

PRÁCTICA 3 - Integrales de Línea

- Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las trayectorias siguientes en el valor especificado de t .

a) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0$

b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0$

c) $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1$

- Considerar el punto con función de posición $\sigma : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud de arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando; su curva se conoce como cicloide.

- Calcular la longitud de arco de la curva $\sigma(t)$ en el intervalo $[a, b]$, siendo:

(a) $\sigma(t) = (t, t^2) \quad a = 0, \quad b = 1$ (b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t) \quad a = 10 \quad b = 20$.

- La longitud de arco $s(t)$ para una trayectoria dada $\sigma(t)$, definida por $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$, representa la distancia que una partícula viajando por la trayectoria σ habrá recorrido en el tiempo t si comienza en el instante a , es decir, da la longitud de σ entre $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Encontrar las funciones longitud de arco para las curvas $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ y $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $a = 0$.

- a) Sea α cualquier trayectoria diferenciable cuya velocidad nunca es cero. Sea $s(t)$ la función longitud de arco para α . Sea $t(s)$ la función inversa de $s(t)$. Probar que la curva $\beta = \alpha \circ t$ tiene velocidad unitaria, es decir, $\|\beta'(s)\| = 1 \forall s$.

- b) Sea σ la trayectoria $\sigma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad t > 0$. Encontrar una trayectoria que trace la misma curva que σ pero con velocidad unitaria.

- Calcular la integral de trayectoria de los siguientes campos escalares sobre las curvas C indicadas.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad C$ la curva de ecuaciones paramétricas $\sigma(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

b) $f(x, y) = 2x + y, \quad C$ el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ que une $(3, 4)$ con $(4, 3)$.

- a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

b) Calcular la longitud de arco de $r = 1 + \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- Sea $f(x, y) = 2x - y, \quad x = t^4, \quad y = t^4, \quad -1 \leq t \leq 1$. Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar geoméricamente la respuesta.

- Considerar un alambre semicircular uniforme (densidad de masa constante) de radio R , de masa M .

a) Mostrar que el centro de masa está situado en el eje de simetría a distancia $\frac{2R}{\pi}$ del centro.

b) Mostrar que el momento de inercia respecto del diámetro que pasa por los extremos del alambre es $\frac{1}{2}MR^2$.

- Hallar la coordenada z promedio (es decir, el valor promedio de la función $f(x, y, z) = z$) de los puntos en la semicircunferencia parametrizada por $\sigma(t) = (0, a \sin(t), a \cos(t)), \quad t \in [0, \pi]$.

- Un alambre uniforme tiene la forma de la porción de curva de intersección de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ con la de ecuación $y^2 = x$, que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, \sqrt{2})$. Hallar la coordenada z del centro de masa.

12. En cada caso calcular la integral de línea del campo vectorial dado a lo largo del camino que se indica:

a) $F(x,y) = (\exp(x-1), xy)$, sobre la curva de ecuación paramétrica $\sigma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

b) $F(x,y) = (x+y, x-y)$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el sentido antihorario.

c) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ a lo largo de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$.

13. El trabajo del campo $F(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde $(-1, 0)$ hacia $(1, 0)$ a lo largo de la mitad superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{b} = 1$ depende de b . Hallar b tal que el trabajo sea mínimo.

14. Sea σ una trayectoria suave.

a) Suponer que F es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$. Mostrar que

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = 0.$$

b) Si F es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_{\sigma} \|F\| ds.$$

(Por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que

$$\nabla f(x,y,z) = (2xyz e^{x^2}, z e^{x^2}, y e^{x^2}).$$

Calcular $f(1, 1, 2)$, sabiendo que $f(0, 0, 0) = 5$.

16. Evaluar

$$\int_C 2xyz \, dx + x^2 z \, dy + x^2 y \, dz,$$

donde C es una curva orientada simple que conecta $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$.

17. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido por

$$F(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z) \quad \text{para } (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria, depende solo de los radios: $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

18. Para los siguientes campos vectoriales $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

a) Demuestre que es un campo conservativo.

b) Determine una función potencial de F .

c) Calcule la integral de línea de F a lo largo de alguna curva, la que quieran, que una el origen con el punto indicado.

1) $F(x,y) = (2xy^3 + y + 1, 3x^2y^2 + x + 7)$, $P = (1, 1)$.

2) $F(x,y) = (y^2 e^{x+y} + 1, y e^{x+y}(y+2) + 1)$, $P = (1, 1)$.

3) $F(x,y,z) = (e^{y+2z}, x e^{y+2z}, 2x e^{y+2z})$, $P = (1, 1, 1)$.

19. Calcular

$$(a) \int_{(1,0)}^{(3,2)} 2xy \, dx + x^2 \, dy; \quad (b) \int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3x \, dx + y^3 \, dy - z^2 \, dz.$$

¿Por qué en ninguno de los dos casos se da una curva que una los extremos de integración? Justificar.

20. Calcular la integral de línea del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy))$$

a lo largo de la curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\sigma(t) = \left(\frac{\sinh 5t}{\sinh 5}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{1}{\ln 7} \ln(1 + 6t^8) \right)$$

21. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Demuestre que

$$\int_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0,$$

para toda curva cerrada C .

22. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro en el origen y radio R y las funciones:

a) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$.

b) $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = y$.

23. Usar el teorema de Green para evaluar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$f(x, y) = (x^3 + y^2, x^4)$$

al mover una partícula rodeando al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en sentido antihorario.

24. Verificar el teorema de Green y calcular $\int_C y^2 dx + x dy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:

a) cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$,

b) elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x, x \in [0, 1]$, y $C_2 : y = x^2, x \in [0, 1]$.

25. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

a) el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R ,

b) la región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

26. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de la cicloide:

$$x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D .

27. (*) Probar la siguiente fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D , entonces

$$\int_D uv_x dx dy = - \int_D u_x v dx dy + \int_{\partial D} uv n_1 ds,$$

para todo par de funciones $u, v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.