Métodos Matemáticos

María Evangelina Alvarez

Octubre - Diciembre - 2020

Índice

1. Espacios.

Un problema se dice "well-posed" (bien planteado, bien puesto) si para cada conjunto de datos existe exactamente una solución y la dependencia de la solución con los datos es continua. Para establecer esto, se debe precisar el espacio de dónde se obtiene la solución, el espacio de dónde provienen los datos y la correspondiente noción de continuidad.

Las ecuaciones en derivadas parciales se reescriben en forma abstracta como operadores que actúan entre espacios vectoriales apropiados. Simbólicamente,

$$F : X \to Y$$

donde el operador F guarda la estructura de la ecuación diferencial (incluyendo posiblemente condiciones de contorno) y X e Y son espacios de funciones. La ventaja de esto es que, una vez que el problema de ecuaciones diferenciales haya sido convenientemente interpretado de esta forma, se puede utilizar para el estudio de él, los principios generales del análisis funcional. La mayor parte del trabajo sin embargo no es el uso apropiado de los elementos del análisis funcional, sino el de encontrar espacios "adecuados"X, Y y "adecuados"operadores abstractos F.

1.1. Espacios de funciones continuas

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^d$. Para algún entero no negativo m, sea $\mathcal{C}^m(\Omega)$ el espacio vectorial que consiste en todas las funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que, junto a todas sus derivadas parciales $D^\alpha \phi$ de orden $|\alpha| \leq m$, son continuas en Ω. Esto es, para cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_o^d$ de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$, la derivada parcial

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$$

es continua en Ω.

Si $m = 0$, se indica directamente $\mathcal{C}(\Omega)$.

Luego, $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\Omega)$, indica el espacio de las funciones infinitamente diferenciables.

Los subespacios $\mathcal{C}_o(\Omega)$, $\mathcal{C}_o^m(\Omega)$ y $\mathcal{C}_o^\infty(\Omega)$ consisten en aquellas funciones de $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ y $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ respectivamente, que posean soporte

$$\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \;/\; \phi(x) \neq 0\}},$$

compacto en Ω.

(Analizar el soporte de las derivadas).

Como Ω es abierto, las funciones de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ no necesitan ser acotadas en Ω. Si $\phi \in \mathcal{C}(\Omega)$ es además, acotada y uniformemente continua en Ω, entonces posee una única extensión continua y acotada a la clausura $\bar{\Omega}$ (Teorema de Extensión de Tietze [11]). En base a esto, se define el espacio vectorial $\mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$ que consiste en todas aquellas funciones $\phi \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ para las cuales $D^\alpha \phi$ es acotada y uniformemente continua en Ω para todo multi-índice α de orden $0 \leq |\alpha| \leq m$. Observemos que $\mathcal{C}^m\left(\overline{\mathbb{R}^d}\right) \neq \mathcal{C}^m\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma del máximo (Escribir), $\mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$ resulta un espacio de Banach con la norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)| .$$

Observación 1. *Por equivalencia de la norma infinito y la norma-1 en $\mathbb{R}^n$, tenemos que la norma anterior definida en $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ es equivalente a*

$$\|\phi\| = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi(x)| .$$

1.2. Espacios de Hölder

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^d$.

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se considera **Lipschitz continua** si satisface

$$|u(x) - u(y)| \leqq C\,|x - y|\,, \qquad \forall\, x, y \in \Omega, \tag{1}$$

para alguna constante $C > 0$.

La menor constante que satisface (1) se denomina **constante de Lipschitz** para la función u.

Obviamente, (1) implica que u es continua. Sin embargo, una función continua no necesariamente es Lipschitz continua, en efecto, la función $u(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_o^+$, pero no es Lipschitz continua.

Para $0 < \gamma \leq 1$, una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se considera **Hölder continua con exponente** γ si satisface:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|^{\gamma} \qquad \forall\, x, y \in \Omega, \tag{2}$$

para alguna constante $C > 0$.

Nuevamente, observemos que (2) implica que u es continua.

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, se tiene la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in U} |u(x)|\,.$$

Por otro lado, la **seminorma** γ**-Hölder** de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se define como

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \right\}$$

y la **norma** γ**-Hölder** es

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}\,.$$

El **espacio de Hölder** $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$ consiste en todas las funciones $u \in \mathcal{C}^k\left(\bar{\Omega}\right)$ para las cuales la norma $\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}$ es finita, siendo

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha} u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}\,. \tag{3}$$

Entonces el espacio $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$ consiste en todas las funciones u que son k veces diferenciables con continuidad y cuyas derivadas de orden k son Hölder continuas con exponente γ. En efecto, se pide $u \in \mathcal{C}^k\left(\bar{\Omega}\right)$, con lo cual el primer término de (3) resulta finito, y $[D^{\alpha} u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} < \infty\ \forall\ |\alpha| = k$ por el segundo término de (3).

Este espacio de funciones resulta un *espacio de Banach*, ya que es completo respecto de la norma (3).

(Chequear que sea una norma).

Queremos mostrar que dada $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ existe $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ en $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$

Notemos que la norma de Hölder es la "suma"de la norma $\mathcal{C}^k$ (norma del supremo en la k-ésima derivada) y la condición de Hölder con parámetro $\gamma \in (0,1)$ para la k-ésima derivada. Para la parte de $\mathcal{C}^k$, de la norma de Hölder y la completitud de $\mathcal{C}^k\left(\overline{\Omega}\right)$, existe un $u \in \mathcal{C}^k\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ en $\mathcal{C}^{k,}\left(\overline{\Omega}\right)$. Para trabajar con la condición de Hölder, fijemos un multíndice α con $\mid \alpha \mid = k$ y definamos

$$v := D^{\alpha} u \qquad v_n := D^{\alpha} u_n.$$

Luego tenemos para $x \neq y$ fijos,

$$\frac{\mid v(x) - v(y) \mid}{\mid x - y \mid^{\gamma}} \leq \frac{\mid v(x) - v_m(x) \mid}{\mid x - y \mid^{\gamma}} + \frac{\mid v_m(x) - v_m(y) \mid}{\mid x - y \mid^{\gamma}} + \frac{\mid v_m(y) - v(y) \mid}{\mid x - y \mid^{\gamma}},$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Aquí el primer y el tercer sumando pueden hacerse arbitrariamente pequeños eligiendo m lo suficientemente grande, ya que $v_m \to v$ uniformemente. El segundo sumando es acotado independientemente de m ya que u_n es de Cauchy, por lo tanto acotada en la norma de Hölder. De esto, obtenemos una constante M_α tal que

$$\frac{\mid v_m(x) - v_m(y) \mid}{\mid x - y \mid^\gamma} \leqq M_\alpha,$$

independientemente de x e y. Es decir que $u \in \mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$

Veamos ahora que $u_n \to u$ en $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. De lo trabajado anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(v(x) - v_m(x)) - (v(y) - v_m(y))}{x - y^\gamma} &= \frac{\left(\lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)\right) v_m(x) - \left(\lim\limits_{k\to\infty} v_k(y)\right) + v_m(y)}{x - y^\gamma} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{v_k(x) - v_m(x) - v_k(y) + v_m(y)}{x - y^\gamma} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(v_k - v_m)(x) - (v_k - v_m)(y)}{x - y^\gamma}.
\end{aligned}$$

Aquí, el lado derecho de la ecuación puede ser arbitrariamente pequeño, independientemente de $x \neq y$ eligiendo m lo suficientemente grande, ya que la sucesión u_n es de Cauchy en la norma de Hölder. Luego, $v_n \to v$ en la seminorma de Hölder. Como existe una cantidad finita de multíndices α para considerar, podemos concluir que

$$u_n \to u \qquad en \quad \mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Finalmente, $\mathcal{C}^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$ es completo.

Se dice que un espacio normado X está inmerso en el espacio normado Y, y se anota $X \hookrightarrow Y$, si

① X es un subespacio vectorial de Y.

② El operador identidad I definido de X en Y por $Ix = x$, $\forall x \in X$, es continuo.

Ya que I es lineal, la continuidad de I es equivalente a la existencia de una constante M tal que

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X.$$

En efecto, primero observemos que como I es lineal, que I sea continuo en todo X es equivalente a que I sea continuo en $x = 0$. Por lo tanto basta probar que la existencia de dicha constante es equivalente a que I sea continuo en $x = 0$.

Primero, supongamos que I es continuo en $x = 0$. Entonces dado $\epsilon = 1$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Ix\|_Y < 1$.

Si $\left\|\dfrac{x\delta}{2\|x\|_X}\right\|_X = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, entonces

$$\left\|I\frac{x\delta}{2\|x\|_X}\right\|_Y < 1 \Rightarrow \|Ix\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$$

Tomamos $M := \frac{2}{\delta}$.

Ahora, supongamos que existe $M > 0$ tal que $\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X$. Sea $\epsilon > 0$, entonces tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$,

$$\|Ix\|_Y \leqq M\|x\|_X < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Relacionando los espacios introducidos anteriormente, se tiene el siguiente resultado (cf. [1]):

Sea $m \in \mathbb{N}$ y sean $0 < \nu < \lambda \leq 1$.
Entonces existen las siguientes inmersiones:

$$\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right), \tag{4}$$

$$\mathcal{C}^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right), \tag{5}$$

$$\mathcal{C}^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right), \tag{6}$$

Si Ω es acotado, entonces las inmersiones (5) y (6) son compactas.
Si Ω es convexo, existen además

$$\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,1}\left(\bar{\Omega}\right), \tag{7}$$

$$\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right), \tag{8}$$

Si Ω es convexo y acotado, (7) y (8) son compactos.

En efecto, si $u \in \mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right)$, en particular $u \in \mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)$, lo cual implica que $\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right) \subset \mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)$. Además, $\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)$ por la linealidad del operador diferencial y

$$\|Iu\|_{\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)} = \|u\|_{\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)} \leq \|u\|_{\mathcal{C}^{m+1}\left(\bar{\Omega}\right)}.$$

Luego, I resulta continua en $\bar{\Omega}$ y, vale (4).

Para probar (5), observemos que por la definición de $\mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right)$, resulta $\mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right) \subset \mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)$. Además, por las propiedades de homogeneidad y desigualdad triangular de la norma, podemos concluir que $\mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)$ y

$$\|Iu\|_{\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)} = \|u\|_{\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)} \leq \|u\|_{\mathcal{C}^{m}\left(\bar{\Omega}\right)} + \sum_{|\alpha|=k} \left[D^{\alpha}u\right]_{\mathcal{C}^{0,\nu}\left(\bar{\Omega}\right)} = \|u\|_{\mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right)}.$$

Para (6) si $|\alpha| \leq m$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ 0<|x-y|<1}} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\nu}} &\leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ 0<|x-y|<1}} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \\ &\leq \sup_{\substack{x,y\,\in\,\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} = \left[D^{\alpha}u\right]_{\mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|>1}} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\nu}} &\leq \sup_{\substack{x,y\,\in\,\Omega \\ x\neq y}} |D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| \\ &\leq 2\sup_{x\,\in\,\Omega} |D^{\alpha}u(x)| = 2\left\|D^{\alpha}u\right\|_{\mathcal{C}\left(\bar{\Omega}\right)}.\end{aligned}$$

Además,

$$\left[D^{\alpha}u\right]_{\mathcal{C}^{0,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)} \leqq \|u\|_{C^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)},$$

entonces

$$2\left\|D^{\alpha}u\right\|_{\mathcal{C}\left(\bar{\Omega}\right)} \leq 2\|u\|_{C^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)},$$

de donde concluimos que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\nu}\left(\bar{\Omega}\right)} \leqq 2\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)},$$

y vale (6).

Ahora, si Ω es acotado, queremos ver en primer lugar, que si $A \subset \mathcal{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ es acotado entonces es relativamente compacto en $\mathcal{C}^{m}(\bar{\Omega})$.

Veamos primero que vale para el caso $m = 0$.

Como A es acotado, existe M tal que $\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leq M$ para todo u en A, en particular, $[u]_{\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leq M$ por lo que $|u(x) - u(y)| \leq M\,|x - y|$ para todo x, y en Ω. Luego, por el Teorema de Ascoli-Arzelá [1], tenemos que A es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ como queríamos ver.

Si $m > 1$ y $A \subset \mathcal{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ es acotado entonces también lo es en $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ y por lo probado recién, dada una sucesión $\{u_j\}$ en A, existe una subsucesión (igual notada) $\{u_j\}$ convergente a u en $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Pero $\{D_1 u_j\}$ también es acotada en $\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, por lo que existe una subsucesión, nuevamente igual notada, que converge a Ψ_1 en $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Como esta convergencia es uniforme en Ω tenemos que $D_1 u_j \to D_1 u$. Podemos continuar el proceso de manera que obtengamos una subsucesión para cada α tal que $0 \leq |\alpha| \leq m$ con $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$. Con esto, probamos que la inmersión en (5) es compacta.

Para probar que (6) es compacta, consideremos $u \in \mathcal{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ entonces:

$$\begin{aligned}\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &= \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}\right)^{\nu/\lambda} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\nu/\lambda} \\ &\leq [D^\alpha u]^{\nu/\lambda}_{\mathcal{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\nu/\lambda}.\end{aligned}$$

Por esta acotación, tenemos que cualquier sucesión acotada en $\mathcal{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ y convergente en $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ es de Cauchy y por lo tanto converge en $\mathcal{C}^{m,\nu}(\bar{\Omega})$. Luego, la compacidad sigue de (5).

Si Ω es convexo y x, $y \in \Omega$, por el Teorema del Valor Medio, $\exists\, z \in \{tx + (1-t)y : t \in (0,1)\} \subset \Omega$ tal que $D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) = (x-y) \cdot \nabla D^\alpha u(z)$, donde $\nabla v = (D_1 v, \cdots, D_n v)$. Así,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq n\,|x-y|\,\|u\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega})},$$

y entonces

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,1}(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=m} n\,\|u\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega})} \leq \left(1 + \sum_{|\alpha|=m} n\right) \|u\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega})}.$$

Así, probamos (7), y (8) resulta de (6) y (7).

Finalmente, si Ω es a la vez convexo y acotado, la compacidad de (4) y (8) se deriva de componer la inmersión continua (7) con las inmersiones compactas (5) y (6).

1.3. Espacios L^p

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ y p un número positivo real. Se indica con $L^p(\Omega)$ a la clase de todas las funciones medibles u, definidas en Ω, para las cuales

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty. \tag{9}$$

En $L^p(\Omega)$ se identifica a todas las funciones que son iguales en casi todo punto, por lo que los elementos de $L^p(\Omega)$ serían clases de equivalencia de funciones medibles que satisfacen la condición (9). Por simplicidad, se ignora esta distinción y se indica $u \in L^p(\Omega)$ si u satisface (9), y $u = 0$ en $L^p(\Omega)$ si $u(x) = 0$ a.e. en Ω. Claramente, $L^p(\Omega)$ resulta un espacio vectorial.

Se define, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_p = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right\}. \tag{10}$$

Usando la desigualdad de Hölder:

Si $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |u(x)\,v(x)|\,dx \leq \|u\|_p\,\|v\|_q, \tag{11}$$

donde q es el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[1] Teorema de Ascoli-Arzelà [13]:
Sea $\{f_n\}$ una sucesión equicontinua de funciones de un espacio métrico separable X en un espacio métrico Y, con la propiedad que $\overline{\{f_n(x)\}}$ es compacto en Y, $\forall x \in X$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge puntualmente a una función continua f. La convergencia es uniforme sobre compactos.

y luego la desigualdad de Minkowski:

Si $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p \|v\|_p .$$

se ve que (10) define una norma en $L^p(\Omega)$, resultando éstos espacios de Banach.

Demostración. Primero, veamos la desigualdad de Hölder:

Sea α un número real que satisface $0 < \alpha < 1$, y consideremos la función φ definida en $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Es fácil ver que $\varphi' < 0$ para $0 < t < 1$ y $\varphi'(t) >$ para $t > 1$. Por el Teorema del Valor Medio tenemos que $\varphi(t) \geqq \varphi(1)$ y $\varphi(t) = \varphi(1)$, si y solo si $t = 1$. Por lo tanto, tenemos

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha), \qquad t \geq 0.$$

Si a, b son números reales no negativos y $t = a/b$. Entonces, multiplicando por b a la desigualdad anterior obtenemos la nueva desigualdad

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b,$$

donde se tiene la igualdad si y solo si $a = b$.

Sean ahora p y q números reales que satisfacen $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$ y tomamos $\alpha = 1/p$. Ahora, si A, B son números reales no negativos, entonces

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{12}$$

y se tiene la igualdad si y solo si $A^p = B^q$.

Supongamos que $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ tales que $\|u\|_p \neq 0$ y $\|v\|_q \neq 0$. El producto uv es medible y por (12) tomando $A = |f(x)|/\|f\|_p$ y $B = |g(x)|/\|g\|_q$

$$\frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{|u(x)|^p}{p\|u\|_p} + \frac{|v(x)|^q}{q\|v\|_q}.$$

Como el termino derecho es integrable, resulta uv integrable. Ahora, integrando la desigualdad anterior

$$\frac{\|uv\|_1}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q .$$

Ahora, veamos la desigualdad de Minkowski:

El caso $p = 1$ es trivial. Supongamos que $1 < p < \infty$. Entonces

$$|u+v|^p \leq (|u| + |v|)^p \leq (2\sup\{|u|, |v|\})^p \leq 2^p(|u|^p + |v|^p).$$

Integrando, obtenemos que $f + g \in L^p(\Omega)$.

Por otro lado,

$$|u+v|^p = |u+v||u+v|^{p-1} \leq |u||u+v|^{p-1} + |v||u+v|^{p-1}. \tag{13}$$

Como $u + v \in L^p(\Omega)$, entonces $|u+v|^p \in L^1(\Omega)$; como $p = (p-1)q$ tenemos que $|u+v|^{p-1} \in L^q(\Omega)$. Entonces por la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |u(x)||u(x)+v(x)|^{p-1} dx \leq \|u\|_p \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{(1-p)q} dx \right)^{1/q} = \|u\|_p \|u+v\|_p^{p/q} .$$

Integrando (13) y haciendo un razonamiento parecido al anterior

$$\|u+v\|_p^p \|u\|_p \|u+v\|_p^{p/q} + \|v\|_p \|u+v\|_p^{p/q} \Rightarrow \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_q .$$

$\square$

Una función u, medible en Ω, se dice **esencialmente acotada** en Ω si $\exists K/\, |u(x)| \leq K$ a.e. en Ω. El ínfimo de estas constantes K se lo llama **supremo esencial** de $u(x)$ en Ω. Indicando con $L^{\infty}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones esencialmente acotadas en Ω, éste resulta completo con la norma

$$\|u\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Por otra parte, la desigualdad de Hölder (11) se extiende para los casos $p = 1,\ q = \infty$ y $p = \infty,\ q = 1$. En efecto, si $u \in L^1$, $v \in L^{\infty}$,

$$\int_{\Omega} |uv|\, dx = \int_{\Omega} |u||v|\, dx \leq ||v||_{\infty} \int_{\Omega} |u|\, dx = ||u||_1 ||v||_{\infty} < \infty.$$

Luego, $uv \in L^1$ y resulta $||uv||_1 \leq ||u||_1 ||v||_{\infty}$.

Observación 2. *El único espacio L^p cuya norma se relaciona con un producto interno es cuando $p = 2$. En efecto, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\, \overline{v(x)} dx,$$

donde la desigualdad de Hölder, conocida en este caso como la desigualdad de Schwarz, indica

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 .$$

Veamos que, efectivamente, la norma de L^p con $p \neq 2$ no proviene de ningún producto interno y, consecuentemente, L^p no es un espacio de Hilbert. Como $(L^p, \|.\|_p)$ es un espacio de Banach, esto es equivalente a mostrar que $\|.\|_p$ no verifica la ley del paralelogramo.

Si consideramos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [1,2] \\ 0 & si \quad x \notin [1,2] \end{cases}$$

tenemos que $f,\, g \in L^p$ y $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\left(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2\right)$ pues $p \neq 2$.

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice **localmente integrable** si $f \in L^1(U)$ para todo conjunto acotado U tal que $\bar{U} \subset \Omega$ y se nota $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1.4. Derivadas débiles.

Los espacios de Hölder introducidos anteriormente no son siempre los adecuados para una teoría básica de ecuaciones diferenciales parciales, ya que no siempre se puede hacer estimaciones analíticas para demostrar que las soluciones realmente pertenecen a estos espacios. Se necesita espacios de funciones menos suaves.

Sea $\mathcal{C}_o^{\infty}(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciables dadas en un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, con soporte $\mathtt{supp}\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}$ compacto en Ω.

