UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Licenciatura en Matemática

Métodos Matemáticos

Docente:

María Evangelina Alvarez

2020

Página intencionalmente en blanco

1. Cálculo de variaciones

El análisis variacional es una de las ramas más importantes del análisis, constituye una técnica utilizable en una amplia gama de problemas en matemática pura y aplicada.
Ya hemos visto en otros contexto varios de los problemas típicos que se abordan con esta técnica. Por ejemplo, dados dos puntos P y Q en un plano determinar cual de las infinitas curvas que pasan por ellos es la más corta. Otro ejemplo, cuál de las curvas que pasan por P y Q genera por rotación en torno al eje x la superficie de revolución de área mínima. Otro ejemplo lo constituye el problema de la braquistócrona. Otro ejemplo, si se deforma un alambre circular de una cierta manera, cual es la superficie de área mínima que tiene por contorno el alambre (la solución práctica se obtiene sumergiendo el alambre en agua con jabón). Se observa de los ejemplos que nos enfrentamos a situaciones en las que buscamos mínimos o máximos de ciertas funciones que dependen, no de una variable como era el caso en cálculo, si no de curvas o superficies, en general de funciones.
El cálculo de variaciones juega un rol importante en la interpretación de muchos fenómenos físicos, por ejemplo la configuración de un sistema de partículas móviles está dictada por su atracción gravitacional mutua y sus trayectorias serán curvas que minimicen la integral respecto del tiempo, de la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema. Esta proposición es conocida en mecánica como el principio de Hamilton.
Hay problemas variacionales (PV) planteados y resueltos en época de los antiguos griegos. La creación del cálculo estimuló el estudio de numerosos PV. Pero fue Euler quien en 1744, describió la ecuación diferencial básica para una curva minimizante, hecho que podemos tomar como fundacional en el desarrollo del área.
En primer lugar trabajaremos con problemas que tienen la siguiente forma general: dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ y consideramos la familia de funciones $y = y(x)$ que satisfacen las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, queremos hallar la función que minimice una integral de la forma

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Es sencillo que ver que los 3 primeros ejemplos propuestos pueden presentarse en este marco. Evidentemente hay que trabajar con las hipótesis de regularidad necesarias para que tenga sentido (1). Supondremos que $f(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto de sus variables x, y, y'. Para que la integral esté bien definida basta con que el integrando sea continuo como función de x y para ello basta pedir que $y'(x)$ sea continua, pero por los cálculos que haremos usaremos funciones $y(x)$ con derivada segunda continua, y que verifiquen las condiciones de borde $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, estas serán las ***funciones admisibles***.

1.1. Ecuación diferencial de Euler para una extremal

Supongamos que existe $y(x)$ que minimiza

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{2}$$

para hallarla obtendremos una ecuación diferencial satisfecha por $y(x)$. La idea es analizar que sucede si modificamos $y(x)$. Usaremos funciones $\eta(x)$ tales que $\eta''(x)$ sea continua y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Luego para un parámetro α pequeño las funciones

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

constituyen una familia uniparamétrica de funciones admisibles. La desviación vertical de una función de esta familia con la curva $y(x)$ es $\alpha\eta(x)$. La diferencia $\bar{y} - y = \alpha\eta$ se llama ***variación de la función y*** y se la nota δy. Notemos que para toda función η, la función y pertenece a la familia uniparamétrica de curvas y corresponde al parámetro $\alpha = 0$.

Para η fija sustituyamos $\bar{y}$, $\bar{y}'$ en la integral, así se obtiene

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x))dx \tag{3}$$

Para $\alpha = 0$ se tiene que $\bar{y} = y$ y como y minimiza la integral, sabemos que $I(\alpha)$ tiene un mínimo en $\alpha = 0$. Una condición necesaria para esto es que $I'(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$. Derivando en (3) se obtiene

$$I'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx. \tag{4}$$

Pero $I'(0) = 0$ con lo cual se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0 \tag{5}$$

Para eliminar $\eta'(x)$ integremos por partes el segundo término

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x)dx = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

