1. Encontrar los extremales para la integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ si el integrando es

   -a- $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$

   -b- $y^2 - (y')^2$

2. Encontrar la función estacionaria de $\int_0^4 [xy' - (y')^2]dx$ que está determinada por las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(4) = 3$

3. Mostrar que si el integrando en $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ es de la forma $a(x)(y')^2 + 2b(x)yy' + c(x)y^2$ entonces la ecuación de Euler es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

4. Si P y Q son dos puntos en el plano, mostrar que la longitud de arco en coordenadas polares está dada por

$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

   Hallar la ecuación de una recta en coordenadas polares minimizando esta integral

   a) con θ como variable independiente;

   b) con r como variable independiente;

5. Sean dos puntos P y Q en la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y la parametrización de esta superficie está dada por

$$\begin{cases} x = a\sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = a\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = a\cos(\phi) \end{cases}$$

   Sea $\theta = F(\phi)$ la ecuación de una curva sobre la superficie que une los puntos P y Q.
   Mostrar que la curva más corta que une dichos puntos (una geodésica) está dado por el arco de circunferencia máxima que une dichos puntos.

   Ayuda: Expresa la longitud de curva como integral en coordenadas polares, resolver la ecuación de euler correspondiente y transformar la solución nuevamente a coordenadas rectangulares.

6. Si se rota la curva $y = g(z)$ alrededor del eje z se obtiene una superficie de revolución de ecuación $x^2 + y^2 = g(z)^2$.
   Una parametrización conveniente para esta superficie está dada por

$$x = g(z)\cos(\theta), \quad x = g(z)\sin(\theta), \quad z = z,$$

   donde θ es el ángulo polar en el plano xy.
   Mostrar que una geodésica $\theta = \theta(z)$ en esta superficie tiene como ecuación

$$\theta(z) = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(z)]^2}}{g(z)\sqrt{g(z)^2 - c_1^2}} dz + c_2.$$

⑦. Determinar la ecuación de geodésicas en las siguientes superficies.

-a- un cilindro circular recto. -b- un cono circular recto.

⑧. Mostrar que las geodésicas en un cilindro de ecuación $g(x,z)=0$ forman un ángulo constante con el eje y.

⑨. Dado el problema

$$\min_{y\in\mathcal{C}^1[0,1]} \int_0^1 \left(Ty'(x)^2-\rho\omega^2 y(x)^2\right)dx,$$

donde T, ρ y ω son constantes positivas, encontrar la ecuación de Euler y mostrar los extremales para los siguientes casos:

-a- $y(0)=0$, $y(1)=1$.

-b- $y(0)=1$, $y(1)$ libre.

-c- $y(0)$, $y(1)$ libres.

⑩. Analizar el problema

$$\min_{y\in X} \int_0^1 \left(T(x)y'(x)^2-\rho(x)\omega^2 y(x)^2\right)dx,$$

donde $X=\left\{y\in\mathcal{C}^1[0,1]/y(0)=0, y(1)=1\right\}$ y para $c\in(a,b)$ fijo,

$$T(x)=\begin{cases} T_1, & 0\leqq x<c,\\ T_2, & c<x\leqq 1.\end{cases} \qquad \rho(x)=\begin{cases} \rho_1, & 0\leqq x<c,\\ \rho_2, & c<x\leqq 1.\end{cases}$$

siendo T_i,ρ_i constantes positivas, $i=1,2$.

⑪. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, mostrar que f es convexa si y solo si

$$f(x)-f(y)\geqq\langle\nabla f(y);x-y\rangle\,,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$

⑫. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, mostrar que f es convexa si y solo si su matriz hessiana es semi definida positiva.

⑬. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, abierto y convexo, y sea $f:\Omega\to\mathbb{R}$ convexa. Analizar la continuidad de f en Ω.

⑭. Mostrar que toda función real convexa es derivable salvo a lo sumo en un conjunto numerable.

⑮. Definir y analizar la relación entre convexidad y convexidad Jensen.