Ahora, si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_o^{\infty}(\Omega)$, integrando por partes se ve que

$$\int_{\Omega} f \varphi_{x_i} dx = -\int_{\Omega} f_{x_i} \varphi\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

No hay término de evaluar en el borde ya que φ posee soporte compacto dentro de Ω y se anula en $\partial\Omega$. Entonces,

$$\left(T_{f_{x_i}}, \varphi\right) = -\left(T_f, \varphi_{x_i}\right).$$

Generalizando, si $k \in \mathbb{Z}^+$, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es cualquier multiíndice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$, entonces, aplicando la integración por partes $|\alpha|$ veces,

$$\int_\Omega f\ D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f\ \varphi\ dx, \quad \text{donde } D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}} \varphi. \tag{15}$$

Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Se dice que v es la *derivada parcial débil de orden* α de u, escribiendo $D^\alpha u = v$, si resulta

$$\int_\Omega u\ D^\alpha \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\ \varphi\ dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_o^\infty(\Omega). \tag{16}$$

1.5. Espacios de Sobolev.

Dados $1 \leqq p \leqq \infty$ y $k \in \mathbb{N}_0$, se define otro espacio de funciones, el *espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ que consiste en todas las funciones localmente sumables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, con orden $|\alpha| \leqq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$. Luego, las funciones en $W^{k,p}$ se las identifican si coinciden a.e.

Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, se define la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p\ dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

Para esto, usaremos el hecho de que si la integral de una función positiva sobre un conjunto de medida no nula es cero entonces el integrando es igual a cero casi todo punto.

- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ a.e. pues,

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\ dx \right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\ dx = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |D^\alpha u|^p\ dx = 0\ \forall \alpha / |\alpha| \leqq k$$
$$\Leftrightarrow \|D^\alpha u\|_p^p = 0\, a.e.\ \forall \alpha / |\alpha| \leqq k \Leftrightarrow D^\alpha u = 0\, a.e.\ \forall \alpha / |\alpha| \leqq k \Leftrightarrow u = 0\, a.e.$$

- $\|\beta u\| = |\beta|\, \|u\|$, pues es inmediato de la definición.
- $\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|$ pues, de la linealidad del operador diferenciación,

$$\|u+v\|^p = \sum_{|\alpha| \leqq k} \int_\Omega |D^\alpha (u+v)|^p\ dx = \sum_{|\alpha| \leqq k} \int_\Omega |D^\alpha(u) + D^\alpha(v)|^p\ dx = \sum_{|\alpha| \leqq k} \|D^\alpha(u) + D^\alpha(v)\|_p^p.$$

Además, $D^\alpha(u)$, $D^\alpha(v) \in L^P$ por lo que, aplicando la desigualdad de Minkowski tenemos que:

$$\|u+v\|^p \leq \|u\|^p + \|v\|^p.$$

(Completar).

Mediante un razonamiento análogo, se puede concluir el resultado para el caso $p = \infty$.

Luego, con esta norma, una sucesión $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset W^{k,p}(\Omega)$ se dice que converge a $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si es

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ resulta así un espacio de Banach.

Sea $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset W^{k,p}(\Omega)$ sucesión de Cauchy. Como $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$, $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$, y L^p es completo, se tiene que $u_m \to u$ en L^p y que $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ en L^p. Se tiene entonces que $\int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi = \int\limits_\Omega (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_m \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Luego:

$$\|u_m - u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqq k} \int_\Omega |D^\alpha u_m - D^\alpha u|^p \, dx = \sum_{|\alpha|\leqq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Si $p = 2$, se indican $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega) \quad (k \in \mathbb{N}_0)$ pues resultan espacios de Hilbert. En particular, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ y también $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Además, $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ indican los espacios de funciones pertenecientes a $W^{k,p}(\Omega')$, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$. Así queda definido $H^k_{loc}(\Omega)$ para el caso $p = 2$.

Con $W^{k,p}_o(\Omega)$ se indica a la clausura de D en $W^{k,p}(\Omega)$. Luego,

$$u \in W^{k,p}_o(\Omega) \text{ sii } \exists u_m \in D / \; u_m \to u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

$W^{k,p}_o(\Omega)$ resulta el espacio de aquellas funciones $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tales que $D^\alpha u = 0$ en $\partial\Omega$, $\forall\, |\alpha| \leq k-1$ en el sentido de la traza del siguiente párrafo.

1.6. Traza.

Si Ω resulta un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, para cada $u \in W^{p,k}(\Omega)$, algún $1 \leq p < \infty$, se puede encontrar una sucesión de funciones $u_m \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$ (es decir, se puede aproximar a u por funciones suaves hasta el borde).

Ahora, si $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, entonces claramente u toma valores en $\partial\Omega$ en el sentido usual, pero una típica función $u \in W^{k,p}(\Omega)$ en general no es continua y, aún peor, está definida a.e. en Ω. Como $\partial\Omega$ tiene medida cero, no tiene sentido directo la expresión "u restringida a $\partial\Omega$". La noción de traza resuelve este problema.

Sea $1 \leq p < \infty$, Ω acotado y $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, entonces existe un operador lineal y acotado

$$T : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \;\; \text{tal que}$$

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.
2. $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con constante c dependiendo sólo de p y Ω.

El operador T queda bien definido gracias a que se puede aproximar por funciones suaves y el segundo ítem establece la continuidad.

(Justificar esta afirmación revisando las densidades)

Este resultado no asegura que ahora tiene sentido hablar de valores puntuales de u en $\partial\Omega$, sino que $u|_{\partial\Omega}$ es una función de $L^p(\partial\Omega)$ o sea de "potencia p integrable". Además, dice que para funciones suaves la traza de u definida por él es la restricción puntual en la frontera de Ω en el sentido usual.

1.7. Funciones test.

Definición 1. *Se denomina función test a una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_o(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$, con Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$. Se indica $\mathcal{D} = \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

En $\mathcal{D}$ se define la siguiente noción de convergencia:

Definición 2. *La sucesión $\{\varphi_j\}$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}$ si*

- $\mathrm{supp}\,(\varphi_j)$, $\mathrm{supp}\,(\varphi)$ *están contenidos en un subconjunto compacto fijo de U y*
- *para cada multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^d_0$, $D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$ uniformemente en $\mathbb{R}^d$.*

Lema 1. *Sea* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha(x) = e^{-1/x}$ *para* $x > 0$ *y* $\alpha(x) = 0$ *para* $x \leqq 0$. *Entonces* $\alpha \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *con* $\alpha(x) > 0$ *para* $x > 0$ *y* $\operatorname{supp}(\alpha) = \mathbb{R}_0^+$.

Demostración.

Completar

□

Lema 2. *Si* a, $b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y* $\beta(x) = \beta_{a,b}(x) = \alpha(x-a)\alpha(b-x)$, *entonces* $\beta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\beta > 0$ *en* (a,b) *y* $\operatorname{supp}(\beta) = [a,b]$. *Además,* $I(\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(x)dx > 0$. *Luego,* $\xi_{a,b} := \dfrac{1}{I(\beta)}\beta_{a,b}$ *tiene las mismas propiedades con* $\int\limits_{\mathbb{R}} \xi_{a,b}(x)dx = 1$.

Demostración.

Completar graficando α, β y ξ para distintos intervalos.

□

Lema 3. *Sean* $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $1 \leqq j \leq d$. *Para* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma_{a,b}(x) = \prod\limits_{j=1}^{d} \xi_{a_j,b_j}(x_j)$. *Entonces* $\Gamma_{a,b} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $\Gamma_{a,b} > 0$ *en* $\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$, $\operatorname{supp}(\Gamma_{a,b}) = \prod\limits_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ *y* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{a,b}(x)dx = 1$.

Demostración.

Completar graficando Γ para distintos rectángulos.

□

Corolario 1. *Para cada punto* $p \in \mathbb{R}^d$ *y para cada entorno* U *de* p *en* $\mathbb{R}^d$ *existe una función* $\varphi \in \mathcal{D}$ *con las siguientes propiedades:*

1 $\varphi \geqq 0$ *y* $\varphi(p) > 0$.

2 $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$.

3 $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$.

Demostración.

Completar

□

Lema 4. *Para cada $a \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$ existe una función $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tal que*

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(a; 2r), \quad 0 \leqq \varphi \leqq 1, \quad \varphi = 1 \text{ en } B(a; r).$$

Demostración.

Completar

□

Por superposición y tomando límites de funciones test, se puede conseguir una gran familia de nuevas funciones test. Por ejemplo, considerando φ como en el corolario 1, centrada en $p = 0$ y tomando

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{1}{\epsilon}x\right), \quad \epsilon > 0. \tag{17}$$

Considerando $\epsilon = 1/j$, para $j \in \mathbb{N}$, se puede pasar a trabajar con una sucesión regularizante, reescribiendo el siguiente lema si se considera $n \to \infty$.

Lema 5. *Sea $f \in \mathcal{C}_o\left(\mathbb{R}^d\right)$, espacio de las funciones continuas a soporte compacto, entonces, considerando φ_ϵ como en (17), se tiene $f_\epsilon := f * \varphi_\epsilon \in \mathcal{D}$ y f_ϵ converge uniformemente a f cuando $\epsilon \searrow 0$.*

Demostración.

Completar

□

Observación 3. *El resultado anterior se puede extender a funciones continuas en $\mathbb{R}$ consiguiendo la convergencia uniforme sobre compactos.*

Observación 4. *Si φ_ϵ tuviese límite, como $f * \varphi_\epsilon \to f$ cuando $\epsilon \searrow 0$, ese límite sería el neutro de la convolución, $f * \varphi_\infty = f$. ¿Puede existir una tal φ_∞?*

Observación 5. *Se puede observar que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{C}_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ por el lema 5. Además, sabemos que $C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ también lo es.*

Observación 6. *Una función ϕ es analítica en X si, $\forall a \in X$, ϕ es desarrollable en una serie de potencias en torno al punto a, convergente en algún entorno de a. Si se reemplaza la condición infinitamente diferenciable por analiticidad, al requerir soporte compacto sólo se tendría la función nula.*

Lema 6. *Sea X un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y ϕ una función analítica en X. Luego, o bien $\phi = 0$ en X o $\operatorname{supp}\phi = X$. En el último caso $\operatorname{supp}\phi$ no es compacto siempre que $X \neq \emptyset$.*

Demostración.

Completar

□

2. Distribuciones.

2.1. Introducción

Las distribuciones constituyen un conjunto de objetos que contiene a las funciones continuas como subconjunto, y a modo de recíproco se tiene que toda distribución puede aproximarse por funciones infinitamente diferenciables, esto lleva a referirse frecuentemente a las distribuciones como "funciones generalizadas". De todas maneras no toda distribución es una función continua, y en ciertos aspectos el cálculo con distribuciones tiene un desarrollo más aligerado que el de las funciones continuas. Por ejemplo, la derivada de toda distribución es una distribución, mientras que existen funciones continuas que no son derivables.

Ejemplo 1. *La función f definida por $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$, diferenciable en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, con derivada igual a -1 y 1 respectivamente en dichos intervalos, pero f no es diferenciable en 0. En principio resulta claro que f' es igual a $\mathrm{sign(x)}$, signo de x, con $f(0)$ no definido, pudiendo esto no ser de importancia. Pero, puesto que la función $f''(x) = 0$ para $x < 0$ y $x > 0$, algo debe aportar $f''(0)$, pues si resulta ser $f''(x) \equiv 0$, luego se tiene que $f'(x) \equiv c$, para una cierta constante $c \in \mathbb{R}$ y $f(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$ que no coincide con la función original sea cual sea la elección de c.*

Para funciones que no son continuas o diferenciables en determinados puntos, las singularidades pueden mitigarse trasladando horizontalmente en un y a la función f en un entorno de la singularidad y luego promediando las funciones trasladadas así obtenidas. Por ejemplo, $\frac{1}{2}(f(x-y) + f(x+y))$ para un cierto y. Esto se puede extender para todo y y luego promediar las funciones trasladadas con un peso $\varphi(y)$ para cada $y-$traslación. Entonces se estaría considerando la función $x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi(y)dy$, es decir, $f * \varphi(x)$. Por el lema 5, esta nueva función será tan diferenciable como φ y se puede tener una familia de estas funciones suaves que converge uniformemente a f sobre compactos, por lo que la aproximación es buena.

Ejemplo 2. *Sea $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función continuamente diferenciable y sea la función divergencia de v:*

$$x \mapsto \rho(x) = \mathrm{div\ v(x)} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{3} \frac{\partial \mathrm{v_j}}{\partial \mathrm{x_j}}(\mathrm{x}),$$

la cual es una función continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Si $A \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado, con frontera regular ∂A, $\eta(y)$ es la normal exterior a ∂A en el punto $y \in \partial A$, el teorema de la divergencia establece que

$$\int_A \rho(x)dx = \int_{\partial A} \langle v(y), \eta(y) \rangle dy. \tag{18}$$

La segunda integral puede interpretarse como la cantidad de volumen que fluye a través de las paredes del sólido y $\rho(x)$ como una fuente cuyo campo de velocidades está dado por v (ej. cargas eléctricas).
Si se desea representar fuentes puntuales, en un cierto punto p, para la cual

$$\int_A \rho(x)dx = \begin{cases} c & \text{si } p \in A \\ 0 & \text{si } p \notin \overline{A}, \end{cases}$$

siendo $\overline{A}$ la clausura de A en $\mathbb{R}^3$, y c una constante positiva, la carga en la fuente puntual en p, estas condiciones no pueden ser realizadas por una función continua en $\mathbb{R}^3$.
Si se considera

$$v(x) = ||x-p||^{-3}(x-p),$$

la divergencia del campo v se anula para todo $x \neq p$ y verifica lo pedido. Luego se tiene que la integral de la izquierda de (18) es 0 si $p \notin \overline{A}$ y 4π si $p \in A$. Así se pretende concluir que la divergencia de este campo vectorial es igual a la fuente puntual en p con carga 4π.

Ejemplo 3. *La función $x \mapsto x^{-1}$ no es absolutamente integrable sobre ningún intervalo acotado entorno del 0, con lo cual no queda claro qué significaría*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

para ϕ función continua que se anula fuera de un intervalo acotado. Aun en el caso en que $\phi(0) = 0$, el integrando puede ser no absolutamente integrable. Por ejemplo, sea $0 < \varepsilon < c < 1$ y sea

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0, \\ \dfrac{1}{|\log x|}, & 0 < x < c. \end{cases}$$

La función ϕ es continua en $(-\infty, c)$ y puede extenderse a una función continua en $\mathbb{R}$ que se anula fuera de un intervalo cerrado. Luego,

$$\int_{\varepsilon}^{c} \frac{\phi(x)}{x} dx = \log|\log \varepsilon| - \log|\log c|,$$

y el término de la derecha converge a ∞ para $\varepsilon \downarrow 0$. Pero si ϕ es continuamente diferenciable y se anula fuera de un intervalo acotado, integrando por partes y usando la estimación $\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$ para $\varepsilon \downarrow 0$ (consecuencia del teorema del valor medio), se obtiene

$$PV \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x) \log|x| dx,$$

donde el término de la izquierda es el valor principal de la integral. Siguiendo con la suposición que ϕ es una función continuamente diferenciable se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x + i\varepsilon} dx \begin{cases} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} & \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x + i0} dx \\ \xrightarrow[\varepsilon \uparrow 0]{} & \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x - i0} dx. \end{cases}$$

Claramente las "funciones"$PV\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+i0}$, $\frac{1}{x-i0}$, difieren sólo en $x = 0$, es decir que al integrarlas multiplicadas por una función ϕ el resultado es el mismo si $\phi(0) = 0$.

Ejemplo 4. *Otra motivación importante es el cálculo de variaciones. Sea el funcional F dado por*

$$F(v) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} p(x) v'(x)^2 + \frac{1}{2} q(x) v(x)^2 \right) dx,$$

donde p y q son funciones no negativas dadas suficientemente diferenciables en el intervalo $[a, b]$. Sea $\mathcal{C}^k_{\alpha,\beta}$, el conjunto de funciones v, k veces diferenciables con continuidad en $[a, b]$ y tales que $v(a) = \alpha, v(b) = \beta$. Luego para $k \geqq 1$, F es un funcional a valores reales definida en $\mathcal{C}^k_{\alpha,\beta}$. La pregunta es si existe $u \in \mathcal{C}^k_{\alpha,\beta}$ tal que F alcance su mínimo sobre $\mathcal{C}^k_{\alpha,\beta}$ en u, i.e., $F(u) \leqq F(v), \forall v \in \mathcal{C}^k_{\alpha,\beta}$.

Si se obtiene una tal u que minimiza al funcional F, se encuentra que $\forall \phi \in \mathcal{C}^k_{0,0}$, la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $t \mapsto F(u + t\phi)$ alcanza su mínimo en $t = 0$. Esto implica que su derivada con respecto a t para $t = 0$ es 0, es decir

$$\begin{aligned} F(u + t\phi) &= \int_a^b \left(\tfrac{1}{2} p(x) \left[u'(x) + t\phi'(x)\right]^2 + \tfrac{1}{2} q(x) \left[u(x) + t\phi(x)\right]^2 \right) dx. \\ \tfrac{d}{dt} F(u + t\phi) &= \int_a^b \left(p(x) \left[u'(x) + t\phi'(x)\right] \phi'(x) + q(x) \left[u(x) + t\phi(x)\right] \phi(x) \right) dx. \\ \tfrac{d}{dt} F(u + t\phi)\big|_{t=0} &= \int_a^b \left(p(x) u'(x) \phi'(x) + q(x) u(x) \phi(x) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{C}^2$, integrando por partes se obtiene

$$\int_a^b \left(-\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) + q(x) u(x) \right) \phi(x) dx = 0.$$

Como esto debe verificarse para cualquier $\phi \in \mathcal{C}^k_{0,0}$, se concluye que u debe satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden

$$(Lu)(x) = -\frac{d}{dx} (p(x) u') + q(x) u = 0.$$

Este procedimiento puede aplicarse a funcionales más generales y las ecuaciones encontradas para el punto estacionario son denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange.
La existencia del punto $u \in \mathcal{C}^2$ que realiza el mínimo, se consideró un hecho hasta que Weierstrass propuso un ejemplo aparentemente inofensivo, para el cual el mínimo no existe.

Sea $a = -1$, $b = 1$, $\alpha = -1$ $\beta = 1$, $p(x) = x^2$ y $q = 0$. Luego,

$$F(v) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} \left(v'(x)\right)^2 dx, \quad v \in \mathcal{C}^2_{-1,1}.$$

Para $\varepsilon > 0$ sea la función

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg}(x/\varepsilon)}{\operatorname{arc\,tg}(1/\varepsilon)},$$

para $x \in [-1, 1]$, donde el denominador se incluye sólo para que $v_\varepsilon(\pm 1) = \pm 1$. Para $x < 0$ o $x > 0$, se tiene que $\operatorname{arc\,tg}(x/\varepsilon)$ converge a $-\pi/2$ o $\pi/2$ respectivamente para $\varepsilon \downarrow 0$, por lo tanto, $v_\varepsilon(x)$ converge puntualmente en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ a la función sgn x para $\varepsilon \downarrow 0$. Para ver qué sucede con $F(v_\varepsilon)$ se calcula

$$v'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{arc\,tg}(1/\varepsilon)} \frac{1}{(1 + (1/\varepsilon)^2)}.$$

Mediante el cambio de variables $x = \varepsilon y$ se obtiene

$$F(v_\varepsilon) = \varepsilon \frac{1}{\operatorname{arc\,tg}(1/\varepsilon)} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{y^2}{2(1 + y^2)^2} dy. \tag{19}$$

Dado que

$$\phi'(y) = \frac{2y^2}{(1 + y^2)^2} \text{ si } \phi(y) = -\frac{y}{1 + y^2} + \operatorname{arc\,tg} y,$$

se tiene que la integral (19) es igual a $\dfrac{\phi(1/\varepsilon) - \phi(-1/\varepsilon)}{4}$, cuyo límite para $\varepsilon \downarrow 0$ es $\pi/4$.

Notando que $(\operatorname{arc\,tg}(1/\varepsilon))^{-1}$ converge a $2/\pi$ para $\varepsilon \downarrow 0$, se puede deducir que $F(v_\varepsilon) = \varepsilon\psi(\varepsilon)$, donde $\psi(\varepsilon) \to \frac{1}{2}$ para $\varepsilon \downarrow 0$. En conclusión $F(v_\varepsilon) \to 0$ para $\varepsilon \downarrow 0$.

Así se ve que el ínfimo de F en $\mathcal{C}^1_{-1,1}$ es igual a 0, ya que $F(v) \geqq 0$, $\forall v$, e incluso en $\mathcal{C}^\infty_{-1,1}$ es igual a 0. Sin embargo si $u \in \mathcal{C}^1$ es una función tal que $F(u) = 0$, se tiene que $du/dx(x) = 0$, lo que significa que u es constante, en cuyo caso no puede satisfacer la condición $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. Por lo tanto la restricción de F al espacio $\mathcal{C}^1_{-1,1}$ no alcanza su mínimo.

