PRÁCTICA 2

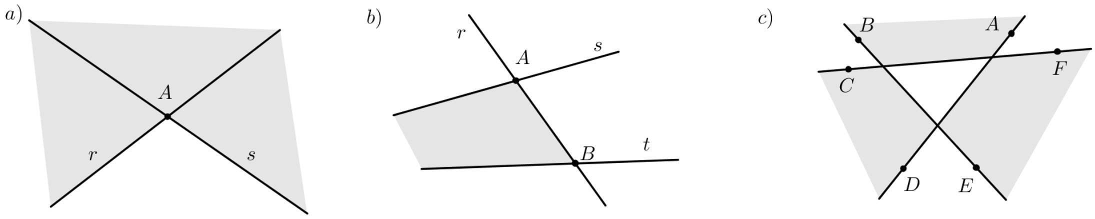
1. Mostrar que los siguientes conjuntos son convexos.

   a) El plano π.

   b) El conjunto vacío.

   c) Una recta s del plano.

2. Definir a través de operaciones entre conjuntos las figuras sombreadas (Marcar puntos auxiliares de ser necesarios). Indicar en cada caso si es convexa.



3. Dada una recta r contenida en el plano π y dos puntos P y Q exteriores a r tales que $\overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$ demostrar que
$$\pi = \mathtt{semp}_r(P) \cup \mathtt{semp}_r(Q) \ \text{ y } \ \mathtt{semp}_r(P) \cap \mathtt{semp}_r(Q) = r.$$

4. Sea r es una recta, $A \in r$ y $P \notin r$. Probar que $\overset{\vee}{\overrightarrow{AP}} \subset \overset{\vee}{r}_P$.

5. Analizar la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera probarla, y si no, dar un contraejemplo que muestre su falsedad.

   (a) Si dos segmentos distintos se intersecan, su intersección es un punto.

   (b) Si dos semiplanos no tienen puntos interiores en común, entonces tienen la misma frontera.

   (c) Si dos semiplanos tienen la misma frontera, entonces su unión es un plano.

   (d) La unión de dos semiplanos de distinta frontera puede ser un plano.

   (e) La intersección de conjuntos convexos es convexa.

   (f) Si A es convexo, entonces A^c es convexo.

   (g) Si A y B son convexos entonces $A - B$ es convexo.

   (h) La unión de dos rectas distintas es convexo.

   (i) Toda semirrecta es convexa.

   (j) Todo ángulo es convexo.

   (k) El exterior de un ángulo es convexo.

   (l) El interior de un ángulo es convexo.

6. Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) $\mathtt{int}(\overleftrightarrow{OA}_B) \cap \mathtt{int}(\overleftrightarrow{OB}_A) = \mathtt{int}(\angle AOB)$.

   (b) Si $P \in \overset{\vee}{\overrightarrow{OA}}$ y $Q \in \overset{\vee}{\overrightarrow{OB}}$, $P \neq O$, $Q \neq O$, entonces $\mathtt{int}(\overleftrightarrow{OA}_Q) \cup \mathtt{int}(\overleftrightarrow{OB}_P) = \mathtt{ext}(\angle AOB)$.

7. Probar que si $\overrightarrow{AB}$ es una semirrecta exterior a un ángulo, entonces todos sus puntos, salvo el origen, son exteriores al ángulo.

8. Sea r una recta y $O \in r$. Sean además X e Y dos puntos en el interior de un mismo semiplano definido por r, tales que $Y \notin \overleftrightarrow{OX}$.

   (a) Probar que la recta $\overleftrightarrow{OX}$ divide a r en dos semirrectas: una que está en $\overleftrightarrow{OX}_Y$ llamada $r(Y)$, y la otra que está en $\overset{\vee}{\overleftrightarrow{OX}}_Y$ llamada $\overset{\vee}{r}(Y)$. Análogamente, la recta $\overleftrightarrow{OY}$ divide a r en dos semirrectas: una que está en $\overleftrightarrow{OY}_X$ llamada $r(X)$, y la otra que está en $\overset{\vee}{\overleftrightarrow{OY}}_X$ llamada $\overset{\vee}{r}(X)$.

   (b) Probar que $r(X) = \overset{\vee}{r}(Y)$ y $r(Y) = \overset{\vee}{r}(X)$.

   (c) Probar que el ángulo $\angle XOY$ está estrictamente contenido en el semiplano determinado por r que contiene a X e Y.

9. Sea $\angle AOB$ un ángulo.

   (a) Si M pertenece al interior de $\overline{OA}$ y N al interior de $\overline{OB}$, probar que $\overline{MN} \cap \overline{AB} = \emptyset$.

   (b) Si M pertenece al interior de $\overline{OA}$ y B al interior de $\overline{ON}$, probar que $\overline{MN} \cap \overline{AB}$ consta de un único punto interior al ángulo.

10. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, y sea $\overrightarrow{AP}$ una semirrecta interior al ángulo $\angle BAC$. Probar que $\overrightarrow{AP}$ corta a $\overline{BC}$ en un único punto.

11. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y $P \in \overline{AB}, Q \in \overline{BC}$ y $T \in \overline{CA}$. Probar que el triángulo $\triangle PQT$ está contenido en $\triangle ABC$. (Probar primero que P, Q y T no están alineados).

12. Probar que todo triángulo es siempre un polígono convexo.

13. Sean A y B dos puntos que pertenecen a lados distintos de un polígono. Probar que si X es un punto interior del segmento $\overline{AB}$, entonces X pertenece al interior del polígono.

14. Probar la siguiente generalización del teorema de Pasch: si una recta corta a la frontera de un polígono y no pasa por ningún vértice, entonces la recta corta a dicha frontera en exactamente dos puntos.

15. Probar que las dos diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un único punto, y que éste es interior al cuadrilátero.

16. Demuestre que las rectas que contienen a dos lados no consecutivos de un polígono convexo o bien no se intersecan, o bien se cortan en un punto exterior al polígono.

17. Sea $\mathscr{P} = A_1A_2\ldots A_n$ un polígono y O un punto interior a $\mathscr{P}$. Probar que el conjunto de puntos de $\angle A_iOA_{i+1}$ que son exteriores al polígono es convexo.