⑯. Sea μ una medida positiva en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de un conjunto Ω, tal que $\mu(\Omega)<\infty$. Sea f una función real en $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ tal que $a<f(x)<b$, $\forall x\in\Omega$. Sea φ una función real convexa en (a,b). Mostrar que

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)\leqq\int_\Omega(\varphi\circ f)d\mu.$$

⑰. Dado el problema

$$\min_{y\in X} \int_0^1 \left(1 + y'^2(x)\right) dx,$$

con $X = \left\{u \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right)/u(0) =, u(1) = 1\right\}$.

a Obtener la ecuación de Euler y mostrar que $y = x$ es una función estacionaria.

b Con $y(x) = x$ y $\nu(x) = x(1-x)$ calcular $I(\epsilon)$ y verificar que $\dfrac{dI}{d\epsilon}(0) = 0$.

c Tomando $y(x) = x + v(x)$, mostrar que el problema resulta

$$I = 2 + \int_0^1 v'^2(x)dx, \quad \text{con } v(0) = v(1) = 0.$$

Deducir que $y(x) = x$ es la función minimizante buscada para el problema original.

⑱. Obtener la ecuación de Euler para determinar un extremal de la integral $\int_0^1 F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx$ en los siguientes casos. Indicar las condiciones de transversalidad en los bordes y mostrar un extremal.

I. $F(x, u, \xi) = y^2 + y\xi + \xi^2$.

II. $F(x, u, \xi) = y - y\xi + x\xi^2$.

III. $F(x, u, \xi) = \xi^2 + k^2 \cos y$.

IV. $F(x, u, \xi) = a(x)\xi^2 - b(x)y^2$.

V. $F(x, u, \xi) = \left(p - \dfrac{1}{1+y}\right)(ay - \xi)$, $a, p > 0$.

⑲. Mostrar, para $\lambda \geqq 0$ suficientemente pequeño, que

$$\inf \left\{ I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u'^2(x) - \lambda^2 u^2(x)\right) dx \;/\; u \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right),\ u(0) = u(1) = 0 \right\} = 0.$$

Deducir que $u \equiv 0$ es la única solución para $0 < \lambda < \pi$.

⑳. Sea $f(u, \xi) = u^2(1-\xi)^2$. Mostrar que el problema

$$\inf_{u\in X} \int_{-1}^1 f\left(u(t), u'(t)\right) dt$$

con $X = \left\{u \in \mathcal{C}^1\left([-1,1]\right) \;/\; u(-1) = 0,\ u(1) = 1\right\}$, no tiene solución. Probar que

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leqq t \leqq 0, \\ x & 0 < x \leqq 1 \end{cases}$$

es una solución en $\mathcal{SC}^1$.

㉑. Considerar el sistema mecánico de N partículas cuyas respectivas masas son m_i y sus posiciones en el instante t son $u_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \in \mathbb{R}^3$, $1 \leqq i \leqq N$. Sea $T(u') = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \, |u_i'|^2$ la energía cinética y $U = U(t, u)$, la energía potencial. Sea $L(t, u, u') = T(u') - U(t, u)$ el lagrangiano y H su hamiltoniano asociado.

a) Escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange y encontrar el sistema hamiltoniano asociado.

b) Mostrar que, sobre las trayectorias ($v = L_\xi(t, u, u')$), el hamiltoniano se puede escribir como la energía total del sistema, es decir, $H(t, u, v) = T(u') + U(t, u)$.

㉒. Sea $f(x, u, \xi) = \sqrt{g(x, u)}\sqrt{1 + \xi^2}$. Escribir el sistema hamiltoniano correspondiente. Encontrar una primer integral cuando g no depende explícitamente de x.

㉓. Resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi y encontrar los puntos estacionarios de

$$I(u) = \int_a^b f\left(u(t), u'(t)\right) dt,$$

cuando

$$(i).\ \ f(u, \xi) = \sqrt{g(u)}\sqrt{1 + \xi^2}, \qquad (ii).\ \ f(u, \xi) = a(u)\xi^2/2,\ a(x) \geqq a_0 > 0.$$