Sea v una función continuamente diferenciable en $[a, b]$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$|v(x) - v(y)| = |\int_x^y v'(z)dz| \leqq (\int_x^y v'(z)^2 dz)^{1/2} (\int_x^y dz)^{1/2} \leqq \|v'\|_{L^2} |x - y|^{1/2},$$

donde $\|v'\|_{L^2}$ es la norma de v' en L^2. Esto puede usarse para mostrar que toda $v \in H^1$ puede interpretarse como una función continua en $[a, b]$ para la cual es válida la siguiente estimación

$$|v(x) - v(y)| \leqq \|v'\|_{L^2} |x - y|^{1/2}, \tag{20}$$

La continuidad de $v \in H^1$ implica que tiene sentido referirse al subespacio $H^1_{\alpha,\beta}$ de las $v \in H^1$ con $v(a) = \alpha$, $v(b) = \beta$. Además, $\forall v \in H^1$ está bien definido $F(v)$.
Si $p(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ (esto excluye el ejemplo de Weierstrass), se tiene la existencia de una constante c con la propiedad $\|v'\|^2_{L^2} \leqq cF(v)$ para toda $v \in H^1$ pues siendo $1/k = \text{mín}\{p(x) : x \in [a, b]\}$ se tiene

$$\|v'\|^2_{L^2} = \int_a^b v'(x)^2 dx = 2k \int_a^b \tfrac{1}{2k} v'(x)^2 dx \leqq \underbrace{2k}_{c} \int_a^b \tfrac{1}{2} p(x) v'(x)^2 dx + \tfrac{1}{2} \int_a^b \underbrace{q(x) v^2(x)}_{\geqq 0} dx = cF(v). \tag{21}$$

Sea $\{v_j\}$ una sucesión en $H^1_{\alpha,\beta}$ tal que

$$F(v_j) \to i = \text{ínf}\{F(v) : v \in H^1_{\alpha,\beta}\}.$$

Se quiere ver que F alcanza el ínfimo i de dicho conjunto. Por ser la sucesión $\{F(v_j)\}$ convergente resulta acotada, luego existe una constante A tal que $|F(v_j)| \leqq A$. Usando las acotaciones (20) y (21) se tiene que $\{v_j\}$ es equicontinua, i.e., dado $\varepsilon > 0$, se tiene

$$|v_j(x) - v_j(y)| \leqq \|v_j'\|_{L^2}|x-y|^{1/2} \leqq cF(v_j)|x-y|^{1/2} \leqq cA|x-y|^{1/2} < \varepsilon$$

si $|x-y| < \delta = (\frac{\varepsilon}{cA})^2$. La sucesión v_j es también uniformemente acotada, luego por el teorema 1 existe una subsucesión $\{v_{j_k}\}$ que converge uniformemente a una cierta función continua u, que puede demostrarse que pertenece a $H^1_{\alpha,\beta}$ y que $F(v_{j_k}) \to i = F(u)$ para $k \to \infty$.

Teorema 1. *Ascoli-Arzelà*
Sea $\{f_n\}$ una sucesión equicontinua de funciones de un espacio métrico separable X en un espacio métrico Y, con la propiedad que $\overline{\{f_n(x)\}}$ es compacto en Y, $\forall x \in X$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge puntualmente a una función continua f. La convergencia es uniforme sobre compactos.

Lo hecho hasta aquí se ve prometedor, el problema es que en principio toda la información que se tiene sobre esta función minimizadora u es que u' es de cuadrado integrable, pero esto no implica necesariamente que u sea integrable en el sentido clásico o que $u \in \mathcal{C}^2$, con lo cual la integración por partes que se realizó para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange y el hecho que u sea solución de dicha ecuación no pueden considerarse en el sentido usual.
Lo que puede hacerse es integrar por partes intercambiando los roles de las funciones u y ϕ para concluir que

$$\int_a^b u(x)(L\phi)(x)dx = 0,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ igual a 0 en un entorno de los extremos de integración. Para que esta expresión tenga sentido basta con que u sea localmente integrable en el intervalo $I = (a,b)$. En este caso se dice que u satisface la ecuación diferencial $Lu = 0$ en sentido débil o en el *sentido de las distribuciones.*

Puede verse que si p y q son suficientemente diferenciables y p no se anula en el intervalo I, para u localmente integrable que satisface $Lu = 0$ en el sentido de las distribuciones resulta u infinitamente diferenciable en I y satisface la ecuación $Lu = 0$ en I en sentido usual.

Ejemplo 5. *Considerar una varilla de espesor no uniforme. Con el fin de describir cómo su masa está distribuida a lo largo de su longitud, se introduce una «función densidad de masa» $\rho(x)$. Esto se define físicamente como la masa por unidad de longitud de la varilla en el punto x, considerando las distancias desde el centro de la varilla; y se define matemáticamente como una función positiva tal que la masa total de la sección de la varilla entre a y b sea $\int\limits_a^b \rho(x)dx$. Esta es una descripción satisfactoria de las distribuciones continuas de masa. Luego propiedades dinámicas tales como centro de masa y momentos de inercia se pueden expresar en términos de la función ρ.*

Pero si la masa se concentra en un número finito de puntos en lugar de estar distribuida de forma continua, la descripción anterior no sirve.

Considerar, por ejemplo, un cable de masa despreciable con una pequeña pero pesada cuenta esférica unida en su punto medio, $x = 0$. Si se supone que dicha cuenta tiene una unidad de masa pero es tan pequeña que es razonable representarla matemáticamente por un punto, entonces la masa total del intervalo (a,b) es cero si $0 \notin (a,b)$ y es uno si $0 \in (a,b)$. Luego, no existe una función ρ que pueda representar dicha distribución de masa. Si existiese, tendría que ser $\rho(x) = 0$, $\forall x \neq 0$, puesto que la masa por unidad de longitud es cero salvo en $x = 0$. Pero si una función se anula en todos los puntos salvo un número finito, su integral sobre cualquier intervalo será cero y no puede dar uno como se necesita.

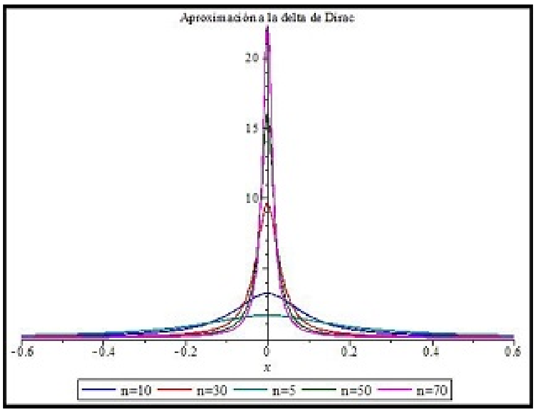
Desde el punto de vista físico, la densidad de masa es cero salvo en $x = 0$ donde es infinito para al «integrarla» conseguir una masa unitaria, lo cual por ahora es matemáticamente absurdo. Dirac introduce una «función» $\delta(x)$ tal que

$$\delta(x) = 0, \ \forall x \neq 0, \wedge \quad \int\limits_a^b \delta(x)dx = 1, \ \textit{si } a < 0 < b,$$

para representar la densidad de masa correspondiente a una partícula puntual de masa uno. Dicha partícula puntual se puede ver como el límite de una sucesión de distribuciones de masa continuas las cuales se vuelven más y más concentradas. Así, la función delta se puede considerar como «límite» de funciones ordinarias.

Por ejemplo,

$$d_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{\pi\left(1+n^2x^2\right)}, & x \neq 0, \\ \dfrac{n}{\pi}, & x = 0. \end{cases} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$



Además, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_n(x)dx = 1$ *y, si* $a < 0 < b$, $\int\limits_{a}^{b} d_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. *Luego, se puede decir que el límite de* $\{d_n\}_n$ *tiene las propiedades de* δ.

Como usualmente en la práctica aparece δ *dentro de una integral, se puede reemplazar por* d_n *y luego tomar límite* $n \to \infty$ *al final de los cálculos, sacando parcialmente la inconsistencia matemática.*

2.2. Definiciones

Observación 7. *Se dice que* E *es un espacio vectorial topológico (EVT) si* E *es un espacio vectorial munido de una topología para la cual la suma y el producto por escalares en* E *son aplicaciones continuas. Si se trabaja con un EVT que tenga una base numerable de entornos del origen, la noción de continuidad es equivalente a la continuidad por sucesiones. De este modo se tiene que una aplicación lineal* $u : E \to \mathbb{C}$ *es continua si* $u(x_j) \to x$ *para* $x_j \to x$ *en* E.

Además, por la linealidad de u, *se tiene que* $u(x_j) \to u(x)$ *es equivalente a* $u(x_j - x) \to 0$, *mientras que* $x_j \to x$ *es equivalente a* $x_j - x \to 0$ *en* E, *con lo cual la continuidad de un funcional* u *es equivalente a la afirmación*

$$\lim_{j\to\infty} x_j = 0 \quad en\ E \implies u(x_j) \to 0 \ (en\ \mathbb{C}).$$

Observación 8. *Para definir continuidad en* $\mathcal{D}$ *se puede considerar una topología de la siguiente manera:*

Dado $K \subset \mathbb{R}^d$ *compacto, sea* $\mathcal{D}(K) = \{\varphi \in \mathcal{D} / \mathtt{supp}(\varphi) \subset K\}$.

Definimos en $\mathcal{D}(K)$ *una estructura topológica de espacio vectorial por medio de la familia de seminormas*

$$N_\alpha(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi(x)|, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

Puede verse que la definición de convergencia de $\mathcal{D}$ corresponde a dicha estructura topológica. Luego, $\mathcal{D}(K)$ es un espacio métrico completo. Entonces, podemos definir distribución como sigue:

$T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ es una distribución si es lineal y su restricción a cada espacio $\mathcal{D}(K)$ es continua.

Finalmente, se puede ver que el espacio $\mathcal{D}$ tienen una estructura topológica inducida por los espacios $\mathcal{D}(K)$, que es aquella que permite describir la continuidad en término de sucesiones.

Definición 3. *Una aplicación lineal* $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *se llama* ***distribución*** *si es continua, es decir,*

$$T\left(\phi_j\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad siempre\ que\ \phi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ en\ \mathcal{D}.$$

Al conjunto de todas las distribuciones se lo indica con $\mathcal{D}'$.

Observación 9. *Dados* $T \in \mathcal{D}'$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}$ *notamos* $T(\varphi) = (T, \varphi) = \langle T, \varphi \rangle$

Observación 10. *La existencia de la topología en $\mathcal{D}$ lleva a pensar en el espacio vectorial de distribuciones como el dual topológico de $\mathcal{D}$, al que se indica $\mathcal{D}'$.*

Sean $S, T \in \mathcal{D}'$, $a, b \in \mathbb{F}$.
Para ver que $aS + bT$ es lineal, consideremos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$.

$$(aS + bT)(\alpha\varphi + \beta\psi) = aS(\alpha\varphi + \beta\psi) + bT(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha aS(\varphi) + \beta aS(\psi) + \alpha bT(\varphi) + \beta bT(\psi) =$$
$$= \alpha(aS + bT)(\varphi) + \beta(aS + bT)(\psi)$$

Ahora, para ver que $aS + bT$ es continua, sea $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.
$(aS + bT)(\varphi_n) = aS(\varphi_n) + bT(\varphi_n) \longrightarrow aS(\varphi) + bT(\varphi)$ pues $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$, $S(\varphi_n) \longrightarrow S(\varphi)$. Por lo tanto $\mathcal{D}'$ es un espacio vectorial.

Teorema 2. *Si $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$ es lineal entonces T es secuencialmente continuo si y solo si es secuencialmente continuo en $0 \in \mathcal{D}$.*

Demostración.
Si T es secuencialmente continua en $\mathcal{D}$, en particular, lo es en $0 \in \mathcal{D}$.
Ahora, supongamos que T es secuencialmente continua en 0, es decir, $T(\varphi_j) \longrightarrow 0$ en $\mathbb{F}$ para toda $\varphi_j \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$. Veamos que si $\phi_j \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{D}$ entonces $T(\phi_j) \longrightarrow T(\phi)$ en $\mathbb{F}$.
Primero observemos que, como $\phi_j \longrightarrow \phi$, existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\mathtt{supp}(\phi_j - \phi) \subset \mathtt{supp}(\phi_j) \cup \mathtt{supp}(\phi) \subset K.$$

Además, por definición, $\|\phi_j - \phi\|_{n,\infty,\Omega} \longrightarrow 0$. Luego, $(\phi_j - \phi) \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$. Finalmente, por hipótesis, $T(\phi_j - \phi) \longrightarrow 0$. Luego, al ser T lineal, $T(\phi_j) \longrightarrow T(\phi)$.

□

Teorema 3. *Dado un operador lineal $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{F}$, son equivalentes:*

I. T es una distribución.

II. Para cada compacto K de $\mathbb{R}^d$, $\exists\, m = m(K) \in \mathbb{N}_0$, $C = C(K) > 0$ tales que

$$|(T, \varphi)| \leq C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K). \tag{22}$$

Demostración.
$(I \Rightarrow II)$ Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, supongamos que T no satisface la condición (22). Es decir, dado $K \subset\subset \mathbb{R}^d$, para cada $C > 0$, $m \in \mathbb{N}, \exists\, \varphi \in \mathcal{D}(K)$ tal que

$$|(T, \varphi)| > C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Particularmente, podemos elegir $C = m$. Entonces, $\exists\, \psi_m \in \mathcal{D}(K)$ tal que

$$|(T, \psi_m)| > m \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \psi_m(x)|.$$

Sea $\varphi_m = \frac{\psi_m}{(T, \psi_m)} \in \mathcal{D}$, dado $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, si $m \geq |\beta|$ tenemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\beta \varphi_m(x) \right| \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi_m(x)| < \frac{1}{m} \left(T, \frac{\psi_m}{(T, \psi_m)} \right) = \frac{1}{m}.$$

Luego, $\varphi_m \to 0$ en $\mathcal{D}$, cuando $m \to \infty$. Sin embargo, por construcción, tenemos que $(T, \varphi_m) = 1$, $\forall\, m$. Esto muestra que T no puede ser una distribución, por no ser continua.
$(II \Rightarrow I)$ Sea $\{\varphi_j\}$ una sucesión en $\mathcal{D}$ convergente a $0 \in \mathcal{D}$. Luego, por definición, $\varphi_j \in \mathcal{D}(K)$ para algún subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, para todo j. Además, cada derivada $D^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}^n$, cuando $j \to \infty$. Luego, teniendo en cuenta la hipótesis, $\exists\, m \in \mathbb{N}_0$, $C > 0$ tales que

$$|(T, \varphi_j)| \leq C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi_j(x)| \to 0, \text{ si } j \to \infty.$$

Resultando así, por el teorema 2, T continua en $\mathcal{D}$ y, consecuentemente, una distribución.

□

Definición 4. *Si un mismo $m \in \mathbb{N}_0$ sirve para todo K compacto en (22), el mínimo de estos m es el* ***orden*** *de la distribución y se dice que la distribución tiene orden finito. En caso de que no exista un tal m, la distribución es de orden infinito.*

2.3. Ejemplos

Los siguientes funcionales son distribuciones.

1. **delta**: sea $x_0 \in \mathbb{R}^d$, luego $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$. ¿orden finito?

   Completar

2. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, luego $T_f(\varphi) := \int\limits_{\Omega} \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$. T_f es de orden cero.

   Completar

3. $T(\varphi) = \mathrm{PV} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} dx := \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \dfrac{\varphi(x)}{x} dx$. (valor principal)

   Completar

4. $T(\varphi) = \mathrm{PV} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \dfrac{\varphi(x)}{x} dx$.

   Completar

5. $T(\varphi) = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \left[\int\limits_{\epsilon}^{\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^2} dx - \dfrac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\log(\epsilon) \right]$.

   Completar

6. $T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) log(\varepsilon) \right]$.

Completar

7. $T(\varphi) = \text{PV} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$.

Completar

8. Sea μ una medida en los borelianos tal que $\mu(K) < \infty$ si $K \subset\subset \mathbb{R}^d$. Luego, $T_\mu(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu$.

Completar

9. **deltas de Heisenberg**: $\delta^+ = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\delta^- = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Completar

10. $\langle T, \varphi \rangle = \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(x, 0) \; dx$, $\forall \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Completar

11. Si $\Omega = (0, 1)$, la distribución dada por $T(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(\frac{1}{k})$ tiene orden infinito.

Completar

12. La aplicación $\varphi \longrightarrow \varphi(0) + \varphi'(1) + \cdots + \varphi^{(n)}(n) + \dots$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, define una distribución de orden infinito.

Completar

Definición 5. *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T = T_f$, es decir,*

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

entonces T se dice distribución ***regular****.*

Proposición 1. *La aplicación*

$$L^1_{loc} \to \mathcal{D}'$$
$$f \mapsto T_f$$

es lineal e inyectiva.

Demostración.

Completar

¿Qué se puede decir de la continuidad?

□

Observación 11. *Este resultado justifica la identificación usual de la función f con la distribución T_f. En otras palabras, el espacio L^1_{loc} es identificado con el subespacio vectorial $\{T_f : f \in L^1_{loc}\} \subset \mathcal{D}'$ y así directamente f es vista como una distribución. Pero conviene ser cuidadosos con esto pues claramente no es lo mismo la función 1, constantemente igual a 1 en todo su dominio, que la distribución 1 que es igual a la integración de funciones test.*

Proposición 2. *La distribución δ no es una distribución regular.*

Demostración.

Completar

□

2.4. Convergencia en distribuciones

La topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se define a partir de una familia de seminormas. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} p_\varphi : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ T & \to & p_\varphi(T) = |T(\varphi)| . \end{array}$$

Los entornos se definen por linealidad a partir de los entornos del cero. Entonces, si $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, se tiene un entorno de cero con $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n > 0$,

$$\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) / p_{\varphi_i}(T) < \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) / |T(\varphi_i)| < \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

En esta topología, si $T_n \to 0$, pensando en el entorno de cero $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) / |T(\varphi)| < \epsilon\}$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geqq n_0 \Rightarrow |T_n(\varphi)| < \epsilon.$$

Por lo que

$$T_n(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \varphi \in D(\Omega) .$$

Definición 6. *Una sucesión* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ *converge a* T *en* $\mathcal{D}'$ *si para cada* $\varphi \in \mathcal{D}$ *se tiene*

$$(T_j, \varphi) \to (T, \varphi) .$$

Este tipo de convergencia, definida sin hacer referencia a la topología en el espacio $\mathcal{D}$, se llama convergencia débil. Sin embargo, se puede probar que esta es la noción de convergencia asociada a la «topología fuerte» en $\mathcal{D}'$ (ver [14, 4]).

Ejemplo 6. *La delta de Dirac es el límite del núcleo de Picard:* $K_n(x) = \frac{1}{2} n e^{-n|x|}$*, entendiendo a ésta como la distribución regular que define.*

Completar

Observación 12. *Esto muestra que las distribuciones regulares no son un subespacio cerrado en* $\mathcal{D}$*.*

Razonando de forma análoga a la del ejemplo anterior, podemos probar el siguiente:

Lema 7. *Sea* $\{f_n\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ *tal que*

- $\int f_n(x)dx = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $x\, f_n(x) \in L^1$, $\forall n$ *y* $x\, f_n(x) \longrightarrow 0$ *en* L^1.

Entonces, $T_{f_n} \longrightarrow \delta$ *en* $\mathcal{D}'$*.*

Demostración.

Completar

□

De esta forma, podemos probar que otro núcleo converge a δ.

Ejemplo 7 (Núcleo de Stieltjes). *Sea* $K_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{n}{e^{nx} + e^{-nx}}$.

Completar

A continuación vemos otro resultado para probar convergencia a la distribución δ.

Lema 8. *Sea* $\{g\} \in L^1(\mathbb{R})$ *continua tal que*

- $\int g(x)dx = 1$
- $g(x) \geq 0, \forall x$

Entonces, $\lim\limits_{n \to +\infty} ng(nx) = \delta(x)$ *en* $\mathcal{D}'$.

Demostración. Completar

□

Ejemplo 8 (Núcleo de Fejér). *Sea* $K_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1-cos(nx)}{nx^2}$. *Usaremos el lema anterior para probar que* K_n *converge a* δ.