De este modo (5) puede escribirse como

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0. \tag{6}$$

Como esta expresión debe anularse para toda $\eta(x)$, concluimos (por el lema fundamental del cálculo de variaciones) que debe ser nulo lo encerrado entre corchetes, y llegamos a la ***Ecuación de Euler***

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

La condición $I'(0) = 0$, ie. la ecuación de Euler es una condición necesaria para que una función realice el mínimo de $I(\alpha)$. Toda solución admisible de la ecuación de Euler es llamada ***función estacionaria*** o ***curva estacionaria***. Las soluciones de la ecuación de Euler sin restricción de condición de contorno se denominan ***extremales***.
Desarrollando el primer término de la ecuación de Euler tenemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx}.$$

En consecuencia la ecuación de Euler queda

$$f_{y'y'} \frac{d^2y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (f_{y'x} - f_y) = 0. \tag{8}$$

Es una ecuación de segundo orden salvo que $f_{y'y'} = 0$, de modo que en general las extremales constituyen una familia biparamétrica de curvas. Las soluciones que buscamos se obtienen eligiendo los valores de los parámetros para que se cumplan las condiciones de contorno.
En general este tipo de ecuaciones resulta en el mejor de los casos muy complicadas de resolver pero en muchas aplicaciones se trabaja en casos particulars más tratables.

Ejemplo 1.1 *Volvamos al ejemplo de la curva más corta que une dos puntos en el plano,* (x_1, y_1), (x_2, y_2). *Debemos hacer mínima la integral de longitud de arco*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Vemos que la función $f(x,y,y') = \sqrt{1+(y')^2}$ no depende ni de x ni de y, quedando la ecuación de Euler reducida a

$$f_{y'y'}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Pero

$$f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{(1+(y')^2)^{3/2}} \neq 0,$$

así $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ y las extremales son las rectas de la familia $y(x) = c_1x + c_2$. Usando las condiciones de contorno se obtiene la curva estacionaria

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{9}$$

Esta es la recta que pasa por los dos puntos como esperábamos. Este análisis demuestra que si I tiene un valor estacionario, la correspondiente curva estacionaria debe ser la recta. Es claro de la geometría del problema que I no admite un máximo, luego, podemos concluir que efectivamente (9) es la curva más corta que une los dos puntos.

Hemos tratado el problema de minimizar la integral (2). Este es un PV del tipo más simple ya que sólo involucra una incógnita. Veamos que sucede si tenemos dos funciones desconocidas $y(x)$ y $z(x)$ y busquemos condiciones necesarias para que minimicen una integral del tipo

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,y',z')dx, \tag{10}$$

donde se tienen dados los valores de contorno $y(x_1), z(x_1), y(x_2), z(x_2)$. Igual que antes introducimos funciones η_1,η_2 que se anulan en los puntos de contorno y con segundas derivadas continuas. Formamos las funciones

$$\bar{y} = y(x) + \alpha\eta_1(x), \qquad \bar{z} = z(x) + \alpha\eta_2(x),$$

y consideramos

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y+\alpha\eta_1, z+\alpha\eta_2, y'+\alpha\eta_1', z'+\alpha\eta_2')dx.$$

Por un razonamiento similar al hecho antes se obtiene que si $y(x)$ y $z(x)$ son funciones estacionarias debe verificarse

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta_1(x) + \frac{\partial f}{\partial z}\eta_2(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial z'}\eta_2'(x)\right]dx = 0,$$

e integrando convenientemente por partes

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta_1(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] + \eta_2(x)\left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\right)dx = 0. \tag{11}$$

Finalmente como (11) debe verificarse para toda elección de η_1 y η_2, obtenemos las ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

En conclusión, para hallar las extremales de nuestro problema debemos resolver un sistema.

