}{2} z^2 + \cos(y) \right) dy + 2x^3 dz,$$

en donde  $C$  es la curva  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (Sugerencia: Observar que  $C$  se encuentra en la superficie  $z = 2xy$ ).

27. Sea  $F(x, y, z) = (x + y + z, 2xyz, e^{xyz} \cos(x^2 + y))$ . Hallar el flujo del rotor de  $F$  a través de la superficie del cono  $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$  comprendida entre  $z=0$  y  $z=1$ , orientada con normal exterior.

### Complementarios

28. Sea  $h$  una función diferenciable. Encontrar una fórmula para el plano tangente a la superficie  $x = h(y, z)$  en el punto  $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$

29. Sea  $\phi : \{(u, v) / u^2 + v^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

Calcular su área.

30. a) Calcular el área de la porción del plano  $x + 2y + z = 4$  cortada por la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = 4$ .

b) Calcular el área de la parte del paraboloide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ , comprendida entre los cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 = 4$ .

31. Sea la curva  $z = f(x)$   $x \in [\alpha, \beta]$  con  $f$  y  $\alpha$  positivos, girada alrededor del eje  $z$ . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio 2 ítem (a) para calcular el área del paraboloide elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .

32. Sea  $n = (\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3)$  la normal exterior a una superficie cerrada  $S$  que limita a  $V$ , un sólido de densidad constante. Si se conocen el volumen y las coordenadas del baricentro (centro de masa) de  $V$  expresar, en términos de esas cantidades:

a)  $\iint_S xz \cos \theta_1 + 2yz \cos \theta_2 + 3z^2 \cos \theta_3 \, dS,$

b)  $\iint_S y^2 \cos \theta_1 + 2yz \cos \theta_2 - 2xz \cos \theta_3 \, dS.$

33. Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir  $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

34. Demostrar las siguientes afirmaciones,

a) el gradiente de un campo escalar armónico<sup>1</sup> tiene divergencia nula,

b) dado un campo escalar  $\phi$ , se tiene  $\text{rot}(\nabla \phi) = 0$ ,

c) dado un campo vectorial  $F$ , se tiene  $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$ .

35. a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

cuando el punto de aplicación de  $\mathbf{F}$  se desplaza de  $(1, 1, 1)$  a  $(2, 2, 2)$  a lo largo de

1) el segmento que une los dos puntos,

2) una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes el cubo del cual  $(1, 1, 1)$  y  $(2, 2, 2)$  son vértices opuestos diagonalmente.

<sup>1</sup>Un campo escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **armónico** si  $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ .

- b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular  $\nabla \times \mathbf{F}$  y hallar una función potencial  $f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\mathbf{F}$ .
36. Sea  $r(x, y, z) = (x, y, z)$ . Si  $S$  es una superficie cerrada,  $V$  es el volumen del sólido limitado por  $S$  y  $n$  es la normal exterior a  $S$ , demostrar que

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (r \times n) \, dS.$$

37. Sea  $S$  la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$ ; donde  $S_1$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  y  $S_2$  es el conjunto de  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ ,  $z \geq 1$ . Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$ . Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ .
38. Verificar el Teorema de la Divergencia para los campos vectoriales y superficies pedidos en cada caso con la orientación adecuada,
- a)  $F_1(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ , sobre la superficie  $S_1$  del cubo unitario  $[0, 1]^3$ ,
- b)  $F_2(x, y, z) = (2xy + z, y^2, -x - 3y)$ , sobre la superficie  $S_2$  frontera de la región limitada por los planos coordenados y el plano  $2x + 2y + z = 6$ .

39. Sea  $S$  la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial y  $F_r$  su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

40. a) Considerar dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  con la misma frontera  $\partial S$ . Describir, mediante dibujos, como deben orientarse  $S_1$  y  $S_2$  para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

- b) Deducir que si  $S$  es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

- c) Calcular  $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ , donde  $S$  es el elipsoide  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ , y  $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$ .
41. Sean  $S_1 = \{(x, y, 1) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $S_2 = \{(x, 1, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ,  $S_3 = \{(1, y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  y sea  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  orientada con la normal unitaria que en  $(0, 0, 1)$  coincide con  $(0, 0, 1)$ . Si  $F(x, y, z) = (x(1 + \sin(z^2)), y(1 - \sin(z^2)), z)$  calcular  $\int_S F \cdot d\mathbf{S}$ .

42. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Probar que el flujo del campo

$$F(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2, 2z(x + y) + x^2 + y^2)$$

a través de la superficie  $S_a$  que es la porción del plano  $ay + 2z = 2a$  delimitada por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , no depende de  $a$  ( $S_a$  está orientada hacia arriba). Calcular dicho flujo.

43. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx \, dy \, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx \, dy \, dz.$$

Aquí  $\mathbf{n}$  es la normal exterior al dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , y  $f, g$  son de clase  $C^2$ .