Completar

Definición 7. *Un operador* $h : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ *se dice continuo si preserva la convergencia débil, es decir, si* $(h(T_j), \varphi) \to (h(T), \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, *siempre que* $(T_j, \varphi) \to (T, \varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

2.5. Soporte de una distribución

Definición 8. *Sea* K *un subconjunto de* $\mathbb{R}^d$ *y sea* $\mathcal{A} = \{O_i : i \in I\}$ *un cubrimiento abierto de* K. *Una* $\mathcal{C}^k$ ***partición de la unidad*** *en* K *subordinada a* $\mathcal{A}$, *donde* $k \in \mathbb{N}_0$, *es una colección finita de funciones,* $\varphi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *con* $1 \leqq j \leqq l$, *tal que*

I. $\varphi_j \in \mathcal{C}^k$ *para* $1 \leqq j \leqq l$,

II. $0 \leqq \varphi_j(x) \leqq 1$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$,

III. *para cada* j *existe* $O \in \mathcal{A}$ *tal que* $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset O$,

IV. $\sum\limits_{j=1}^{l} \varphi_j(x) = 1$ *para* $x \in K$.

Teorema 4. *Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^d$ y cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de K, existe una $\mathcal{C}^\infty$ partición de la unidad subordinada a $\mathcal{A}$.*

Demostración.
Sean $\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos $\beta_{a,b}$ como sigue:

$$\beta_{a,b}(x) = \alpha(x-a)\,\alpha(b-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por los lemas previos, $\beta_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathtt{supp}\,\beta_{a,b} = [a,b]$.
Además, siendo

$$\gamma_{a,b}(x) = \frac{\int\limits_a^x \beta_{a,b}(t)dt}{\int\limits_a^b \beta_{a,b}(t)\;dt},$$

por el mismo lema, $\gamma_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y vale que

$$\gamma_{a,b}(x) = 0, \text{ si } \; x \leq a \quad \wedge \quad \gamma_{a,b}(x) = 1, \text{ si } \; x \geq b.$$

Ahora, para el caso en que $d = 1$, es decir $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$, consideremos a', b' tales que $a' < a < b < b'$ y definamos $h_{a',b',a,b}(x)$ tal que

$$h_{a',b',a,b}(x) := \gamma_{a',a}(x)\,\gamma_{-b',-b}(-x) = \frac{\int\limits_{a'}^x \beta_{a',a}(t)dt}{\int\limits_{a'}^a \beta_{a',a}(t)\;dt}\,\frac{\int\limits_{-b'}^{-x} \beta_{-b',-b}(t)\;dt}{\int\limits_{-b'}^{-b} \beta_{-b',-b}(t)\;dt}.$$

Se observa que

$$\begin{aligned} h_{a',b',a,b}(x) &= 0, & x &\in (-\infty, a'] \cup [b', +\infty), \\ 0 < h_{a',b',a,b}(x) &< 1, & x &\in (a', a) \cup (b, b'), \\ h_{a',b',a,b}(x) &= 1, & x &\in [a,b], \end{aligned}$$

por lo que $\mathtt{supp}(h_{a',b',a,b}) = [a', b']$. Por otro lado, al ser $h_{a',b',a,b}$ producto de funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ también pertenece a este espacio.
Si en cambio, $n \neq 1$, tomamos $a'_j < a_j < b_j < b'_j$ en $\mathbb{R}$ para $j = 1, ..., n$ y definimos B, B' rectángulos de $\mathbb{R}^n$ dados por

$$B := \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \quad ; \quad B' := \prod_{j=1}^n [a'_j, b'_j]$$

y luego las funciones

$$h_{B,B'}(x_1, ..., x_n) := \prod_{j=1}^n h_{a'_j, b'_j, a_j, b_j}(x_j),$$

resultando $h_{B,B'} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pues

(completar)

Ahora, si $x \in K$, existe un abierto $O_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in O_x$. Como O_x abierto, podemos seleccionar B_x y B'_x rectángulos como antes tales que $x \in I_x = \operatorname{int}(B_x) \subset B'_x \subset O_x$. Observemos que $\{I_x\}_{x \in K}$ es un nuevo cubrimiento abierto de K compacto, por lo que existen $x(1)$, $x(2), \ldots, x(l)$ con $l \in \mathbb{N}$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^l I_{x(i)}$.
Entonces, llamando $\psi_i := h_{B_{x(i)}, B'_{x(i)}}$ con $i = 1, ..., l$, se tiene que $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, si $x \in B_{x(i)}$, $\psi_i(x) = 1$ y $\mathtt{supp}\,(\psi_i) = B'_{x(i)} \subset O_x$ para cada i entre 1 y l.
Para concluir, definamos $\omega_1 = \psi_1$, $\omega_{k+1} = (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_k)\,\psi_{k+1}$ con $1 < k < l$.
Veamos por inducción sobre k que $\sum\limits_{j=1}^k \omega_j = 1 - \prod\limits_{j=1}^k (1-\psi_j)$.

Para $k = 1$ es inmediato, supongamos vale para $k < l$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \omega_j = \sum_{j=1}^{k} \omega_j + \omega_{k+1} \overset{HI}{=} 1 - \prod_{j=1}^{k} (1-\psi_j) + \prod_{j=1}^{k} (1-\psi_j)\, \psi_{k+1} = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1-\psi_j)\,(1-\psi_{k+1}) = 1 - \prod_{j=1}^{k+1} (1-\psi_j)\,.$$

Finalmente,

- Como $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ para todo i, por definición, $\omega_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq k \leq l$.
- $0 \leq \psi_i \leq 1$ para todo i y por lo tanto, también ω_k.
- Si $x \in K$ entonces $x \in B_{x(i)}$ para algún i entre 1 y l, por lo que $\psi_i(x) = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{l} \omega_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{l} (1-\psi_j) = 1 - 0 = 1.$$

- $\mathsf{supp}\,(\omega_k) \subset \mathsf{supp}\,(\psi_k) \subset O_k$ para todo k tal que $1 \leq k \leq l$.

Por lo tanto, $\{\omega_k\}_{k=1}^{l}$ es una C^∞ partición de la unidad en K subordinada a $\mathcal{A}$.

$\square$

Ejemplo 9. *Sea $K = [-1, 1]$, $\mathcal{O} = \{(a, b) : a = -1 \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, b = 1 \pm \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\}$ podemos hacer la siguiente $\mathcal{C}^\infty$ partición de la unidad en el compacto K subordinada al cubrimiento abierto $\mathcal{O}$:*

Completar

Definición 9. *Una distribución $T \in \mathcal{D}'$* ***se anula en un abierto*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si $\langle T, \varphi\rangle = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$ con* $\mathsf{supp}\ (\varphi) \subset \Omega$. *Esto se denota $T|_\Omega = 0$.*

Dadas dos distribuciones $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, decimos que ***coinciden en el conjunto abierto*** *Ω si $(T_1 - T_2)|_\Omega = 0$.*

Lema 9. *Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sea $\mathcal{W} = \cup\{\mathcal{O}$ abierto de $\Omega\ /\ T = 0$ en $\mathcal{O}\}$. Entonces $T = 0$ en $\mathcal{W}$.*

Demostración.
Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\mathsf{supp}\,\varphi \subset \mathcal{W}$, veamos que $T(\varphi) = 0$.

Consideremos $K \subset\subset \mathcal{W}$ tal que $\mathsf{supp}\,\varphi \subset K$. Como $\mathcal{A} = \{\mathcal{O}$ abierto de $\Omega\ /\ T = 0$ en $\mathcal{O}\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{W}$, se tiene un subcubrimiento finito, esto es, $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{O}_j$.

Por el teorema 4, tenemos funciones ψ_j, $j = 1, \cdots, l$, tales que $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\mathsf{supp}\,\psi_j \subset \mathcal{O}_j$ y $\sum_{j=1}^{l} \psi_j(x) = 1$, $x \in K$.

Luego, si $x \in \mathsf{supp}\,\varphi$, $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{l} \psi_j(x)\varphi(x)$ y $\psi_j\varphi \in \mathcal{D}$ con $\mathsf{supp}\ \psi_j\varphi \subset \mathsf{supp}\ \psi_j \subset \mathcal{O}_j$ para todo j entre 1 y l. Entonces, como T es lineal y se anula en cada $\mathcal{O}_j$ por hipótesis, obtenemos que

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \sum_{j=1}^{l} \psi_j\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{l} \langle T, \psi_j\varphi\rangle = 0.$$

Con lo cual, resulta $T = 0$ en $\mathcal{W}$.

$\square$

Definición 10. *Dada $T \in \mathcal{D}'$ el* ***soporte*** *de T, notado* $\mathrm{supp}\,(T)$*, es el complemento del mayor conjunto abierto $\mathcal{W}$ en donde T se anula. En otras palabras,*

$$\mathrm{supp}\,(T) = \mathbb{R}^d \setminus \cup\{\Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ abierto} \,/\, T\mid_\Omega = 0\}.$$

Ejemplo 10. *El soporte de la distribución δ_{x_0} es $\{x_0\}$.*

Completar

Observación 13. *El conocimiento de los valores de φ en el soporte de una distribución T no es en general suficiente para calcular $\langle T, \varphi\rangle$. Por ejemplo, si $\langle T, \varphi\rangle = \varphi'(0)$, para calcular $\varphi'(0)$ se necesita conocer los valores de φ en un entorno de cero y es inmediato que el soporte de T se reduce al origen.*

Ejemplo 11. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x, 0)dx.$$

El soporte de T es

Completar

Ejemplo 12. *Para cada una de las siguientes distribuciones se tiene que* $\mathrm{supp}\,(T) = \mathbb{R}$.

1. $T(\varphi) = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \left[\int_\epsilon^{+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0)\, log(\epsilon) \right].$

Completar

2. $T(\varphi) = \lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \left[\int_\epsilon^{\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\log(\epsilon) \right].$

Completar

3. $T(\varphi) = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$

Completar

Proposición 3. *Si f es continua en Ω resulta* $\mathtt{supp}(f) = \mathtt{supp}\,(T_f)$.

Demostración.

Completar

□

3. Los espacios $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}^{(m)}$, $\mathcal{D}^{(m)'}$.

En este capítulo se introducen otros espacios de funciones test. Estos espacios determinarán, por dualidad, subespacios del espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$.

3.1. Los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{S}$.

Definición 11. *Sea $\mathcal{E} = \{\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} / \, \varphi \; es \; infinitamente \; suave\}$. En $\mathcal{E}$ se considera la siguiente noción de convergencia:*

> *la sucesión $\{\varphi_k\}$ **converge a** φ **en** $\mathcal{E}$ si para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, la sucesión $D^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente a $D^\alpha \varphi$ en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$.*

Definición 12. *Una función infinitamente suave $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ se dice que **decrece rápidamente en el infinito con todas sus derivadas** si para cada α, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\exists\, C = C(\alpha, \beta) > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| \leq C.$$

En $\mathcal{S}$ se considera la siguiente noción de convergencia:

> *la sucesión $\{\varphi_j\}$ converge a φ en $\mathcal{S}$ si para cada α, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ la sucesión $x^\alpha D^\beta \varphi_j(x)$ converge uniformemente a $x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ en $\mathbb{R}^d$.*

Observación 14. *El conjunto $\mathcal{S}$ de todas las funciones que decrecen rápidamente en el infinito con todas sus derivadas es un espacio vectorial.*

Completar

Proposición 4. *Dada $\varphi \in \mathcal{E}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\varphi \in \mathcal{S}$.

(b) *Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\exists\, C = C(k, \beta) > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(1 + |x|^2)^k D^\beta \varphi(x)| \leq C.$$

Demostración.

1. Supongamos que $\varphi \in \mathcal{S}$ y veamos entonces que el enunciado (b) es válido.
   Si $k \in \mathbb{N}$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, utilizando la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned} \left| (1 + |x|^2)^k D^\beta \varphi(x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |x|^{2n} D^\beta \varphi(x) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |x|^{2n} \left| D^\beta \varphi(x) \right| = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \left| x^{2n} D^\beta \varphi(x) \right|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (1 + |x|^2)^k D^\beta \varphi(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{2n} D^\beta \varphi(x) \right|. \tag{23}$$

   Como $\varphi \in \mathcal{S}$, para cada $n = 0, \ldots, k$, $\exists\, C_n = C_n(2n, \beta) > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{2n} D^\beta \varphi(x) \right| \leq C_n \Longrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (1 + |x|^2)^k D^\beta \varphi(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} C_n = C(k, \beta).$$

2. Supongamos que φ satisface (b) y veamos que entonces $\varphi \in \mathcal{S}$.

   Como sabemos que $\varphi \in \mathcal{E}$, resta probar que φ decrece rápidamente en el infinito con todas sus derivadas, es decir, si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^d$, queremos ver que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| \leq C(\alpha,\beta).$$

   Primero, observemos que si $k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^d$:

$$(1+|x|^2)^k = \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^k \geq \left(x_i^2\right)^k = x_i^{2k}, \qquad \forall\ i = 1,\ldots,n. \tag{24}$$

   Y aplicando nuestra hipótesis,

$$C(k,\beta) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |(1+|x|^2)^k D^\beta\varphi(x)| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} x_i^{2k} \left| D^\beta \varphi(x) \right|, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

   Ahora,

$$\left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| \leq |x^\alpha| \left| D^\beta \varphi(x) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{2\alpha_i} \left| D^\beta \varphi(x) \right| \right), \tag{25}$$

   entonces,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} C(\alpha_i,\beta) = C(\alpha,\beta). \tag{26}$$

$\square$

Observación 15. *Sean $P_{\alpha,\beta}(\varphi)(x) = x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ y $P_k(\varphi)(x) = (1+|x|^2)^k D^\beta\varphi(x)$, donde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\varphi \in \mathcal{S}$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Estas funciones son lineales y, además, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ *en* $\mathcal{S}$, *esto es,* $P_{\alpha,\beta}(\varphi_j)$ *converge uniformemente a* $P_{\alpha,\beta}(\varphi)$ *en* $\mathbb{R}^d$, $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d$.

(b) $P_k(\varphi_j) \longrightarrow P_k(\varphi)$ *uniformemente en* $\mathbb{R}^d$, $\forall\, k \in \mathbb{N}_0, \beta \in \mathbb{N}_0^d$.

Completar la observación

Lema 10. *Dado $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto y dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \varphi \in \mathcal{D}$ tal que*

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq 1 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\varphi(x) = 1 \qquad \forall\ x \in K,$$

$$\texttt{supp}\ (\varphi) \subset \epsilon\texttt{-entorno}(K) = \{x \in \mathbb{R}^d /\, d(x,K) < \epsilon\}.$$

Demostración.
Si consideramos la función dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases},$$

resulta que las funciones

$$\rho_j(x) = \frac{j^n}{c}\,\rho(jx), \quad j \in \mathbb{N} \qquad \text{donde} \quad c = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx,$$

satisfacen $\rho_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ con $\mathtt{supp}\ (\rho_j) = \{x \in \mathbb{R}^d / \, |x| \leq 1/j\}$ pues ...

Además, considerando la sustitución $y = jx$, resulta

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_j(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{j^d}{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx} \rho(jx)\, dx = \frac{j^d}{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx} \frac{1}{j^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\, dy = 1.$$

Sea $\chi(x)$ la función característica del conjunto $K_\epsilon = \frac{\epsilon}{3} - entorno(K)$.
Sean

$$\varphi_j(x) = (\chi * \rho_j)(x) = \int\limits_{K_\epsilon} \rho_j(x-y)\, dy = \frac{j^d}{c} \int\limits_{|y|\leq 1/j} \chi(x-y)\, \rho(jy)\, dy, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\exists\ j_0 \in \mathbb{N}$ tal que φ_{j_0} satisface las propiedades del lema. En efecto, $\varphi_j(x)$ está bien definida para cualquier $x \in \mathbb{R}^d$. Más aún,

$$0 \leq \varphi_j(x) \leq \int \rho_j(x-y)\, dy = 1.$$

Como podemos diferenciar bajo la integral, por ser funciones en $\mathcal{D}$, resulta φ_j infinitamente suave.
Ahora, dado $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$d(x-y, K) \leq d(x-y, x) = |y|\,.$$

Luego, $\exists\ j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/j_0 < \epsilon/3$, entonces $d(x-y,K) < \epsilon/3$ si $x \in K$ y $|y| \leq 1/j_0$, con lo cual, $x - y \in K_\epsilon$ si $x \in K$ y $|y| \leq 1/j_0$.
Entonces, dado $x \in K$,

$$\varphi_{j_0}(x) = \int\limits_{|y|\leq 1/j_0} \chi(x-y)\, \rho_{j_0}(y)\, dy = \int \rho_{j_0}(y)\, dy = 1,$$

pues $(x-y) \in K_\epsilon$, $\forall\ |y| \leq 1/j_0$, con lo cual, $\chi(x-y) = 1$.
Respecto al soporte de φ_{j_0}, como dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$ tenemos

$$|d(z_1,K) - d(z_2,K)| \leq |z_1 - z_2|\,,$$

si $x \notin \frac{2\epsilon}{3} - entorno(K)$, observemos que $|y| = |x-(x-y)| \geq |d(x,K) - d(x-y,K)| \geq d(x,K) - d(x-y,K)$, con lo cual,

$$d(x-y,K) \geq d(x,K) - |y| > \frac{2\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3},$$

pues $|y| \leq 1/j_0 < \epsilon/3$ y $d(x,K) \geq 2\epsilon/3$.
Por lo tanto, $\chi(x-y) = 0$ cuando $x \notin \frac{2\epsilon}{3} - entorno(K)$, $|y| \leq 1/j_0$. Luego, $\varphi_{j_0}(x) = 0$, con lo cual, $\mathtt{supp}\ (\varphi_{j_0}) \subset \epsilon - entorno(K)$.
Esto completa la prueba del lema.

□

Teorema 5. *Valen las siguientes inclusiones densas y continuas:*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$$

Demostración.
Primero observemos que como conjuntos, $\mathcal{D}$ está contenido en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ está contenido en $\mathcal{E}$. Luego, las inclusiones están bien definidas.
Luego observemos que la convergencia en $\mathcal{D}$ es más fuerte que la de $\mathcal{S}$ y que ésta, a su vez, es más fuerte que la de $\mathcal{E}$. Por lo tanto, las inclusiones resultan continuas.

Completar?

Así, solo resta probar que cada espacio es denso en el siguiente.

Veamos que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$.

Sea $\psi \in \mathcal{D}$ una función que satisface:

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\psi(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1 \ \wedge \ \psi(x) = 0 \text{ si } |x| > 2,$$

el lema 10 asegura la existencia de tal función, considerando $K = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, |x| \leq 1\}$. Definamos

$$\psi_j(x) = \psi(x/j).$$

Dada $\varphi \in \mathcal{S}$ afirmamos que la sucesión $\{\varphi\,\psi_j\} \subset \mathcal{D}$ converge a φ en $\mathcal{S}$.

Para probar esta afirmación, necesitamos mostrar que dados α, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ la sucesión $\{x^\alpha D^\beta\left[\varphi(\psi_j - 1)\right]\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}^d$. En efecto, si $\beta \neq 0$ usando la regla de Leibniz, podemos escribir:

$$x^\alpha D^\beta\left[\varphi(\psi_j - 1)\right](x) = (\psi_j - 1)(x) x^\alpha D^\beta \varphi(x) + \sum_{0<\gamma\leq\beta} \mathcal{C}_\gamma x^\alpha D^{\beta-\gamma}\varphi(x) \left(\frac{1}{j}\right)^{|\gamma|} D^\gamma \psi\left(\frac{x}{j}\right).$$

Si $\beta = 0$, solo tenemos el primer término en la expresión anterior. Por lo tanto, es suficiente estudiar el caso $\beta \neq 0$.

Como $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\psi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, cada término en la suma puede ser estimado como

$$\left(\frac{1}{j}\right)^{|\gamma|} \mathcal{C}_\gamma \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha D^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right|}_{\leq C(\alpha,\beta-\gamma)} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\gamma \psi(x)|}_{\leq C(0,\gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}}{j^{|\gamma|}}$$

donde la constante $\mathcal{C}$ no depende de j. Luego, el segundo término converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}^d$ cuando j tiende a ∞.

Consideremos el primer término.

Como φ decrece rápidamente con todas sus derivadas, existe $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| = 0$. Por otro lado, $1 - \psi_j(x) = 0$ si $|x| \leq j$, pues $\psi_j(x) = 1$ si $|x| \leq j$, y $1 - \psi_j(x) \leq 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$, pues $0 \leq \psi_j(x) \leq 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d$. Por lo tanto,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left[1 - \psi_j(x)\right] \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \leq \sup_{|x|>j} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \longrightarrow 0,$$

cuando $j \to \infty$. Luego, $x^\alpha D^\beta\left[\varphi\left(\psi_j - 1\right)\right] \longrightarrow 0$ uniformemente.

Hemos probado que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$.

Finalmente, para probar que $\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{E}$ es suficiente probar que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{E}$. Para esto veamos que $\forall\, \varphi \in \mathcal{E}, \psi_j\varphi \to \varphi$ en $\mathcal{E}$, cuando $j \to \infty$, donde la sucesión $\{\varphi\,\psi_j\} \subset \mathcal{D}$ es la misma que consideramos en la primer parte.

En efecto, dado un compacto K de $\mathbb{R}^d$, $\exists\, j_0 = j_0(K)$ tal que $\psi_j(x) = 1$ en un entorno de K, $\forall\, j \geq j_0$.

Esto muestra que para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, la sucesión $\{D^\alpha(\varphi\,\psi_j)\}$ convergerá uniformemente a $D^\alpha\varphi$ en K, en forma trivial.

Esto completa la prueba del teorema.

□

3.2. Los espacios $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{E}'$.

Definición 13. *Un operador lineal $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es llamado una* ***distribución temperada****, si es continuo en el sentido usual, es decir,*

$$(T, \varphi_j) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad \varphi_j \to 0 \quad \textit{en } \mathcal{S}.$$

El conjunto de todas las distribuciones temperadas se indica como $\mathcal{S}'$.

Observación 16. *$\mathcal{S}'$ es un espacio vectorial. Además, se puede ver como un subconjunto de $\mathcal{D}'$ considerando la restricción de cada $T \in \mathcal{S}'$ a $\mathcal{D}$.*

Completar

Ejemplo 13. *Sea $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que existe un $N \in \mathbb{N}$ para el cual $u(x) = \mathcal{O}(|x|^N)$, cuando $|x| \to \infty$. Entonces $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Completar

Definición 14. *Sea $\mathcal{E}'$ el espacio de todos los operadores lineales y continuos $T : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$.*

Observación 17. *Por restricción, los operadores en $\mathcal{E}'$ definirán distribuciones que son temperadas. Sin embargo, con el siguiente teorema se puede ir más lejos en la descripción del espacio.*

Teorema 6. *$\mathcal{E}'$ puede ser identificado con el subespacio de $\mathcal{D}'$ de todas las distribuciones con soporte compacto.*

Demostración.
Sea $\mathcal{K} = \{T \in \mathcal{D}' / \texttt{supp}\ (T)$ es compacto$\}$ consideremos la restricción

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{r} \mathcal{D}'$$

$$T \mapsto T\Big|_{\mathcal{D}}.$$

Mostraremos que esta aplicación es una biyección de $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{K}$. Primero, está bien definida pues ...