1.2. Problemas isoperimétricos

Los antiguos griegos propusieron el llamado ***problema isoperimétrico***: hallar la curva cerrada plana de longitud dada que encierra área máxima. Es más llegaron a probar que la respuesta es la circunferencia.
Si expresamos la curva de manera paramétrica como $x = x(t)$, $y = y(t)$ y se recorre una vez en sentido antihorario para $t \in [t_1, t_2]$, el área de la región encerrada por la curva está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt. \tag{13}$$

Por otro lado como la longitud de la curva es

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt. \tag{14}$$

el problema consiste en maximizar (13) sujeto a que (14) sea igual a cierta constante.
En general la expresión ***problema isoperimétrico*** se utiliza para el caso general de hallar extremales de alguna integral sometidas a cualquier restricción (o ligadura) consistente en que una segunda integral tome un valor prefijado.
También pueden considerarse ligaduras finitas, es decir que no involucren integrales o derivadas. Por ejemplo si tenemos dada una superficie

$$G(x, y, z) = 0, \tag{15}$$

el problema de buscar las geodésicas significa buscar las curvas que hacen mínima la integral de longitud de arco

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \tag{16}$$

sujetas a la condición (15).

Multiplicadores de Lagrange

Repasemos el problema de optimización con restricciones de cálculo. Queremos encontrar los puntos estacionarios (x, y) de la función $z = f(x, y)$, con la restricción $g(x, y) = 0$.
El procedimiento usual es elegir arbitrariamente una de las variables, sea x, como independiente, y la otra como dependiente, de modo que se puede calcular

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Usamos ahora la suposición que z sólo es función de x, luego $\frac{dz}{dx} = 0$ es una condición necesaria para los puntos estacionarios de z, de modo que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = 0.$$

Resolviendo simultáneamente esta ecuación con $g(x, y) = 0$ se obtienen los puntos requeridos. Una dificultad de este procedimiento es la pérdida de la simetría existente entre las variables.

Resolvamos el mismo problema con otro método. Consideremos la función Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

y analicemos sus puntos estacionarios sin restricciones a través de las condiciones necesarias

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0.$$

Eliminando λ de la primera ecuación el sistema se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = 0, \qquad\qquad g(x, y) = 0.$$

Con este planteo no perdemos la simetría del sistema y se elimina la restricción incorporando una nueva variable, el ***multiplicador de Lagrange*** λ.

Restricciones integrales

Queremos encontrar la ecuación diferencial que debe satisfacer una función $y(x)$ que asigne un valor estacionario a la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx, \tag{17}$$

sujeto a

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')dx = c, \tag{18}$$

y que toma valores dados $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Supondremos como antes que $y(x)$ es una función estacionaria y la perturbamos para hallar la condición buscada. No podemos como antes usar funciones de la forma $\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$ pues en general éstas no van a verificar (18). En su lugar consideramos la familia biparamétrica de funciones próximas

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x), \tag{19}$$

donde $\eta_1(x)$ y $\eta_2(x)$ tienen derivadas segundas continuas y se anulan en x_1 y x_2. Los parámetros α_1 y α_2 no son independientes, sino que están relacionados por

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, \bar{y}, \bar{y}')dx = c. \tag{20}$$

Nuestro problema consiste en hallar condiciones necesarias para que la función

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}')dx. \tag{21}$$

tenga valor estacionario para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ donde α_1 y α_2 satisfacen (20).
Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, introducimos la función Lagrangiana

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = I(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx, \tag{22}$$

donde

$$F = f + \lambda g,$$

e investigamos su valor estacionario sin restricciones en $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ por medio de las condiciones necesarias

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \text{para } \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{23}$$

Derivando en (22) bajo la integral y usando (19) se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta_i'(x) \right] dx, \quad i = 1, 2,$$

y tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y considerando (23) se llega a

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta_i(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta_i'(x) \right] dx = 0 \quad i = 1, 2.$$

Integrando por partes el segundo término, la última expresión de convierte en

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta_i(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx = 0 \quad i = 1, 2. \tag{24}$$

Como η_1 y η_2 son ambas arbitrarias las dos condiciones expresadas en (24) equivalen a una sola y concluimos que la función estacionaria $y(x)$ debe satisfacer la ***Ecuación de Euler***

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{25}$$

Las soluciones de esta ecuación hacen intervenir 3 parámetros indeterminados: dos constantes de integración y el multiplicador de Lagrange λ. La función estacionaria se elige de entre las extremales imponiendo las dos condiciones de contorno y la restricción para la integral J.