Si $T \in \mathcal{E}'$, entonces $T_1 = T\Big|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{K}$. En efecto, si $\texttt{supp}\ (T_1)$ no fuera compacto, entonces dado $k = 1, 2, \ldots,$ $\exists\ \varphi_k \in \mathcal{D}$ con $\texttt{supp}\ (\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^d / |x| \geq k\}$ y $(T_1, \varphi_k) \neq 0$. Podemos asumir $(T_1, \varphi_k) = 1$. Puesto que $\varphi_k = 0$ en $|x| \leq k$, la sucesión $\{\varphi_k\}$ converge a 0 en $\mathcal{E}$. Deducimos que $(T, \varphi_k) = (T_1, \varphi_k)$ debe converger a 0 cuando $k \to \infty$, pero $(T_1, \varphi_k) = 1$. Entonces $T_1 \in \mathcal{K}$.

Veamos que r es inyectivo. Dada $\varphi \in \mathcal{E}, \exists\ \{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{E}$, de acuerdo al teorema anterior. Dado $T \in \mathcal{E}'$, si $r(T) = 0$, entonces

$$(T, \varphi) = \lim_{j \to \infty} (T, \varphi_j) = \lim_{j \to \infty} (r(T), \varphi_j) = 0.$$

Luego, $T = 0$.

Veamos ahora que r es sobreyectivo. Es suficiente definir una aplicación $e : \mathcal{K} \to \mathcal{E}'$ tal que $r \circ e = id$ en $\mathcal{K}$.

Dado $T \in \mathcal{K}$, sea $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha = 1$ en un entorno de $\texttt{supp}\ (T)$.

Para $\varphi \in \mathcal{E}$, definimos el operador $(T_2, \varphi) := (T, \alpha\varphi)$. Tenemos que $\alpha\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ y, además, $T_2 \in \mathcal{E}'$, pues si $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{E}$ entonces $\alpha\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$ y, por lo tanto, $(T_2, \varphi_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Observemos que la definición de T_2 no depende de la elección de α. De hecho, sean $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, tales que ambas valen 1 en un entorno de $\texttt{supp}\ (T)$, será $\alpha - \beta = 0$ en $\texttt{supp}\ (T)$, entonces $\texttt{supp}\ (T) \cap \texttt{supp}\ (\alpha - \beta) = \emptyset$. Por lo tanto, tenemos que $(T, (\alpha - \beta)\varphi) = 0$, es decir, $(T, \alpha\varphi) = (T, \beta\varphi)$.

Sea

$$\mathcal{K} \xrightarrow{e} \mathcal{E}'$$

$$T \to T_2,$$

vimos que este mapeo está bien definido.

Finalmente, mostraremos que $r \circ e = id$ en $\mathcal{K}$, esto es, $(r \circ e(T), \varphi) = (T, \varphi),\ \forall\ T \in \mathcal{K},\ \varphi \in \mathcal{D}$.

Dados $T \in \mathcal{K}$ y $\varphi \in \mathcal{D}$, si seleccionamos $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha = 1$ en un entorno de $\texttt{supp}\ (\varphi) \cup \texttt{supp}\ (T)$, tendremos,

$$(r \circ e(T), \varphi) = (e(T), \varphi) = (T, \alpha\varphi) = (T, \varphi).$$

Esto completa la prueba.

□

Observación 18. *La prueba anterior, también muestra que la restricción y la extensión del mapeo son continuas.*

Completar

3.3. Los espacios $\mathcal{D}^{(m)}$ y $\mathcal{D}^{(m)'}$.

Definición 15. *Dado $m \in \mathbb{N}_o$,*

$$\mathcal{D}^{(m)} = \{\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \ / \ \varphi \in \mathcal{C}^m \ , \ \texttt{supp}\ (\varphi) \ \ \textit{es compacto}\}.$$

Una sucesión $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}^{(m)}$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}^{(m)}$ si $\exists\ K \subset \mathbb{R}^d$ compacto tal que $\texttt{supp}\ (\varphi_j) \subset K\, \forall\, j \in \mathbb{N}$ y

$$D^\alpha \varphi_j \xrightarrow{c.u.} D^\alpha \varphi \text{ en } \mathbb{R}^d, \quad \text{para cada } |\alpha| \leq m.$$

Observación 19. *Es claro que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^{(m)}$, donde la inclusión es continua. Además, mediante el uso de funciones regularizadoras, puede probarse que la inclusión es densa.*

Observación 20. *Denotaremos $\mathcal{D}^{(m)'}$ al espacio espacio dual de $\mathcal{D}^{(m)}$, esto es, el espacio de todos los funcionales lineales y continuos $T : \mathcal{D}^{(m)} \to \mathbb{C}$.*

Debido a la inclusión continua $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)}$, los operadores en $\mathcal{D}^{(m)'}$ definen distribuciones en $\mathcal{D}'$ por restricción.

Además, podemos identificar a $\mathcal{D}^{(m)'}$ con un subespacio de $\mathcal{D}'$:

Teorema 7. *Los espacios $\mathcal{D}^{(m)'}$ y $\mathcal{D}'^{(m)}$ se pueden identificar.*

Demostración.

La demostración de este resultado es similar a la demostración del teorema anterior.

Mostraremos que la aplicación restricción $r : \mathcal{D}^{(m)'} \to \mathcal{D}'$ es una biyección de $\mathcal{D}^{(m)'}$ sobre $\mathcal{D}'^{(m)}$.

Por un lado, dado $T \in \mathcal{D}^{(m)'}$, la restricción $r(T) = T\Big|_{\mathcal{D}} = T_1 \in \mathcal{D}'$ pues $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)}$. Además, T_1 satisface la condición (22), para este m, independientemente del compacto K. De hecho, si esto no fuera así, podríamos hallar un compacto $K \subset \mathbb{R}^d$ y una sucesión $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(K)$ tal que, como en la demostración del teorema 3,

$$1 = |(T_1, \varphi_j)| > j \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi_j(x)|.$$

De esta desigualdad, concluimos que $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}^{(m)}$. Sin embargo, $(T_1, \varphi_j) \nrightarrow 0$, pues $|(T_1, \varphi_j)| = 1$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo. Así, $T_1 \in \mathcal{D}'^{(m)}$ y la imagen de r está contenida en $\mathcal{D}'^{(m)}$.

Veamos ahora que r es biyectivo.

Resulta inyectivo por la inclusión densa $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)}$. En efecto, dados $T \in \mathcal{D}^{(m)'}$ y $\varphi \in \mathcal{D}^{(m)}$, existe una sucesión $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\varphi_j \to \varphi$ en $\mathcal{D}^{(m)}$, con lo cual, si $r(T) = T\Big|_{\mathcal{D}} = 0$ entonces

$$(T, \varphi) = \lim_{j \to \infty} (T, \varphi_j) = \lim_{j \to \infty} (r(T), \varphi_j) = 0.$$

Luego, $T = 0$.

Nuevamente, para probar que es sobreyectivo, es suficiente construir una extensión $e : \mathcal{D}'^{(m)} \to \mathcal{D}^{(m)'}$ tal que $r\, o\, e = id$ en $\mathcal{D}'^{(m)}$.

Dado $T \in \mathcal{D}'^{(m)}$, por definición, T satisface las condiciones (22) con este m, independientemente del compacto K. Ahora, dado $\varphi \in \mathcal{D}^{(m)}$, sea $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}$ una sucesión tal que $\varphi_j \to \varphi$ en $\mathcal{D}^{(m)}$, (la cual existe por la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}^{(m)}$) tenemos que, por la condición (22), la sucesión $\{(T, \varphi_j)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, con lo cual, resulta convergente.

Luego, definimos el operador $e(T)$ como

$$(e(T), \varphi) = \lim_{j \to \infty} (T, \varphi_j).$$

Esta definición no depende de la sucesión que aproxima a $\varphi \in \mathcal{D}^{(m)}$. En efecto, si $\varphi_j \to \varphi$ y $\psi_j \to \varphi$, por la continuidad de T en $\mathcal{D}$ tenemos que

$$(T, \varphi_j - \psi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \lim_{j \to \infty} (T, \varphi_j) = \lim_{j \to \infty} (T, \psi_j).$$

Además, $e(T) \in \mathcal{D}^{(m)'}$. De hecho, $e(T)$ es lineal por la definición y la linealidad del límite. Ahora, si $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{D}^{(m)}$, $\varphi_j \in \mathcal{D}$, de la condición (22) tenemos que

$$|(T, \varphi_j)| \le C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \le m}} |D^\alpha \varphi_j(x)| \longrightarrow 0$$

con C, m independientes de j. Así, tomando límite cuando $j \to \infty$, obtenemos que $e(T)$ es continuo en $\mathcal{D}^{(m)}$. Esto es, $e(T) \in \mathcal{D}^{(m)'}$.

Finalmente, veremos que $r \, o \, e(T) = T$. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, podemos tomar $\varphi_j = \varphi \; \forall \, j$, para aproximar φ. Así,

$$(r \, o \, e(T), \varphi) = (e(T), \varphi) = (T, \varphi), \; \forall \, \varphi \in \mathcal{D}.$$

Por lo tanto, r es biyectivo.

□

Observación 21.

1. *La prueba del teorema anterior muestra que una aplicación lineal* $T : \mathcal{D}^{(m)} \to \mathbb{C}$ *pertenecerá a* $\mathcal{D}^{(m)'}$ *si y sólo si* $\exists \, C = C(K) > 0$ *tal que*

$$|(T, \varphi)| \le C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \le m}} |D^\alpha \varphi(x)|, \; \forall \, \varphi \in \mathcal{D}^{(m)}.$$

2. *Del teorema anterior también podemos deducir que las distribuciones de orden cero son exactamente las operaciones que extienden a aplicaciones lineales y continuas de* $\mathcal{D}^{(0)}$ *en* $\mathbb{C}$. *De acuerdo con el Teorema de Representación de Riesz, estas aplicaciones están en una correspondencia biyectiva con las medidas de Radon. Esto es, dado* $T \in \mathcal{D}^{(0)'}$, $\exists!$ *medida de Radon* μ *a valores complejos tal que*

$$(T, \varphi) = \int \varphi \, d\mu, \quad \forall \; \varphi \in \mathcal{D}^{(0)}.$$

Luego, en este contexto, la palabra medida se refiere tanto al conjunto de funciones como a los funcionales lineales y continuos en $\mathcal{D}^{(0)}$.

Proposición 5. *Valen las siguientes inclusiones continuas:*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}).$$

Demostración.

Que $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ continuamente lo probamos en el teorema 5. Nos queda ver que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ y que esta inclusión es continua.

Si $p = \infty$, la inclusión es trivial.

Supongamos $1 \le p < \infty$, sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; por definición, existen $C_0 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^0 \varphi(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \le C_0 \quad \text{y} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^2 \varphi(x) \right| \le C_2.$$

Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$(1+x^2)\,|\varphi(x)| = \,|\varphi(x)| + x^2\,|\varphi(x)| \leq C_0 + C_2.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p \;dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{[(1+x^2)\;|\varphi(x)|]^p}{(1+x^2)^p}\,dx \leq (C_0+C_2)^p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^p}}_{=D<\infty} < \infty.$$

Esto es, $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$.

Además, si $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{S}$, en particular,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_j(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{y} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^2\varphi_j(x)\right| \longrightarrow 0.$$

Y, por lo anterior, tenemos que $\varphi_j \in L^p(\mathbb{R})$ y

$$\|\varphi_j\|_{L^p} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_j(x)|^p \;dx \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_j(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^2\varphi_j(x)\right|\right] D \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, la inclusión resulta continua. $\square$

Analizar si esta última demostración no quedaría más sencilla utilizando la proposición 4 y la observación 15

4. Operaciones con distribuciones.

4.1. Derivada de una distribución

Definición 16. *Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Se define la derivada $j-$ésima de T como la función*

$$\begin{aligned} \partial_j T : \mathcal{D}(\omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\to \langle \partial_j T, \varphi \rangle = - \ \langle T, \partial_j \varphi \rangle = - \ \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle . \end{aligned} \tag{27}$$

Proposición 6.

-a- $\partial_j T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

-b- *El operador $T \to \partial_j T$ es lineal y continuo en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración. ...

Completar

□

Observación 22. *Puesto que $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ se puede derivar infinitas veces. Luego, se tiene*

$$\langle \partial_j \partial_k T, \varphi \rangle = (-1)^2 \langle T, \partial_k \partial_j \varphi \rangle .$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle .$$

Observación 23. *Puesto que todas las funciones test son infinitamente diferenciables, se define de forma análoga la derivación tanto en $\mathcal{S}'$ como en $\mathcal{E}'$.*

Lema 11. *El orden de derivación de una distribución de $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ o de $\mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ se puede modificar de cualquier forma.*

Demostración. ...

Completar

Lema 12. *Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, el operador D^α está bien definido tanto de $\mathcal{S}'$ en sí mismo como de $\mathcal{E}'$ en sí mismo.*

Demostración. ...

Completar

□

Teorema 8. *Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, el operador D^α es lineal y continuo tanto en $\mathcal{S}'$, en $\mathcal{D}'$ o en $\mathcal{E}'$. Además, si $T \in \mathcal{D}'$, $\mathtt{supp}\,(D^\alpha T) \subset \mathtt{supp}\,(T)$.*

Demostración. ...

Completar

□

Proposición 7. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ una serie de distribuciones que converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Entonces para $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $D^\alpha T = \sum_{n=1}^{\infty} D^\alpha T_n$, es decir, puede ser diferenciada término a término donde la serie de derivadas también converge en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demostración. ...

Completar

□

Ejemplo 14. *Si consideramos la delta de Dirac, resulta*

$$\langle \delta', \varphi \rangle \;=\; -\langle \delta, \varphi' \rangle \;=\; -\varphi'(0),$$

y

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle \;=\; (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, la derivada n-ésima de la delta de Dirac tiene orden n.

Completar

Ejemplo 15. *Considerando la función de Heaviside,*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}),$$

se tiene que

$$T_H' =$$

Completar

Ejemplo 16. *Considerando la función valor absoluto,*

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0, \\ -x & x \leq 0, \end{cases}$$

calculemos las sucesivas derivadas de la distribución regular $T_{|x|}$, con $|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Completar

Lema 13. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ entonces $T_{f'} = (T_f)'$. Esta igualdad también se verifica para una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ con $f' \in \mathcal{SC}$, es decir, por ejemplo considerando un solo punto de discontinuidad x_0, $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \backslash x_0)$ y existen finitos los límites laterales $f'\left(x_0^-\right)$ y $f'\left(x_0^+\right)$.*

Demostración. ...

Completar

□

Lema 14. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \backslash \{x_0\})$ con saltos finitos, es decir, tal que existen finitos los límites laterales $f\left(x_0^-\right)$ y $f\left(x_0^+\right)$ y también $f'\left(x_0^-\right)$ y $f'\left(x_0^+\right)$. Entonces*

$$(T_f)' = T_{f'} + Sf(x_0)\delta_{x_0},$$

donde $Sf(x_0) = f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)$.

Demostración. ...

Completar

□

Corolario 2. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_n\})$ con saltos finitos, es decir, tal que existen finitos los límites laterales $f(x_i^-), f(x_i^+), f'(x_i^-), f'(x_i^+)$ $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Entonces*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} Sf(x_i)\delta_{x_i},$$

donde $Sf(x_i) = f(x_i^+) - f(x_i^-)$, para $k = 1, \ldots, n$.

Demostración. ...

Completar

□

Lema 15. *Sea* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ *con saltos finitos. Entonces*

$$(T_f)'' = T_{f''} + Sf(x_0)\delta'_{x_0} + Sf'(x_0)\delta_{x_0}.$$

Demostración. ...

Completar

□

Ejemplo 17. *Sea* f *de variación acotada en* $\mathbb{R}$*, continua a izquierda, y sea* μ_f *la medida definida en los borelianos de* $\mathbb{R}$ *por* $\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a)$*. (¿seguro define una medida?¿cuál?). Considerando* T_{μ_f} *la distribución dada por dicha medida (¿seguro define una distribución?), se tiene*

$$(T_f)' = T_{\mu_f},$$

pues ...

Por ejemplo, si f *es la función parte entera, entonces ...*

Completar

Ejemplo 18. *Como* $\ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$*,* $T_{\ln|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*. Luego se tiene*

$$\left(T_{\ln|x|}\right)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),$$

pues ...

Completar

Ejemplo 19. *Sea* G *dominio acotado de* $\mathbb{R}^2$ *tal que intersecta con cualquier paralela a los ejes a lo sumo dos veces. Sea* $f|_{\overline{G}} \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$*,* $\mathtt{supp}(f) \subset \overline{G}$ *y* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$*. Entonces,*

$$\partial_1 T_f = ...$$

Completar

Ejemplo 20. *Sea G dominio acotado de $\mathbb{R}^3$. Sea $f|_{\overline{G}} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{G}\right)$ con $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{G}$. Entonces resulta*

$$\partial_1 T_f = ...$$

Completar

Ejemplo 21. *Sea G dominio acotado de $\mathbb{R}^3$. Sea $f|_{\overline{G}} \in \mathcal{C}^2\left(\overline{G}\right)$ con $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{G}$. Entonces resulta*

$$\partial_1^2 T_f = D^{(2,0)} f = ...$$

Completar

Ejemplo 22. *Sea en $\mathbb{R}^3$, $f(x) = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right)$ pues ...*

Luego, se tiene que

$$\Delta T_f = ...$$

Completar

Teorema 9. *Sea $a \in \mathbb{R}^d$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de a. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(T) = \{a\}$ entonces T tiene orden finito y es una combinación lineal de δ_a y sus derivadas hasta cierto orden, es decir,*

$$\exists\ k \in \mathbb{N}_0 \ /\ T = \sum_{|\alpha| \leqq k} c_\alpha D^\alpha \delta_a, \ \text{con } c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} T\left(x \mapsto (a-x)^\alpha\right).$$

Demostración. Supongamos que $a = 0$, los demás casos pueden probarse de manera similar.

Completar

$\square$

Ejemplo 23. *Si C es el cono de $\mathbb{R}^2$ definido por $v^2y^2 - x^2 \geq 0$, $y \geq 0$ donde $v > 0$ constante y $T = \chi_C$, entonces*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k\delta, \quad \text{con } k \text{ constante.}$$

Completar

Ejemplo 24. *Consideremos la función $f(x) = |\cos x|$, se tiene que para toda φ en $\mathcal{D}$:*

$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \dots$$

Completar

De manera análoga, puede probarse que

$$|\cos x|^{(n)} = \begin{cases} |\cos x| & n = 4k \\ g(x) & n = 4k+1 \\ -|\cos x| & n = 4k+2 \\ -g(x) & n = 4k+3 \end{cases}$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, donde g es la extensión periódica de $-\sin x$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ejemplo 25. *Sea $T = \chi_Q$ donde $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}$, consideremos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ entonces:*

$$\langle \partial_1 \partial_2 T, \varphi \rangle = \dots$$

Completar

Por otro lado, si $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ entonces:

$$\langle \partial_1 \partial_2 T, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0, \qquad \textit{pues } \mathtt{supp}\ (\varphi) \subset Q.$$

Teorema 10. *Sea $T \in \mathcal{S}'$. Entonces, existe F continua y de crecimiento lento, y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tales que $T = D^\alpha F$ en el sentido de las distribuciones.*

Ver Teorema VI, página 239 de [14].

4.2. Traslación, homotecia y producto por función

Lema 16. *Sea función $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $a \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. $f(x-a), f(\lambda x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x+a)dx$, $\varphi \in \mathcal{D}$.
3. *Si* $\lambda \neq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{1}{|\lambda|^d}\varphi(y/\lambda)dy$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Demostración. ...

Completar

□

Definición 17. *Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, para $a \in \mathbb{R}^d$ se define una **traslación** τ_a tal que*

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle ,$$

donde $\tau_{-a}\varphi(x) = \varphi(x+a)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

*Si una constante λ no nula, se define una **homotecia** dada por*

$$\left\langle T_{(\lambda)}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{|\lambda|^d} \left\langle T, \varphi_{1/\lambda} \right\rangle ,$$

donde $\varphi_{1/\lambda}(x) = \varphi(x/\lambda)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Lema 17. *Las aplicaciones traslación y homotecia están bien definidas.*

Demostración. ...

Completar

□

Lema 18. *Las aplicaciones traslación y homotecia son continuas en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración. ...

Completar

□

Proposición 8. *Sea $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. Entonces*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-h}T - T}{h_j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, d.$$

Demostración. ...

Completar

□

Definición 18. *Dadas* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, *y* $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, *se define el* ***producto por función*** *como la aplicación*

$$\begin{aligned} gT : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle . \end{aligned}$$

Lema 19. *La aplicación $T \mapsto gT$ está bien definida de $\mathcal{D}'(\Omega)$ en sí mismo y es continua.*

Demostración. ...

Completar

$\square$

Ejemplo 26. *La delta de Dirac posee las siguientes propiedades:*

1. $x\,\delta = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Completar

2. $x\,\delta' = -\delta$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Completar

3. $x^2\delta' = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Completar

4. $x\delta^{(m)} = (-1)^m m\delta^{(m-1)}$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Completar

5. $x^m\delta^{(m)} = (-1)^m m!\delta$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Completar

6. $x^n\delta^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ (-1)^n n!\delta & \text{si } m = n \\ \dfrac{(-1)^n m!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)} & \text{si } m > n \end{cases}$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Completar

7. $\sin(at)\delta'(t) = -a\delta(t)$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *donde* a *es constante.*

Completar

8. $e^{at}\delta^{(n)}(t-b) = e^{ab}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}\delta^{(k)}(t-b)$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *donde* a, b *son constantes.*

Completar

Ejemplo 27. $x \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Completar

Lema 20. *Si* T *es una distribución tal que* $xT = 1$ *entonces* $T = \operatorname{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) + c\delta$, *con* c *constante.*

Demostración. ...

Completar

□

Ejemplo 28. *Considerando $H(x)$, y sean $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$ con $\omega \neq 0$.*

- $\Big(\dfrac{\partial}{\partial x} - \lambda\Big) H(x) e^{-ix} = \dots$

Completar

- *Ahora, la derivada de* $\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\Big)\dfrac{1}{\omega} H(s)\sin(\omega x)$ *es* ...

Completar

Ejemplo 29. *Otras propiedades de la delta de Dirac son:*

- $\delta(x \cdot \mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right)) = \delta$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- $(x \cdot \delta) \cdot \mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ *en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Ejemplo 30. *Las deltas de Heisenberg satisfacen que $\delta = \delta^+ + \delta^-$.*
Además, podemos definir a la delta de Dirac como el siguiente límite:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En efecto, si utilizamos el método de integración por partes con $f(x) = \varphi(x)$ y $g'(x) = \frac{y}{x^2+y^2}$, obtenemos que $f'(x) = \varphi'(x)$ y podemos considerar $g(x) = \arctan(\frac{x}{y})$, con lo cual resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{y}{x^2+y^2}\, dx &= \lim_{y \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Big(\underbrace{\varphi(x) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) dx \Big) \\
&= - \lim_{y \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) dx \qquad (28) \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y \longrightarrow 0^+} \varphi'(x) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) dx,
\end{aligned}$$

pues, como $|\varphi'(x) \arctan \frac{x}{y}| \leq \frac{\pi}{2} |\varphi'(x)|$ y φ' es integrable por estar φ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.
Luego,

$$\begin{aligned}
(28) &= -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x) \frac{-\pi}{2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x) \frac{\pi}{2}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

pues, como supp(φ) es compacto, esta "se anula en el infinito".

Por lo tanto, la delta de Dirac puede obtenerse como

$$\delta = \lim_{y \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Luego, como $\delta = \delta^+ + \delta^-$, se puede ver que δ^+ y δ^- pueden definirse mediante los siguientes límites:

$$\langle \delta^+, \varphi \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{y \longrightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x + iy}\, dx,$$

$$\langle \delta^+, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \longrightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - iy}\, dx.$$

Proposición 9. *Dadas ϕ, una función test, y T, una distribución, si $\phi \cdot T = 0$ entonces $\langle T, \phi \rangle = 0$.*

Demostración.

Completar

□

Ejemplo 31. *Sea $\xi \in \mathbb{C}$, encontrar las soluciones $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la ecuación*

$$e^{ix\xi} u = u.$$

Completar

4.3. Derivación del producto

Al derivar el producto por una función suave se tiene una propiedad análoga a la clásica:

Proposición 10. *Si $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ entonces*

$$\partial_k(gT) = \frac{\partial g}{\partial x_k} T + g\, \partial_k T.$$

Demostración.

Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_k(gT), \varphi \rangle &= -\langle gT, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = -\langle T, g\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle T, \frac{\partial g}{\partial x_k}\varphi \rangle - \langle T, \frac{\partial}{\partial x_k}(g\varphi) \rangle \\
&= \langle \frac{\partial g}{\partial x_k} T, \varphi \rangle - \langle T, \frac{\partial}{\partial x_k}(g\varphi) \rangle = \langle \frac{\partial g}{\partial x_k} T, \varphi \rangle + \langle \partial_k T, g\varphi \rangle \\
&= \langle \frac{\partial g}{\partial x_k} T, \varphi \rangle + \langle g\partial_k T, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial g}{\partial x_k} T + g\partial_k T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 32. *Hallemos una $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la forma fH, donde H es la función Heaviside, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y*

$$a\partial^2 F + b\partial F + cF = m\delta' + n\delta, \quad a,b,c,m,n \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Completar

Proposición 11. *Dadas $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces*

$$D^\alpha(gT) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta g D^{\alpha-\beta} T. \tag{29}$$

Demostración.

Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle D^\alpha(gT), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle gT, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, gD^\alpha\varphi\rangle. \tag{30}$$

Por la fórmula de Leibniz para la derivación del producto en $\mathcal{E}(\Omega)$, tenemos que

$$D^\alpha(g\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) D^\beta g\ D^{\alpha-\beta}\varphi.$$

Luego,

$$gD^\alpha\varphi = D^\alpha(g\varphi) - \sum_{0<\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) D^\beta g D^{\alpha-\beta}\varphi.$$

Así, resulta

$$\begin{aligned}
(30) &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha(g\varphi)\rangle - (-1)^{|\alpha|}\langle T, \sum_{0<\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) D^\beta g D^{\alpha-\beta}\varphi\rangle \\
&= \langle D^\alpha T, g\varphi\rangle + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) \langle D^{\alpha-\beta} g D^\beta T, \varphi\rangle \\
&= \langle gD^\alpha T, \varphi\rangle + \langle \sum_{0<\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) D^{\alpha-\beta} g D^\beta T, \varphi\rangle \\
&= \langle \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right) D^\beta g D^{\alpha-\beta} T, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 33. *Calculemos las siguientes expresiones en el sentido de las distribuciones:*

- $(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda)H(x)e^{-ix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Completar

- $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2\right)\frac{1}{\omega}H(x)\sin(\omega x), \omega \neq 0$.

Completar

4.4. Propiedades locales de las distribuciones

Proposición 12. *Sean $u, f \in \mathcal{C}(\Omega)$, con $T_u, T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tales que $\partial_j T_u = T_f$. Entonces u es derivable en el sentido clásico y $\partial_j u = f$.*

Demostración.

- Primer caso: u tiene soporte compacto.

  Como u es continua, resulta $\mathtt{supp}\,(u) = \mathtt{supp}\,(T_u)$. Luego, T_u también tiene soporte compacto. Veamos que T_f también tiene soporte compacto, para ello probaremos que $\mathtt{supp}\,(T_f)$ está contenido en $\mathtt{supp}\,(T_u)$, luego por ser un cerrado contenido en un compacto, será compacto.

  Recordemos que $\mathtt{supp}\,(T_f) = \mathbb{R}^d \backslash \cup \{\Omega \subset \mathbb{R}^d / \, T_f \mid_\Omega = 0\}$, por lo que habremos probado la contención si vemos que vale:
  $$T_u \text{ se anula en } \Omega \Longrightarrow T_f \text{ se anula en } \Omega.$$
  Para ello, consideremos un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que T_u se anula en Ω y $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\mathtt{supp}\,\varphi \subset \Omega$. Entonces, tenemos que $\partial_j \varphi$ cumple con las mismas propiedades, resultando así, $\langle T_u, \partial_j \varphi \rangle = 0$. Luego, por la definición de derivada de una distribución, resulta $\langle \partial_j T_u, \varphi \rangle = 0$ y, por hipótesis, $T_f = \partial_j T_u$, con lo cual, $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$. Es decir, T_f se anula en Ω como queríamos ver.

  Además, como f es continua, tenemos que
  $$\mathtt{supp}\,(f) = \mathtt{supp}\,(T_f) \subset \mathtt{supp}\,(T_u) = \mathtt{supp}\,(u)$$
  y también resulta $\mathtt{supp}\,(f)$ compacto. Siendo $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una familia regularizante, consideramos u_ϵ y,
  $$u_\epsilon(x) = u * \varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \underset{\epsilon \searrow 0}{\xrightarrow{\text{c.u.}}} u(x) \,\text{en}\, \Omega.$$
  Ahora, como $\partial_j(u * \varphi) = (\partial_j u) * \varphi = u * (\partial_j \varphi)$ y $D_j^y \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = -\frac{1}{\epsilon} \partial_j \varphi$, resulta
  $$\begin{aligned}
  \partial_j u_\epsilon(x) &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \partial_j \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \frac{1}{\epsilon}\, dy = -\frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^d} u(y) D_j^y \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) dy \\
  &\overset{\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} u(y) D_j^y \varphi_\epsilon(x-y)\, dy \overset{g(y) := \varphi_\epsilon(x-y)}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \partial_j g(y)\, dy \\
  &= -\langle T_u, \partial_j g \rangle = \langle \partial_j T_u, g \rangle = \langle T_f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi_\epsilon(x-y)\, dx = f * \varphi_\epsilon(x).
  \end{aligned}$$
  Por lo tanto, $\partial_j(u * \varphi_\epsilon) = f * \varphi_\epsilon$ y, $f * \varphi_\epsilon(x) \underset{\epsilon \searrow 0}{\xrightarrow{\text{c.u.}}} f$. Luego, por la convergencia uniforme tenemos que existe $\partial_j u$ y $\partial_j u = f$.

- Segundo caso: $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ general.

  Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
  $$\partial_j(T_{\phi u}) = \partial_j(\phi T_u) = (\partial_j \phi) T_u + \phi(\partial_j T_u) \overset{\text{hip.}}{=} (\partial_j \phi) T_u + \phi T_f = T_{((\partial_j \phi) u + \phi f)}.$$
  Sean ahora $\tilde{u} = \phi u$ y $\tilde{f} = (\partial_j \phi) u + \phi f$, resultan ambas continuas y $\partial_j(T_{\tilde{u}}) = T_{\tilde{f}}$ con $\tilde{u}$ a soporte compacto, pues ϕ es a soporte compacto. Luego, por el primer caso se tiene que existe $\partial_j \tilde{u}$ y $\partial_j \tilde{u} = \tilde{f}$.

  Si $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\phi = 1$ en un entorno de x_0 (existe por el lema 4),
  $$\partial_j \tilde{u}(x_0) = \partial_j(\phi u)(x_0) = \overbrace{\partial_j \phi(x_0)}^{=0} u(x_0) + \overbrace{\phi(x_0)}^{=1} (\partial_j u(x_0)) = \partial_j u(x_0).$$
  Además,
  $$\tilde{f}(x_0) = \overbrace{(\partial_j \phi(x_0))}^{=0} u(x_0) + \overbrace{\phi(x_0)}^{=1} f(x_0) = f(x_0).$$
  Luego, como $\partial_j \tilde{u} = \tilde{f}$, resulta
  $$\partial_j u(x_0) = f(x_0), \quad \forall\, x_0 \in \Omega.$$

□

Teorema 11. *Sean $T_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{W}$ abierto en Ω tal que su clausura es compacta. Entonces existe una función f continua en $\mathcal{W}$ tal que $T_0 = \partial^\alpha T_f$ para algún multiíndice α.*

Demostración.
Como la clausura de $\mathcal{W}$ es compacta, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{W} \subset \mathcal{Q}$, donde $\mathcal{Q} = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \, 0 \leq x_i \leq 1 \; \forall \, i = 1, \ldots, d\}$ es el cubo unitario en $\mathbb{R}^n$.

Por el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$|\phi| \leq \max_{x \in \mathcal{Q}} |(D_i \phi)| \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}) \quad \forall \, i = 1, \ldots, d, \tag{31}$$

donde $D_i \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = D^\alpha \phi$ con $\alpha = e_i$, el i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^n$.

Si consideramos $S = D_1 D_2 \ldots D_n$ y, para $y \in \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}(y) = \{x \in \mathcal{Q} / \, x_i \leq y_i \; \forall \, 1 \leq i \leq d\}$, entonces

$$\phi(y) = \int_{\mathcal{Q}(y)} (S\phi)(x) \; dx \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}). \tag{32}$$

Si $N \in \mathbb{N}_0$ y aplicamos (31) a derivadas sucesivas de ϕ, obtenemos que

$$||\phi||_N = \sup_{|\alpha| \leq N, x \in \mathcal{Q}} |D^\alpha \phi(x)| \leq \max_{x \in \mathcal{Q}} |(S^N \phi)(x)| \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}).$$

Luego, de (32) resulta que

$$\max_{x \in \mathcal{Q}} |(S^N \phi)(x)| \leq \int_{\mathcal{Q}} |(S^{N+1} \phi)(x)| dx \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}). \tag{33}$$

Como $T_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, existen $N \in \mathbb{N}_0$ y C tal que

$$|\langle T_0, \phi \rangle| \leq C ||\phi||_N \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}).$$

Por lo tanto, (33) muestra que

$$|\langle T_0, \phi \rangle| \leq \int_{\mathcal{W}} |(S^{N+1} \phi)(x)| \, dx \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}). \tag{34}$$

De (32), tenemos que S es uno-a-uno en $\mathcal{Q}$, y por lo tanto, en $\mathcal{W}$. Luego, $S^{N+1} : \mathcal{D}(\mathcal{W}) \to \mathcal{D}(\mathcal{W})$ es uno-a-uno. Entonces puede definirse un funcional T_1 en el rango Y de S^{N+1} considerando

$$\langle T_1, S^{N+1} \phi \rangle = \langle T_0, \phi \rangle \quad \forall \, \phi \in \mathcal{W}$$

y (34) muestra que

$$|\langle T_1, \phi \rangle| \leq C \int_{\mathcal{W}} |\phi(x)| \, dx \quad \forall \, \phi \in Y.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach podemos extender T_1 a un funcional lineal y acotado en $L^1(\mathcal{W})$. En otras palabras, existe una función g acotada Borel en $\mathcal{W}$ tal que

$$\langle T_0, \phi \rangle = \langle T_1, S^{N+1} \phi \rangle = \int_{\mathcal{W}} g(x) (S^{N+1} \phi)(x) \, dx \quad \forall \, \phi \in \mathcal{W}. \tag{35}$$

Definiendo $g(x) = 0$ fuera de $\mathcal{W}$ y poniendo

$$f(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} g(x) \, dx_n \ldots dx_1, \; y \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, f es continua en $\mathcal{W}$, y aplicando integración por partes n veces se muestra que (35) implica

$$\langle T_0, \phi \rangle = (-1) \int_{\Omega} f(x) (S^{N+2} \phi)(x) \, dx = \langle \partial^\alpha T_f, \phi \rangle \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}),$$

con $\alpha = (N+2, \ldots, N+2)$, excepto por un posible cambio de signo.

Por lo tanto, $T_0 = \partial^\alpha T_f$, con f continua en $\mathcal{W}$.

$\square$

4.5. Integral de una distribución

Resulta complicado definir el concepto de integral definida de una distribución cualquiera, a menos que esta sea de la forma $T_f,\ f \in L^1$, por ejemplo. Más aún, no queda del todo claro a qué nos referimos con la integral de una distribución no regular.

Intuitivamente, la integral de una distribución regular T sobre un intervalo I debería ser el valor $\langle T, \chi_I \rangle$, pero χ_I no es parte del espacio de funciones test, por lo que esta expresión no tiene sentido.

Nos enfocaremos, en cambio en el cálculo de primitivas de distribuciones, cuyo análisis es más accesible.

Definición 19. *Diremos que una distribución $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es la **integral**, **primitiva** o **antiderivada** de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si $F' = T$*

Proposición 13. *Sea $T \in \mathcal{D}'$. Entonces T tiene infinitas primitivas, que son aquellas distribuciones de la forma $F + c\,\mathbb{1},\ c \in \mathbb{R}$, donde F es una primitiva de T.*

Demostración. Consideremos $\phi_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\langle \mathbb{1}, \phi_0 \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_0(x)\,dx = 1$.

Dada $\varphi \in \mathcal{D}$, podemos escribirla de la forma $\varphi = \phi + K\phi_0$, con $K = \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle$, y donde $\phi \in \mathcal{D}$ es tal que $\langle \mathbb{1}, \phi \rangle = 0$. Definimos además la función $\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt$. $\psi \in \mathcal{D}$, pues $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,dt = 0$ y $\operatorname{supp}(\phi)$ es compacto.

De este modo, se puede ver que $F \in \mathcal{D}'$ de modo que $\langle F, \varphi \rangle = -\langle T, \psi \rangle\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}'$, siguiendo la notación anterior.

Observemos que si $\theta \in \mathcal{D}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $\int\limits_{\mathbb{R}} \theta'(x)\,dx = 0$. Es decir, la constante K asociada a θ' es $K = 0$ y la representación de θ' es $\theta' = \phi + K\phi_0 = \phi$. Luego, para θ, tenemos

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \theta'(t)\,dt = \theta(x).$$

Luego,

$$\langle F', \theta \rangle = -\langle F, \theta' \rangle = \langle T, \psi \rangle = \langle T, \theta \rangle$$

Entonces F es una primitiva de T.

Sea $G \in \mathcal{D}'$ otra primitiva de T.

$$\begin{aligned}
\langle F - G, \varphi \rangle &= \langle F - G, \phi + K\phi_0 \rangle = \langle F - G, \phi \rangle + K \langle F - G, \phi_0 \rangle \\
&= \langle F - G, \psi' \rangle + c\,K = -\langle F' - G', \psi \rangle + c\,\langle \mathbb{1}, \varphi \rangle \\
&= \langle c\,\mathbb{1}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

□

Observación 24. *De este resultado se tiene que las primitivas de la distribución nula son de la forma ...*

Completar

Ejemplo 34. *Si α es una constante, la ecuación $T' = \alpha T$, $T \in \mathcal{D}'$, tiene una única solución (salvo multiplicación por constantes).*

Completar

Ejemplo 35. *Determinar todas las soluciones* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *de la ecuación*

$$x^k u = 0,$$

para $k \in \mathbb{N}$*.*

Completar

Ejemplo 36. *Determinar todas las soluciones* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *de la ecuación*

$$xu' = 0.$$

Completar

4.6. Producto Tensorial

Recordar que dadas $f, g \in \mathcal{D}$, se nota $\langle f, g\rangle := T_f(g)$ identificando a la función con la distribución regular que ella define.

Definición 20. *Dadas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ el producto puntual $f(x) \cdot g(y)$ define una nueva función $h(x, y) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{C}$, llamada* ***producto tensorial*** *y se nota $f \otimes g$.*

Es importante indicar claramente la variable con la que estamos trabajando, por lo que denotaremos $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ y $\mathcal{D}_{xy}$ a los espacios de funciones C^∞ a soporte compacto definidas en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n+m}$, respectivamente. Con $\mathcal{D}'_x$, $\mathcal{D}'_y$ y $\mathcal{D}'_{xy}$ denotaremos a los correspondientes espacios de distribuciones.

Si asumimos que las funciones f y g son localmente integrables, el producto tensorial $f \otimes g$ también sera localmente integrable en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Entonces dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle f \otimes g, \varphi\rangle &= \int f(x)g(y)\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int f(x)\Big(\int g(y)\varphi(x, y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\ &= \int g(y)\Big(\int f(x)\varphi(x, y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

donde las iteraciones valen pues ...

En el sentido de las distribuciones, podemos reescribir estas integrales como

$$\langle f \otimes g, \varphi\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y)\rangle\rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y)\rangle\rangle\,. \tag{36}$$

Tenemos que demostrar que las funciones

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y)\rangle\,, \qquad \lambda(y) = \langle f(x), \varphi(x, y)\rangle\,.$$

están en $\mathcal{D}_x$ y $\mathcal{D}_y$, respectivamente.

Esto puede hacerse directamente, sin embargo, obtendremos este resultado como consecuencia de una afirmación más general que veremos más adelante.

Observemos que cuando φ es a variable separables, en otras palabras $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, con $\alpha \in \mathcal{D}_x$ y $\beta \in \mathcal{D}_y$, se tiene

$$\langle f \otimes g, \varphi\rangle = \langle f, \alpha\rangle \langle g, \beta\rangle\,.$$

Ahora, consideremos las distribuciones $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$. Queremos definir su producto tensorial W, de tal manera que cuando las funciones de prueba φ es a variables separables, $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, se tiene

$$\langle W, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\rangle \langle S, \beta\rangle\,. \tag{37}$$

Podemos extender por linealidad a (37) al espacio de todas las funciones de la forma $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(y)$, donde $\alpha_j \in \mathcal{D}_x$, $\beta_j \in \mathcal{D}_y$. Ahora queremos extender la definición de W a espacio $\mathcal{D}_{xy}$. La viabilidad de tal extensión viene dada por el siguiente resultado, lo que también justifica (36).

Teorema 12. *Sean $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$. Entonces*

1. *Dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$, la función $\psi(x) = \langle S_y, \varphi(x, y)\rangle$ está en $\mathcal{D}_x$.*
2. *Dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$, la aplicación $\varphi \longmapsto \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x, y)\rangle\rangle$ está en $\mathcal{D}'_{xy}$.*

Demostración. 1. El soporte de la función ψ está contenido en la proyección de $\mathtt{supp}(\varphi)$ en $\mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, es compacto. Más aún, ψ es continua, ya que para cada $y \in \mathbb{R}^m$, S_y es una distribución y $\varphi_x(y) := \varphi(x, y) \in \mathcal{D}_y$. Además, si $x_n \to x$, $\psi(x_n) \to \psi(x)$ por la continuidad de φ y S_y.