En el caso de integrales que dependan de dos o más funciones, se extiende este resultado de manera similar a lo hecho en el problema anterior. Por ejemplo si

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z') dx$$

tiene un valor estacionario sujeto a

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, z, y', z') dx = c,$$

las funciones estacionarias $y(x), z(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{26}$$

donde $F = f + \lambda g$.

Ejemplo 1.2 *Buscamos la curva de longitud l, que une los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, que permanece en el semiplano superior y que encierra el área máxima entre la curva y el eje x. Claramente debe ser $l > 1$. Queremos maximizar*

$$\int_0^1 y dx,$$

sujeto a

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = l,$$

y con condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$. Se tiene $F = y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}$ y la ecuación de Euler queda

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) - 1 = 0. \tag{27}$$

Integrando obtenemos

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{x-c_1}{\lambda}.$$

Despejando y' e integrando nuevamente llegamos a

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2,$$

que es obviamente una circunferencia de radio λ.
Alternativamente, derivando (27) obtenemos

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

En este caso no es necesario integrar puesto que la ecuación anterior indica que la curvatura es constante e igual a $1/\lambda$, con lo cual se deduce que la curva buscada es un arco de circunferencia con radio λ. //

Ejemplo 1.3 *En el ejemplo anterior si $l > \pi/2$, el arco circular no definirá a $y > 0$ como función de x. Podemos desentendernos de estas cuestiones considerando las curvas dadas en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ y volviendo al problema isoperimétrico original maximizar*

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})dt,$$

($\dot{u} = du/dt$) sujeto a

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = l.$$

En este caso se tiene

$$L = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

de modo que las ecuaciones de Euler (26) son

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\,y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) - \frac{1}{2}\,\dot{y} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) + \frac{1}{2}\,\dot{x} = 0$$

Estas ecuaciones pueden integrarse directamente:

$$-y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_1, \qquad ,x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_2.$$

Despejando $x - c_2$ e $y - c_1$, elevando al cuadrado y sumando, se obtiene

$$(x-c_2)^2 + (y-c_1)^2 = \lambda^2,$$

de manera que la curva de máximo es una circunferencia. Este resultado puede enunciarse como:
Si l es la longitud de una curva cerrada plana que encierra un área A, entonces $A \leqslant \dfrac{l^2}{4\pi}$, con igualdad si y sólo si la curva es una circunferencia. //

RESTRICCIONES FINITAS

Ya mencionamos el problema de hallar las geodésicas sobre una superficie dada $G(x, y, z) = 0$. Consideremos ahora el problema más general de hallar una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ que sea un punto estacionario de una integral de la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})dt \tag{28}$$

donde se pide que la curva $(x(t), y(t), z(t))$ esté en la superficie

$$G(x, y, z) = 0, \quad G \in C^1. \tag{29}$$

No se pierde generalidad si suponemos que la curva se sitúa en una región de la superficie en la que $G_z \neq 0$. Sobre esta porción de la superficie podemos despejar z en (29) en función de x, y. Pongamos $z = g(x, y)$, de modo que

$$\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}. \tag{30}$$

Sustituyendo (30) en (28) reducimos el problema a hallar funciones estacionarias sin restricciones para la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(\dot{x}, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}\right) dt.$$

Utilizando (12) de la sección anterior, obtenemos que las ecuaciones de Euler para este problema son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = 0.$$

De (30) surge que

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Luego las ecuaciones de Euler se pueden expresar como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right) = 0.$$

Si definimos la función $\lambda(t)$ a través de la relación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right) = \lambda(t)G_z, \tag{31}$$

y usamos las relaciones $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}$ y $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z}$, las ecuaciones de Euler se expresan como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = \lambda(t)G_x, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = \lambda(t)G_y. \tag{32}$$

En consecuencia, una condición necesaria para el valor estacionario es la existencia de una función $\lambda(t)$ que satisfaga las ecuaciones (31) y (32). Eliminando $\lambda(t)$ se obtienen las ecuaciones simétricas

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)}{G_x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)}{G_y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right)}{G_z}. \tag{33}$$

Estas ecuaciones junto con (29) determinan las extremales del problema.
Las ecuaciones (31) y (32) son interpretables como las ecuaciones de Euler del problema consistente en hallar funciones estacionarias sin restricciones para la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) + \lambda(t)G(x,y,z))dt. \tag{34}$$

Esto es similar a la conclusión para restricciones integrales, salvo que aquí el multiplicador es una función de t a determinar.
Aplicando lo visto al problema de hallar geodésicas sobre la superficie, se tiene

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

y las ecuaciones (33) se convierten en

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{f}\right)}{G_x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{f}\right)}{G_y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{f}\right)}{G_z}. \tag{35}$$

El objetivo es extraer información de este sistema.