Ahora, vamos a probar que existe $D_{r_1 \ldots r_k}\psi$ para cada $1 \leq r_1, ..., r_k \leq n$ y se tiene la siguiente igualdad

$$D_{r_1,\ldots,r_k}\psi = \left\langle S_y, D^x_{r_1\ldots r_k}\varphi(x, y)\right\rangle.$$

Vamos a probar esto por inducción sobre k:

Si k=1, entonces $D^x_{r_1\ldots r_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, para algún $1 \le j \le n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ fijo,

$$\frac{\tau_{-h}\psi(x) - \psi(x)}{h_j} = \Big\langle S_y, \frac{\tau^x_{-h}\varphi(x,y) - \varphi(x,y)}{h_j}\Big\rangle,$$

donde τ^x_{-h} es el operador traslación actuando en la variable x. Como x está fijo, sea

$$g_h := \frac{\tau^x_{-h}\varphi(x,y) - \varphi(x,y)}{h_j},$$

bastaría con ver que la "sucesión"$\{g_h\}$ converge a $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ en $\mathcal{D}$, cuando $h \to 0$. Primero, observemos que todo $\mathtt{supp}(g_h)$ esta contenida en un compacto de $\mathbb{R}^n$ independiente de h si, por ejemplo, $0 < h \leqq 1$. Por otro lado, como

$$D^\alpha_x(g_h) = D^\alpha_x\Big(\frac{\varphi(x-h,y) - \varphi(x,y)}{h_j}\Big) = \frac{D^\alpha_x\varphi(x-h,y) - D^\alpha_x\varphi(x,y)}{h_j},$$

es suficiente probar que g_h converge a $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, cuando $h \to 0$. Probaremos esto usando el Teorema del Valor Medio,

$$\Big|g_h(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x,y)\Big| = \Big| - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\xi,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x,y)\Big| = \Big| - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(\eta,y)\Big||x-\xi|$$

donde los puntos intermedios ξ y η están, respectivamente, en los intervalos de puntos extremos x, $x-h$ y x, ξ. Entonces,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big|g_h(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x,y)\Big| \longrightarrow 0, \quad \text{si } h \to 0.$$

Ahora, supongamos que vale para $D_{r_1\ldots r_k}$, probemos que vale para $\frac{\partial}{\partial x_j}D_{r_1\ldots r_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}D_k$. Pero usando lo hecho para el caso $k=1$, podemos decir que existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{D_k\psi(x+h) - \psi(x)}{h_j} = \lim_{h\to 0}\Big\langle S_y, \frac{D^x_k\varphi(x+h,y) - D^x_k\varphi(x,y)}{h_j}\Big\rangle = \Big\langle S_y, \frac{\partial}{\partial x_j}D^x_k\varphi(x,y)\Big\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}D_k\psi(x).$$

2. Por la primera parte de la prueba, la aplicación

$$\varphi \longmapsto \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle\,,$$

está bien definida. Es claro que es lineal. Para probar que es una distribución en $\mathcal{D}'_{xy}$ solo debemos probar que es continua. Es suficiente probar que dado $K \subset\subset \mathbb{R}^{n+m}$, existe $C = C(K) > 0$ y $l = l(K) \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\,\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle\,| \le C \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m},|\alpha+\beta|\le l}|D^\alpha_x D^\beta_y\varphi(x,y)|, \tag{38}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}(K)$.

En efecto, si K_1 es la proyección de K sobre $\mathbb{R}^n$. De acuerdo con la parte 1, dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}(K)$ la función $\psi(x) = \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle$ está en $\mathcal{D}_x(K_1)$. Como $T \in \mathcal{D}'_x$ tenemos que existen $l_1 = l_1(K_1) \in \mathbb{N}$, $C_1 = C(K_1) > 0$ tal que

$$|\,\langle T_x, \psi(x)\rangle\,| \leqq C_1 \sup_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqq l_1}|D^\alpha\psi(x)|. \tag{39}$$

Pero, nuevamente por la parte 1, $D^\alpha\psi(x) = \langle S_y, D^\alpha_x\varphi(x,y)\rangle$.

Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, la función $D^\alpha_x\varphi(x,y)$ está en $\mathcal{D}_y(K_2)$ donde K_2 es la proyección de K a $\mathbb{R}^m$. Como $S \in \mathcal{D}'_y$, existen $l_2 = l_2(K_2) \in \mathbb{N}$, $C_2 = C(K_2) > 0$ tal que

$$|D^\alpha\psi(x)| = |\,\langle S_y, D^\alpha_x\varphi(x,y)\rangle\,| \leqq C_2 \sup_{y\in\mathbb{R}^m,|\beta|\leqq l_2}|D^\beta_y D^\alpha_x\varphi(x,y)| \tag{40}$$

Juntando (39) y (40) , obtenemos (38). □

Observación 25. *El teorema 12 generaliza a las distribuciones resultados clásicos sobre límites bajo un signo integral.*

El teorema 12 completa la definición de producto tensorial de dos distribuciones.

En efecto, tenemos que

$$\langle W, \varphi(x,y)\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{x,y}. \tag{41}$$

El teorema 12 prueba que la aplicación W definido de esta manera esta en $\mathcal{D}'_{xy}$. Más aún, cuando φ es a variables separables es claro que (41) coincide con (37).

Solo queda probar que (41) es la única manera de extenderla a una distribución en $\mathcal{D}'_{xy}$, a la aplicación definida por (37). La unicidad es una consecuencia de los siguientes resultados.

Lema 21. *El espacio de los polinomios $\mathbb{C}[x]$ es un subespacio denso del espacio $\mathcal{E}$.*

Demostración.

Completar

□

Teorema 13. *El subespacio de las combinaciones lineal finitas de funciones a variables separables es denso en $\mathcal{D}_{xy}$.*

Demostración. Dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$, por el lema 21 existe una sucesión de polinomios $\{P_j(x,y)\}$ que converge a φ en $\mathcal{E}_{xy}$.

Sean $\alpha \in \mathcal{D}_x$, $\beta \in \mathcal{D}_y$ funciones que son iguales a 1 en la proyección de $\mathtt{supp}(\varphi)$ en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Entonces, la sucesión $\{\alpha(x)\beta(y)P_j(x,y)\}$ está en el subespacio y converge a φ en $\mathcal{D}_{x,y}$. □

Corolario 3. *Dadas $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$, existe una única distribución $W \in \mathcal{D}'_{xy}$ tal que*

$$\langle W, \alpha(x)\cdot\beta(y)\rangle = \langle T, \alpha\rangle\langle S, \beta\rangle, \quad \forall \alpha \in \mathcal{D}_x, \beta \in \mathcal{D}_y.$$

Definición 21. *La distribución W es llamada* ***producto tensorial*** *de las distribuciones T y S, y la notamos $T \otimes S$.*

Observación 26. *Como la distribución W_1 definida por*

$$\langle W_1, \varphi(x,y)\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle,$$

también satisface (37), se deduce que $W = W_1$.

Entonces, tenemos una versión del Teorema de Fubini para distribuciones, que afirma que las "integrales iteradas" son siempre iguales. A saber,

$$\langle T_x, \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{xy}.$$

Teorema 14. *Dadas $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$ tenemos que*

$$\mathtt{supp}(T \otimes S) = \mathtt{supp}(T) \times \mathtt{supp}(S).$$

Más aún, dadas $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0^m$, es

$$D_x^\alpha D_y^\beta (T \otimes S) = D_x^\alpha T \otimes D_y^\beta S.$$

Demostración. Si $x \in \mathtt{supp}(T)$, $y \in \mathtt{supp}(S)$, y U es un entorno abierto de $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, existen entornos U_1 y U_2 de x y y, respectivamente y funciones $\alpha \in \mathcal{D}_x(U_1)$ y $\beta \in \mathcal{D}_y(U_2)$ tal que $U_1 \times U_2 \subset U$ y $\langle T, \alpha\rangle \neq 0$, $\langle S, \beta\rangle \neq 0$. Entonces, $\langle T \otimes S, \alpha(x)\cdot\beta(y)\rangle \neq 0$.

Por el contrario, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, con $x \notin \mathtt{supp}(T)$ por ejemplo, existe un entorno abierto de x en $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle T, \alpha\rangle = 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{D}_x(U)$. Ahora, $U \times \mathbb{R}^m$ es un entorno de $\mathbb{R}^{n+m}$. Dada $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}(U \times \mathbb{R}^m)$, tenemos que

$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle = 0,$$

pues $\langle T_x, \varphi(x,y)\rangle = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^m$.

La segunda parte del teorema surge de la parte 1 del teorema 12. □

4.7. Producto Convolución

Lema 22. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible (Lebesgue). Entonces, son medibles las funciones*

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & F(x,y) = f(x) \end{array} \qquad G: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & G(x,y) = f(x-y) \end{array}$$

Demostración.

Completar

□

Definición 22. *Sean f y g medibles en $\mathbb{R}^n$. Si para casi todo punto tiene sentido y es finita la integral*

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)dx, \tag{42}$$

se define el ***producto de convolución*** *de f y g, $f * g$.*

Proposición 14. *L^1 con el producto de convolución es un álgebra conmutativa sin identidad. Además, el producto es continuo pues si $f, g \in L^1$,*

$$\|f * g\|_1 \leqq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Demostración.

Completar

□

Proposición 15. *Sean $f \in L^1$ y $g \in \mathcal{D}$. Entonces $f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ resulta $D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g$.*

Demostración.

Completar

□

Nos interesa extender la convolución de funciones en L^1 a distribuciones de $\mathcal{D}$.
Sean $f, g \in L^1$. Dada $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$(f*g, \varphi) = \int \left(\int f(x-y)g(y)\ dy \right) \varphi(x)\ dx = \int \int f(x-y)g(y)\varphi(x)\ dx\ dy = \int \int f(x)g(y)\varphi(x+y)\ dx\ dy.$$

De esta forma, identificando a f y g con las distribuciones regulares que determinan, concluimos que $(f * g, \varphi) = (f \otimes g, \varphi(x+y))$. Luego, sería natural definir la convolución de distribuciones como

$$(S * T, \varphi) = (S \otimes T, \varphi(x+y)). \tag{43}$$

Para que esta sea una buena definición se requeriría que φ tenga soporte compacto. Esto, sin embargo sólo puede suceder si $\varphi \equiv 0$. En efecto, si existiera $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(a) \neq 0$, se tendría que
$A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x + y = a\} \subseteq \operatorname{supp}(\varphi(x+y))$, pero A_a es no acotado.

Teorema 15. *Dadas $T \in \mathcal{D}', S \in \mathcal{E}'$, la ecuación 43, define una distribución en $\mathcal{D}'$, con soporte contenido en supp(S) + supp(T).*

Demostración.
Para cada $\varphi \in \mathcal{D}$, (43) está bien definido, pues $\operatorname{supp}(\varphi(x+y)) \cap [\operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)]$ es compacto. Además, (43) es lineal por construcción.
Veamos ahora que es continua. Supongamos que $\varphi_j \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$ y sea $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ fijo tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi_j(x+y)) \cap [\operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)] \subseteq K \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

¿existe tal K?
Sea además $\chi \in \mathcal{D}_{xy}$ tal que $\chi(x,y) = 1$ en una vecindad de K. Luego,

$$(T * S, \varphi_j) = (S \otimes T, \varphi_j(x+y)) = (T \otimes S, \chi(x,y)\varphi_j(x+y)).$$

Esto converge a cero pues la sucesión $\{\chi\varphi_j(x+y)\}$ converge a cero en $\mathcal{D}_{xy}$. Luego está bien definido $T * S$ y es una distribución.
Veamos ahora que que $\operatorname{supp}(T * S) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$. Sea U el complemento de $\operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$ en $\mathbb{R}^n$. U es abierto porque $\operatorname{supp}(T)$ es cerrado y $\operatorname{supp}(S)$ es compacto. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, para una función $\chi \in \mathcal{D}_{xy}$ adecuada, vale

$$(T * S, \varphi) = (T \otimes S, \chi\varphi(x+y)).$$

Vamos a probar que $\operatorname{supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{supp}(\chi\, \varphi(x+y)) = \emptyset$.

Podemos ver que $\operatorname{supp}(\varphi(x+y)) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} / x + y \in \operatorname{supp}(\varphi)\}$.

Completar

Entonces $\operatorname{supp}(\varphi(x+y)) \subset \bigcup_{a \in U} \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} / x + y = a\}$.
Supongamos que existe un punto (x,y) en $\operatorname{supp}(T \otimes S) \cap \operatorname{supp}(\chi\, \varphi(x+y))$. Tenemos

$$(x,y) \in \operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S) \Rightarrow x \in \operatorname{supp}(T) \wedge y \in \operatorname{supp}(S).$$

y $x + y \in U$, lo cual no es posible, por como se definió U.
Queda demostrado el teorema.

□

Definición 23. *Dadas $T, S \in \mathcal{D}'$, al menos una con soporte compacto, definimos la convolución entre T y S como la distribución en $\mathcal{D}'$ cuya ley es*

$$\varphi \longrightarrow (T \otimes S, \varphi(x+y)).$$

El producto convolución es conmutativo por construcción; y cerrado en $\mathcal{E}'$, pues la suma de espacios compactos es compacta. Más aún, se tiene el resultado siguiente.

Proposición 16. *El espacio vectorial $\mathcal{E}'$ con la suma y el producto de convolución conforma un álgebra conmutativa con unidad δ, la distribución delta de Dirac.*

Demostración. Puede verse que el producto de convolución es asociativo y distributivo con respecto a la suma, pues hereda estas propiedades de subespacios densos.

Para ver que δ es la unidad de esta álgebra, consideramos $T \in \mathcal{E}$. Sea $\varphi \in \mathcal{E}$ tal que $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$ es a variables separables; digamos, $\psi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$. Entonces,

$$(\delta \otimes T, \varphi(x + y)) = (\delta, \alpha)(T, \beta) = \alpha(0)(T, \beta) = (T, \alpha(0)\beta).$$

Pero $\alpha(0)\beta(y) = \varphi(0 + y) = \varphi(y)$, con lo cual $(T, \alpha(0)\beta) = (T, \varphi(0 + y))$. Extendiendo primero por linealidad y luego por densidad, resulta $\delta * T = T$.

□

Teorema 16. *Sean $T \in \mathcal{D}'$ y $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$, y supongamos que al menos una de ellas tiene soporte compacto. Entonces, la convolución $T * \alpha$ es una función $\beta \in \mathcal{C}^\infty$, dada por*

$$\beta(x) = (T_y, \alpha(x - y)).$$

Para demostrar este teorema, utilizaremos dos resultados, que demostraremos a continuación.

Teorema 17. *Dados $T \in \mathcal{E}'$ y U un entorno abierto y acotado del soporte de T, existe una familia finita de funciones continuas $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}, I \subseteq \mathbb{N}_0^n$ tales que supp$(f_\alpha) \subseteq U$ y*

$$T = \sum_\alpha D^\alpha f_\alpha.$$

Demostración. Sea $\Psi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $\Phi = 1$ en un entorno de $\operatorname{supp}(T)$. De este modo, $(T, \varphi) = (T, \Psi\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}$.

Por otro lado, existen $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y $\beta \in \mathbb{N}^n$ tales que $T = D^\beta$ en U.

Pero como $\operatorname{supp}(\Psi\varphi) \subseteq U$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(T, \varphi) = (T, \Psi\varphi) = (D^{\beta F}, \Psi\varphi) = \left(F, (-1)^{|\beta|} D^\beta(\Psi\varphi)\right) &= \left(F, \sum_{\alpha \le \beta} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|} D^{\beta - \alpha}\Psi D^\alpha \varphi\right) \\ &= \sum_{\alpha \le \beta} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha + \beta|} \left(D^\alpha(F D^{\beta - \alpha}\Psi), \varphi\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T = \sum_{\alpha \le \beta} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha + \beta|} D^\alpha (F D^{\beta - \alpha} \Psi).$$

□

Teorema 18. *Sea $T \in \mathcal{E}'$. La aplicación $\varphi \longrightarrow \left(T, \int \varphi(x + y) dy\right)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ es una distribución en $\mathcal{D}'$, y cumple*

$$\left(T, \int \varphi(x + y) dy\right) = \int (T_x, \varphi(x + y))\, dy$$

Demostración. Derivando bajo el símbolo de integral, vemos que la función $x \longrightarrow \int \varphi(x + y) dy$ es $\mathcal{C}^\infty$. Además, dada una sucesión $\{\varphi_j\} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$, en $\mathcal{D}$ se tiene $\int \varphi_j(x + y) dy \longrightarrow 0$ en $\mathcal{E}$.

Sea $\theta \in \mathcal{D}$ tal que $\theta = 1$ en un entorno del soporte de T. La aplicación del enunciado del teorema será una distribución en $\mathcal{D}'$, dada por $\left(T, \theta(x) \int \phi(x + y) dy)\right)$.

Representando a T según el teorema 17 como $T = \sum\limits_\alpha D^\alpha f_\alpha$, escribimos:

$$
\begin{aligned}
(T, \alpha(x) \int \varphi(x+y)dy) &= \sum_\alpha (D^\alpha f_\alpha, \theta(x) \int \varphi(x+y)dy) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} (f_\alpha, \int D_x^\alpha(\theta(x)\varphi(x+y))dy) \\
&= \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int f_\alpha(x) D_x^\alpha(\theta(x)\varphi(x+y))dy = \int (T_x, \varphi(x+y))dy
\end{aligned}
$$

Y esto es lo que queríamos demostrar. □

Ahora podemos probar el teorema 16.

Demostración. Vamos a suponer $T \in \mathcal{E}', \alpha \in \mathcal{E}$; el otro caso es similar.
Sea $\varphi \in \mathcal{D}$. Escribimos

$$
\begin{aligned}
(T * \alpha, \varphi) = (T_x \otimes \alpha(y), \varphi(x+y)) &= (T, \int \alpha(y)\varphi(x+y)dy) = (T, \int \alpha(z-x)\varphi(z)) \\
&= \int (T_x, \alpha(z-x))\varphi(z)dz = ((T_x, \alpha(z-x)), \varphi).
\end{aligned}
$$

y sabemos que $\beta(z) := (T_x, \alpha(z-x))$ es una función $\mathcal{C}^\infty$, por □

Definición 24. *La función β definida en el teorema 16 se dice una regularización de la distribución T.*

Observación 27. *Siguiendo la demostración del teorema 12: dado $\gamma \in \mathbb{N}$, podemos escribir*

$$D^\gamma(T * \alpha) = D^\gamma \beta = (T_y, D_x^\gamma \alpha(x-y)) = T * D^\gamma \alpha.$$

donde todas las derivadas son tomadas en el sentido clásico.

Ejemplo 37. *Sea u una distribución, y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

- *Busquemos algunos ejemplos donde $u * \varphi = 0$. En dicho caso tenemos que*

  $$0 = (u * \varphi, \psi) = (u, \int \varphi(y)\psi(x+y)dy)$$

  Es claro que si $u = 0$ o $\varphi \equiv 0$, entonces $u * \varphi = 0$.

  Si $u = T_f$ para alguna $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, con supp$(u) \cap$supp$(\varphi) = \emptyset$, nuevamente $u*\varphi = 0$, pues tendríamos que $f(x) \cdot \varphi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, si $u = \rho$ función regularizadora, y $\varphi(x) = H(x+1)$, o $\varphi(x) = H(x+a)$ con $a \geq 1$ o $\varphi(x) = H(-x+a)$ con $a \leq -1$.

  Si $u = \delta$, basta tomar $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 0$.

- *Consideremos ahora $u * \varphi = 1$.*
  Sea $f(x) = \frac{1}{\int_\mathbb{R} \rho(x-y)dy}$, con ρ función regularizadora. Consideremos $u = T_f$ y $\varphi(x) = \rho(x)$. Entonces $\beta(x) = (u * \varphi)(x) = (T_f * \rho)(x) = ((T_f)_x, \rho(x-y)) = \int_\mathbb{R} f(x)\rho(x-y)dy = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\int_\mathbb{R} \rho(x-y)dy} \rho(x-y)dy = \frac{\int_\mathbb{R} \rho(x-y)dy}{\int_\mathbb{R} \rho(x-y)dy} = 1.$

- *Consideremos $u * \varphi = x$.*
  Sabemos que $(u * \varphi)' = u * \varphi' = 1$. Pero por lo anterior, si $f(x) = \frac{1}{\int_\mathbb{R} \rho(x-y)dy}$, con ρ función regularizadora, $u = T_f$ y $\varphi'(x) = \rho(x)$, tenemos que $u*\varphi' = 1$, por lo que $u*\varphi = x+c$ con c constante. Pero φ es una primitiva de ρ, por lo que basta elegir una de ellas de manera que $(u * \varphi)(0) = 0$ para que $c = 0$.

Teorema 19. *Se tienen las siguientes inclusiones continuas y densas:*

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{D}', \ \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{E}'.$$

Demostración. La primera inclusión está bien definida pues $\mathcal{E} \in L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'$; la segunda, porque se trata de los espacios duales del caso anterior. Vamos a demostrar la densidad de la primera, siendo la prueba de la segunda muy similar.