Ejemplo 1.4 *Si tomamos como superficie la esfera $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, el sistema (35) está dado por*

$$\frac{f\ddot{x} - \dot{x}\dot{f}}{2xf^2} = \frac{f\ddot{y} - \dot{y}\dot{f}}{2yf^2} = \frac{f\ddot{z} - \dot{z}\dot{f}}{2zf^2},$$

que puede expresarse como

$$\frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{y\ddot{z} - z\ddot{y}}{y\dot{z} - z\dot{y}}.$$

Ignorando el término central queda

$$\frac{\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x})}{x\dot{y} - y\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y})}{y\dot{z} - z\dot{y}}.$$

Integrando vemos que $x\dot{y} - y\dot{x} = c_1(y\dot{z} - z\dot{y})$, y por lo tanto

$$\frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1 z} = \frac{\dot{y}}{y},$$

y una segunda integración da $x + c_1 z = c_2 y$. Ésta es la ecuación de un plano que pasa por el origen, luego las geodésicas sobre una esfera son arcos de circunferencias de diámetro máximo. //

En el ejemplo pudimos resolver las ecuaciones (35), pero en general esta tarea es difícil. Este es un resultado muy importante para la física por su conexión con el siguiente resultado: si una partícula se mueve sobre una superficie sin fuerzas externas actuando sobre ella, su trayectoria es una geodésica. Será conveniente en lo sucesivo suponer que el parámetro t es la longitud de arco medido sobre la curva, de este modo $f = 1$ y las ecuaciones (35) se transforman en

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z}. \tag{36}$$

1.3. El principio de Hamilton y sus consecuencias

Consideremos una partícula de masa m que se mueve por el espacio bajo la influencia de una fuerza

$$\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{i} + f_2\boldsymbol{j} + f_3\boldsymbol{k},$$

que suponemos es conservativa, i.e., el trabajo que realiza al mover una partícula de un punto a otro es independiente del camino recorrido. Recordemos que

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{f}_s ds,$$

siendo $\boldsymbol{f}_s$ la proyecciÃn de $\boldsymbol{f}$ sobre la direcciÃn de desplazamiento $d\boldsymbol{r}$.

Bajo estas hipótesis es fácil probar que existe una función escalar $U(x, y, z)$ tal que $\nabla U = \boldsymbol{f}$. La función $V = -U$ se llama ***energía potencial*** de la partícula, ya que la diferencia de su valor en dos puntos distintos es igual al trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{f}$ para trasladar la partícula de uno al otro. Además, si $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ es el vector posición de la partícula se tiene que

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}, \qquad v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

son la velocidad y su módulo respectivamente. Luego

$$T := \frac{1}{2}mv^2$$

es la ***energía cinética***.

Si la partícula está en los puntos P_1 y P_2 en los tiempos t_1 y t_2, nos interesa el camino que realiza para ir de P_1 a P_2. La ***acción*** o ***integral de Hamilton*** se define como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt,$$

y su valor depende, en general, del camino recorrido. Probaremos que el camino seguido es aquel que proporciona un valor estacionario para A.

La función $L := T - V$ se llama ***Lagrangiano*** y en este caso está dada por

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - V(x, y, z).$$

Por lo tanto, el integrando de la acción es una función de la forma $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, y si la acción tiene un valor estacionario, las ecuaciones de Euler deben satisfacerse. Las mismas están dadas por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

y pueden reescribirse como

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{F}.$$

Esto no es otra cosa que la segunda ley de Newton. Luego la ley de Newton es una condición necesaria para que la acción de la partícula tenga un valor estacionario. Puesto que la ley de Newton gobierna el movimiento de la partícula, se llega a la siguiente conclusión:

Principio de Hamilton. Si una partícula se mueve de un punto P_1 a un punto P_2 en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, la trayectoria que sigue es necesariamente estacionaria para la acción.

Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, se puede demostrar que la acción es necesariamente mínima. Es por esto que el principio de Hamilton se lo llama a veces ***principio de mínima acción*** y puede interpretarse diciendo que la naturaleza tiende a igualar las energías cinética y potencial durante el movimiento.
Hemos supuesto la ley de Newton y dedujimos el principio de Hamilton. Con razonamiento análogo se tiene la recíproca. De modo que ambas leyes de la física son equivalentes. Este resultado incide en la característica esencial de los principios variacionales de la física, pues se expresan leyes físicas en términos exclusivamente de la energía, sin hacer referencia a ningún sistema de coordenadas.
El argumento se extiende sin dificultad a un sistema de n partículas de masa m_i, con vectores posición $\boldsymbol{r}_i(t) = x_i(t)\boldsymbol{i}+y_i(t)\boldsymbol{j}+z_i(t)\boldsymbol{k}$, que se mueven bajo fuerzas conservativas $\boldsymbol{F}_i = f_{i1}\boldsymbol{i}+f_{i2}\boldsymbol{j}+f_{i3}\boldsymbol{k}$. La energía potencial del sistema es una función $V(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\boldsymbol{F}_{i1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} = -\boldsymbol{F}_{i2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z_i} = -\boldsymbol{F}_{i3},$$

la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right],$$

y la acción sobre un intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt.$$

Al igual que antes se observa que las ecuaciones de Newton para el sistema

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i,$$

son condiciones necesarias para que la acción tenga un valor estacionario. Por lo tanto, el principio de Hamilton es válido para todo sistema finito de partículas en el que las fuerzas sean conservativas. También se aplica a sistemas dinámicos más generales que involucren restricciones y cuerpos rígidos.
Además, puede usarse el principio de Hamilton para obtener las leyes básicas de la electricidad y magnetismo, teoría cuántica y relatividad. Su influencia es tan grande que muchos lo consideran como el principio más poderoso de la física matemática.

Ejemplo 1.5 *Si una partícula de masa m está restringida a moverse en una superficie dada $G(x, y, z) = 0$, y si no hay fuerzas actuando sobre ella, luego la partícula se mueve siguiendo una geodésica. Para establecer este resultado, observemos que como no hay fuerzas presentes se tiene que $V = 0$, de modo que el Lagrangiano se reduce a $L = T - V = T$.*
Apliquemos el principio de Hamilton, entonces pedimos a la acción

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} T dt,$$

que asuma un valor estacionario sujeta a la restricción $G(x, y, z) = 0$. Por (34) sabemos que es equivalente a pedir que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (T + \lambda G(x, y, z))dt,$$

sea estacionaria sin restricciones, donde $\lambda(t)$ es una función a determinar. Las ecuaciones de Euler para este problema variacional sin restricciones son

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda G_x = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} - \lambda G_y = 0, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} - \lambda G_z = 0.$$

Eliminando m y λ estas ecuaciones se convierten en

$$\frac{\ddot{x}}{G_x} = \frac{\ddot{y}}{G_y} = \frac{\ddot{z}}{G_z}.$$

La energía total de la partícula $T + V = T$ es constante (ya lo veremos), por lo tanto su velocidad también es constante. En consecuencia, $s = kt$ para alguna constante k si se mide la longitud de arco s a partir de un punto apropiado. Esto nos permite escribir las ecuaciones en la forma

$$\frac{d^2x/ds^2}{G_x} = \frac{d^2y/ds^2}{G_y} = \frac{d^2z/ds^2}{G_z}.$$

Éstas son precisamente las ecuaciones en (36), con lo cual el movimiento de la partícula en la superficie sigue una geodésica.

Ecuaciones de Lagrange. El principio de Hamilton puede verse, en mecánica clásica, como la fuente de las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Vemos primero las nociones de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
Se dice que una partícula que se mueve libremente en un espacio tridimensional tiene tres grados de libertad, ya que su posición puede especificarse por tres coordenadas independientes x, y, z. Al restringirla a moverse en una superficie $G(x, y, z) = 0$, reducimos sus grados de libertad a 2, ya que una de sus coordenadas puede expresarse en términos de las otras dos. De manera similar, un sistema no restringido de n partículas tiene $3n$ grados de libertad y el efecto de introducir restricciones es la reducción de coordenadas independientes necesarias para describir la configuración del sistema. Si consideramos las coordenadas rectangulares de las partículas, x_i, y_i, z_i para $i = 1, ..., n$ y si las restricciones están dadas por k ecuaciones consistentes independientes de la forma

$$G_j(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, ...k,$$

el grado de libertad es $m = 3n - k$. En principio la reducción de orden puede lograrse escribiendo m de las variables x_i, y_i, z_i $i = 1, ..., n$ en función de m de ellas. Pero es más conveniente introducir las ***coordenadas generalizadas de Lagrange*** $q_1, q_2, ..., q_m$, que son m coordenadas independientes cualesquiera que determinan la configuración del sistema. Esto nos permite elegir cualquier sistema de coordenadas adaptado al problema (rectangular, cilíndrico, esférico, etc) y hacer el análisis independiente del sistema de coordenadas.
Expresemos ahora las coordenadas rectangulares de las partículas en términos de las coordenadas generalizadas y notemos que las fórmulas resultantes incluyen automáticamente las restricciones: $x_i = x_i(q_1, ..., q_m)$, $y_i = y_i(q_1, ..., q_m)$ y $z_i = z_i(q_1, ..., q_m)$, $i = 1, ..., n$.
Si m_i es la masa de la i-ésima partícula, la energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right],$$

y en término de las coordenadas generalizadas queda

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2\right], \tag{37}$$

donde $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$. Notemos que T es una función homogénea de grado 2 en $\dot{q}_j$.
Se supone que la energía potencial del sistema V, es función sólo de q_j, de modo que el Lagrangiano, $L = T - V$ es una función de forma

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m).$$

El principio de Hamilton indica que el movimiento se produce de modo tal que la acción $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ es estacionaria sobre todo intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, de modo que deben satisfacerse las ecuaciones de Euler. En este caso están dadas por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m, \tag{38}$$

que son llamadas ***ecuaciones de Lagrange***. Constituyen un sistema de m ecuaciones diferenciales de segundo orden cuyas solución brinda las q_j como funciones de t.

Veamos la deducción de la ley de ***conservación de la energía*** utilizando las ecuaciones de Lagrange.
Notemos primero que toda función L de las variables $t, q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m$ vale (sale haciendo las cuentas):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right] = \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{39}$$

Como el Lagrangiano L satisface (38) y no depende explícitamente de t, el miembro de la derecha en (39) se anula y tenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = E, \tag{40}$$

para alguna constante E. Observemos que $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$ luego $\partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$. Considerando que T es una función homogénea de grado 2 en $\dot{q}_j$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{m} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T,$$

por el siguiente resultado de Euler: si f es tal que $f(kx_1, ..., kx_n) = k^m f(x_1, ..., x_n)$, luego se tiene $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x_1, ..., x_n)$.
Con este resultado, la ecuación (40) se convierte en $2T - L = E$ o $2T - (T - V) = E$. En conclusión,

$$T + V = E,$$

y esta ecuación establece que durante el movimiento, la suma de energías cinética y potencial es constante.

Ejemplo 1.6 *Una partícula de masa m es mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza gravitacional de magnitud km/r^2 dirigida hacia el origen. El razonable elegir las coordenadas polares como las coordenadas generalizadas: $q_1 = r$ y $q_2 = \theta$. Es fácil ver que $T = \dfrac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2}$ y $V = \dfrac{-km}{r}$, luego el Lagrangiano está dado por*

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{km}{r},$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{42}$$

Como L no depende explícitamente en θ, la ecuación 42 muestra que $\partial L/\partial\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$ es constante, luego

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{43}$$

para alguna constante $h > 0$. Observemos que podemos reescribir 41 como

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r^2}.$$

REFERENCIAS

[1] Simons G.F., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw Hill, 1993.