Sea $T \in \mathcal{D}'$ y consideremos la función $\beta_j = T * \rho_j$, siendo $\rho_j \in \mathcal{C}_o^\infty$ tal que $T_{\rho_j} \to \delta$ en $\mathcal{D}'$. Por el teorema 16, $\beta_j \in \mathcal{E} \ \forall j$, con lo cual

$$\beta_j = T * \rho_j \longrightarrow T * \delta = T$$

siendo la convergencia en $\mathcal{D}'$. □

Ejemplo 38. *Consideremos las distribuciones δ y H en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Veamos las siguientes igualdades*

- $\delta' * H = \delta$;

Completar

- $1 * \delta' = 0$;

Completar

- $(H * \varphi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s) \ ds, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$;

Completar

- $(1 * \delta') * H = 0 * H = 0$;
- $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$;

Vemos que el producto convolución de distribuciones no es asociativo.

Ejemplo 39. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_a \otimes \delta_b, \varphi(x+y) \rangle = \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle \delta_a, \varphi(x+b) \rangle = \varphi(a+b).$$

De donde concluimos que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Ejemplo 40. *Sea* $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $h \geq 0$ *y* $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\ dx = 1$. *Sea la sucesión* $h_k(x) = kh(kx)$, $k \in \mathbb{N}$. *Vamos a probar que*

$$\lim_{k \to +\infty} T * h_k = T$$

para toda $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Completar

Ejemplo 41. *Sea* P *un operador diferencial en* $\mathbb{R}^n$, *esto es*

$$P = \sum_{\alpha} c_\alpha D^\alpha,$$

entonces, dada u *distribución y* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle (P\delta) * u, \varphi \rangle = \dots$$

Completar

5. Transformada de Fourier

En la primera parte de esta sección la meta es introducir la definición y las propiedades básicas de la transformada de Fourier en los espacios L^1 y L^2, y mostrar algunos resultados que diferencian ambas teorías.

5.1. Teoría en L^1

Definición 25. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la* ***transformada de Fourier*** *de f, denotada por $\mathcal{F}[f]$ o $\hat{f}$, se define por*

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Observación 28. *La transformada de Fourier está bien definida y es lineal, ya que ...*

Completar

Ejemplo 42. *Sea* $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-3,-1] \cup [1,3] \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$*. Entonces,*

$$\mathcal{F}[f_1](\xi) = \dots$$

Completar

Ejemplo 43. *Sea* $f_2(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$*, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathcal{F}[f_2](\xi) = \dots$$

Completar

Ejemplo 44. *Sea $g(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \dots$$

Sea $h(x) = g\left(\frac{x-a}{a}\right)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Si $-\frac{1}{2} \leq \frac{x-a}{a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2}$, entonces

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \dots$$

Sea ahora $d(x) = (g * g)(x)$. Entonces

$$\mathcal{F}[d](\xi) = \dots$$

Por último, sea $l(x) = xg(x)$. Entonces

$$\mathcal{F}[l](\xi) = \dots$$

Completar

Teorema 20. *(de Lebesgue)*
Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}[f]$ es una función continua que se anula en el infinito. Esto es, $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0.$

Demostración. Fijemos $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\{\xi_j\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión que converge a ξ_0.
Como $e^{2\pi i\xi_j x}f(x) \to e^{2\pi i\xi_0 x}f(x)$ puntualmente cuando $j \to \infty$ y $|e^{2\pi i\xi_j x}f(x)| = |f(x)|$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, deducimos que

$$\hat{f}(\xi_j) \longrightarrow \hat{f}(\xi_0).$$

Esto prueba la continuidad de $\hat{f}$.

Ahora, usando la definición de $\hat{f}$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $\hat{f}$ es una función acotada y tenemos la estimación

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

Entonces, la transformada de Fourier mapea L^1 sucesiones convergentes en sucesiones uniformemente convergentes. Entonces, para ver que $\hat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$, es suficiente encontrar una sucesión $\{f_j\}$ que converge a f en L^1 tal que $\hat{f}_j$ se anula en el infinito para todo j.

Sabemos que las combinaciones lineales de funciones características en rectángulos de $\mathbb{R}^n$ son densas en $L^1(\Omega)$ Entonces sea $\{f_j\}$ una sucesión de estas funciones tal que $f_j \to f$ en L^1. Dado j fijo, sea $A_j = \prod\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$ su rectángulo asociado, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\chi_{A_j}](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x}\chi_{A_j}(x)dx = \int_{A_j} e^{2\pi i\xi\cdot x}dx = \int_{a_n}^{b_n}...\int_{a_1}^{b_1} e^{2\pi i\xi\cdot x}dx_1...dx_n = \\ &= \frac{1}{2\pi i\xi_1}\int_{a_n}^{b_n}...\int_{a_2}^{b_2} e^{2\pi i\left(b_1\xi_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} x_k\xi_k\right)} - e^{2\pi i\left(a_1\xi_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} x_k\xi_k\right)} dx_2...dx_n \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n\xi_1\xi_2...\xi_n}\sum_{c_j=a_j \vee c_j=b_j} \pm e^{2\pi i c\cdot\xi},\end{aligned}$$

donde la ultima igualdad se obtiene por inducción sobre n.
Luego, tomando modulo

$$|\mathcal{F}[\chi_{A_j}](\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n|\xi_1\xi_2...\xi_n|} \longrightarrow 0,$$

cuando $|\xi| \to \infty$.
Entonces, si fijamos $\xi \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |(f - f_j)^\wedge(\xi)| + |\hat{f}_j(\xi)| \leq \|f - f_j\|_{L^1} + |\hat{f}_j(\xi)|.$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$ entonces $\|f - f_j\| < \frac{\epsilon}{2}$.
Tomando $j = j_0$, se tiene

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} + |\hat{f_{j_0}}(\xi)|.$$

Ahora, existe un $M = M(\epsilon) > 0$ tal que $|\hat{f_{j_0}}(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ si $|\xi| \geq M$. De donde,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \epsilon, \text{ si } |\xi| > M.$$

□

Observación 29. *1. Toda función continua que se anula en el infinito es uniformemente continua.*

2. Se puede probar que no toda función continua que se anula en el infinito es la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ver [7], volumen 2). Entonces, el teorema 20 no caracteriza a $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n))$.

Teorema 21. *1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene derivadas continuas e integrables de orden $k \geqq 1$, entonces, para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leqq k$, se tiene*

$$\mathcal{F}[D^\beta f](\xi) = (-2\pi i\xi)^\beta \mathcal{F}[f](\xi). \tag{44}$$

2. Si las funciones f y $|x|^k f$ son integrables, para algún $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 1$, entonces para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leqq k$, se tiene

$$D^\beta \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\Big[(2\pi ix)^\beta f\Big](\xi). \tag{45}$$

Demostración.

Completar

$\square$

Observación 30. *Sean $\varphi_1, ..., \varphi_n$ funciones integrables en $\mathbb{R}$, y sea*

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces φ es integrable en $\mathbb{R}^n$, y por Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ dx_1...dx_n.$$

Ahora, supongamos que $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i\xi\cdot x}\varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi_1 x_1} e^{2\pi i\xi_1 x_2}\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi_2 x_2}\varphi_2(x_2)\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi_1 x_1}\varphi_1(x_1)\ dx_1 dx_2 = \mathcal{F}[\varphi_1](\xi_1)\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi_2 x_2}\varphi_2(x_2)\ dx_2 = \mathcal{F}[\varphi_1](\xi_1)\mathcal{F}[\varphi_2](\xi_2).\end{aligned}$$

Inductivamente, $\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}[\varphi_j](\xi_j)$.

Ejemplo 45. *Sea $f(x) = e^{-\|x\|_1}$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Calculemos su transformada de Fourier aplicando la observación anterior.*

Completar

Teorema 22. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, entonces*

$$\mathcal{F}[\tau_h f](\xi) = e^{2\pi i\xi\cdot h}\hat{f}(\xi).$$

$$\mathcal{F}[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|^n}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{k}\Big).$$

Demostración.

Completar

$\square$

Definición 26. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la* ***transformada de Fourier conjugada*** *se define por*

$$\overline{\mathcal{F}}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) dx.$$

Observación 31. *Si denotamos por $\check{f}(\xi) = f(-\xi)$, entonces*

$$\overline{\mathcal{F}}[f] = \check{\hat{f}} = \overline{\mathcal{F}[\overline{f}]},$$

donde $\overline{f}$ denota al conjugado complejo.

La transformada de Fourier conjugada también satisface las condiciones de la definición 25 bajo las mismas hipótesis. Digamos,

$$\overline{\mathcal{F}}[D^\beta f](\xi) = (2\pi i \xi)^\beta\, \overline{\mathcal{F}}[f](\xi),$$

$$D^\beta \mathcal{F}[f](\xi) = \overline{\mathcal{F}}\Big[(-2\pi i x)^\beta f\Big](\xi),$$

la prueba de esto es análoga a la anterior.

Ahora vamos a mostrar dos resultados que serán probados en la sección 5.5:

Teorema 23. *Si f, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\overline{\mathcal{F}}[\hat{f}] = f \quad ctp$$

Teorema 24. *La aplicación lineal*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)]$$

es invertible, en otras palabras dada $g \in \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)]$, existe una única $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ determinada en casi todo punto tal que

$$\mathcal{F}[f] = g \quad ctp.$$

Observación 32. *1. Si f es integrable pero no se anula en el infinito, entonces se deduce de el teorema 21 que la función $\hat{f}$ no es integrable. Entonces, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \nsubseteq L^1(\mathbb{R}^n)$.*

2. Como $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \nsubseteq L^1(\mathbb{R}^n)$, la aplicación inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$, solo coincide con $\overline{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

5.2. Teoría en L^2

La definición de Transformada de Fourier de la sección anterior no se aplica a cualquier función de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Queremos definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de manera tal que coincida con la definición 25 para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Para eso vamos a usar el siguiente **principio de extensión**:

Teorema 25. *Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y X_1 un subespacio denso de X.*

Supongamos que $T_1 : X_1 \longrightarrow Y$ es un operador lineal y continuo. Entonces existe un único $T : X \longrightarrow Y$ operador lineal y continuo tal que $T|_{X_1} = T_1$ y $\|T\| = \|T_1\|$.

Demostración.

Completar

$\square$

Ahora mostraremos un resultado, cuya prueba se puede ver en la sección 5.5

Teorema 26. *Sea $f \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces su transformada de Fourier dada por la definición 25 esta en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Esto completa la definición de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, usando el principio de extensión. En efecto, como $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es la única extensión continua del operador

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, si denotamos con $\mathcal{F}$ a dicha extensión, tenemos que

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\,.$$

Esta igualdad es llamada **identidad de Parserval**.

De igual manera tenemos una extensión continua de la transformada de Fourier conjugada. Es más, se tiene que

$$\mathcal{F}[f] = \overline{\mathcal{F}\left[\overline{f}\right]}.$$

Teorema 27. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces la definición de transformada de Fourier de acuerdo con la teoría de L^1 coincide con la definición de acuerdo con la teoría de L^2.*

La prueba de este teorema puede verse en 5.5.

La identidad de Parseval prueba que la transformada de Fourier es una isometria de $L^2(\mathbb{R}^n)$ es sí mismo. Más aún,

Teorema 28. *(de Plancherel)*

*Los operadores $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son isomorfismos inversos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo que preserva el producto interno. Esto es, dadas f_1, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene la siguiente identidad, llamada **identidad de Plancherel**:*

$$(f_1, f_2)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_1(\xi)\overline{\hat{f}_2(\xi)}d\xi = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_{L^2}.$$

Se tiene una identidad similar para $\overline{\mathcal{F}}$.

La prueba de este teorema puede verse en la sección 5.5.

A partir del resultado que acabamos de exponer, podemos decir que la teoría en L^1 de la transformada de Fourier es más directa desde el punto de vista de la definición. Sin embargo, presenta la dificultad de cómo caracterizar su imagen y cómo calcular su inversa.

Por otro lado, la teoría L^2 no presenta ninguno de estos problemas. En ese sentido, podemos decir que es una teoría más "elegante". Además su definición no es tan directa como la definición por medio de la integral.

Laurent Schwartz descubrió que el espacio $\mathcal{S}$, que él definió, es un dominio "natural" para la transformada de Fourier, disfrutando de todas las buenas características de ambas teorías, en L^1 y en L^2, sin ninguno de los inconvenientes.

Schwartz también observó que las teorías en L^1 y L^2, así como en la teoría general en L^p, $1 \leq p \leq \infty$, de la transformada de Fourier, pueden ser vistas como parte de la teoría de la transformada de Fourier en el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones templadas.

5.3. Teoría en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

Queremos estudiar la transformada de Fourier desde el punto de vista de las distribuciones, por lo que debemos considerar un espacio de funciones test adecuado. En efecto, si fijamos $f \in L^1$, sabemos que $\hat{f}$ es una función continua, por lo que define una distribución en $\mathcal{D}'$. Tomando $\varphi \in \mathcal{D}$ podemos escribir:

$$(T_{\hat{f}}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \left\{ \int e^{2\pi i \xi x} f(x)\varphi(\xi)dx \right\} d\xi,$$

Puesto que la función φ tiene soporte compacto, la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi x} f(x)\varphi(\xi)dxd\xi,$$

existe, y de acuerdo con el teorema de Fubini, podemos escribir:

$$(T_{\hat{f}}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x).$$

Esto sugiere la posibilidad de definir la transformada de Fourier de una distribución $T \in \mathcal{D}'$ como

$$(\hat{T}, \varphi) = (T, \hat{\varphi}).$$

Estudiemos la transformada de Fourier de funciones test para determinar si dicha definición es posible. Sea $\varphi \in \mathcal{D}$ y reemplacemos x por $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ en $\hat{\varphi}$, obteniendo la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x+iy)\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi,$$

la cual existe pues φ tiene soporte compacto. Más aún, puede mostrarse que es posible diferenciar z bajo el signo integral. En consecuencia, $\hat{\varphi}(x)$ puede extenderse a $\mathbb{C}^n$ como una función entera. Esto muestra que la función $\hat{\varphi}(x)$ no tiene soporte compacto, excepto en el caso que $\varphi \equiv 0$, y por lo tanto la definición propuesta no se aplica a $\mathcal{D}'$. El siguiente teorema muestra que es correcta en $\mathcal{S}'$.

Teorema 29. *La transformada de Fourier mapea $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.*

Demostración. Podemos ver que hay una inclusión continua $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p, 1 \leq p \leq \infty$. En efecto:

$$\varphi \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C = C(k,\beta) / \mathop{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^k D^\beta \varphi(x)| \leq C.$$

Entonces, si $p < \infty$

$$||\varphi||_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-p(n+1)}[(1+|x|^2)^{p(n+1)}|\varphi(x)|^p]dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-p(n+1)} \leq C \cdot \hat{C}.$$

Si $p = \infty$, de la definición de $\mathcal{S}$, resulta que $||\varphi||_{L^\infty} = \mathop{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = \mathop{sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |x^0 D^0 \varphi(x)| \leq C$.

Por lo tanto, $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$. Luego, dada $\varphi \in \mathcal{S}$ podemos definir su transformada de Fourier. Más aún, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, D^\alpha[x^\beta \varphi]$ es integrable. Por el teorema 21, $\hat{\varphi} \in \mathcal{E}$. Además:

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} \mathcal{F}[D^\alpha (2\pi i x)^\beta \varphi](\xi).$$

Por el teorema 20, $\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}$ es acotada. Entonces, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$

□

Análogamente se prueba que la trasformada de Fourier conjugada mapea $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.

Teorema 30. *Los operadores $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, y satisfacen*

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[\varphi] = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi] = \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Demostración. Basta probar la continuidad para $\mathcal{F}$ y la igualdad $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi] = \varphi$, pues

Completar

Veamos la continuidad. Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, tenemos que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)| \leq C_\alpha \int \left|D^\alpha \left[(2\pi i x)^\beta \varphi(x)\right]\right| dx \leq C_\alpha \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{n+1} D^\alpha \left[(2\pi i x)^\beta \varphi(x)\right]\right| \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n-1} dx.$$

Por otro lado, puede verse que $\varphi \in \mathcal{S}$ es equivalente a que dado $k \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists\ C = C(k,\beta) > 0$ tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\left(1+|x|^2\right)^k D^\beta \varphi(x)| \leqq C$.

Por lo tanto, $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)|$ está acotado, lo que muestra la continuidad de $\mathcal{F}$.

Probemos que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi] = \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, es decir, que $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\varphi(x)dx\right] d\xi.$$

Dada $\psi \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\varphi(x)\psi\left(\frac{\xi}{j}\right)dx\right]d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{j}\right)d\xi \quad j=1,2,3,\ldots$$

Realizando el cambio de variable $\xi = ju, x = \frac{v}{j} + y$ queda

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi iuv}\varphi\left(\frac{v}{j}+y\right)\psi(u)dv\right]du = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{v}{j}+y\right)\hat{\psi}(v)dv = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi iy\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{j}\right)d\xi \quad j=1,2,3,\ldots$$

Como $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tomando límite cuando $j \to \infty$, resulta

$$\psi(0)\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi](y) = \varphi(y)\int \hat{\psi}(v)dv.$$

Si hallamos $\psi \in \mathcal{S}$ tal que $\psi(0) = 1, \int \hat{\psi}(v)dv = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi](0) = 1$, se obtiene el resultado deseado.

Si $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, es claro que $\psi(0) = 1$. Además, se tiene que $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx = 1, \psi \in \mathcal{S}$. Por último, $\hat{\psi} = \psi$. En efecto:

Sea $g(\xi) = e^{\pi|\xi|^2}\hat{\psi}(\xi)$. $g(0) = 1$, y para $1 \le j \le n$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \xi_j} &= e^{\pi|\xi|^2}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{\psi} + 2\pi\xi_j e^{\pi|\xi|^2}\hat{\psi} = e^{\pi|\xi|^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}\hat{\psi} - 2\pi i\xi_j\hat{\psi}i\right] = e^{\pi|\xi|^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}\mathcal{F}[\psi] - 2\pi i\xi_j\mathcal{F}[\psi]i\right] = \\ &= e^{\pi|\xi|^2}\left[\mathcal{F}[2\pi ix_j\psi] + \mathcal{F}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}\right]i\right] = e^{\pi|\xi|^2}\mathcal{F}\left[2\pi ix_j\psi + i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right] = e^{\pi|\xi|^2}\mathcal{F}\left[2\pi ix_j\psi + i\cdot(-2\pi x_j)\psi\right] = \\ &= e^{\pi|\xi|^2}\mathcal{F}[0] = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, g es constante, y como $g(0) = 1$, $g \equiv 1$, es decir, $\hat{\psi}(\xi) = g(\xi)e^{-\pi|\xi|^2} = e^{-\pi|\xi|^2} = \psi(\xi)$.

Entonces, $\int\hat{\psi}(v)dv = \int\psi(v)dv = 1$. Queda demostrado el teorema.

□

Definición 27. *Dado $T \in \mathcal{S}'$, definimos*

$$(\mathcal{F}[T], \varphi) = (T, \mathcal{F}[\varphi]), \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S}.$$

Por lo visto anteriormente, esta igualdad está bien definida, y es una distribución en $\mathcal{S}'$, denominada la transformada de Fourier de T, denotada también por $\hat{T}$. De manera análoga se define la transformada de Fourier conjugada $\overline{\mathcal{F}}[T]$.

Teorema 31. *Los operadores $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}'$, y satisfacen*

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[T] = T = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[T], \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S}$$

Demostración. Se deduce aplicando el teorema 30 y la definición de transformada de Fourier de T.

□

Teorema 32. *Dada una distribución T con soporte compacto, se tiene en el sentido de $\mathcal{S}'$,*

$$\hat{T}_\xi = \left(T_x, e^{2\pi i\xi\cdot x}\right).$$

Más aún, la distribución $\hat{T}_\xi$ es una función de la variable ξ que puede ser extendida a $\mathbb{C}^n$ como una función entera.

Demostración. Sabemos que las distribuciones a soporte compacto se corresponden con $\mathcal{E}'$. Sea entonces $T \in \mathcal{E}'$. Vimos que una tal T puede escribirse como una suma finita de la forma

$$T = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{\alpha}$$

donde f_α es una función continua a soporte compacto contenido en una vecindad de $\text{supp}(T)$. Por otro lado, puede verse que $\mathcal{F}[D^\alpha T] = (-2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}[T]$, para $T \in \mathcal{S}'$. Entonces

$$\mathcal{F}[T] = \sum_{\alpha} \mathcal{F}[D^\alpha f_\alpha] = \sum_{\alpha} (-2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f_\alpha]$$

Puesto que $f_\alpha \in L^1$, podemos calcular $\mathcal{F}[f_\alpha]$ usando la integral, es decir, $\mathcal{F}[f_\alpha] = T_{\hat{f}_\alpha}$.
Entonces

$$\sum_{\alpha} (-2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f_\alpha] = \sum_{\alpha} (-2\pi i\xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x} f_\alpha(x) dx = \sum_{\alpha} (-2\pi i\xi)^\alpha (f_\alpha, e^{2\pi i\xi\cdot x}) =$$
$$= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} (f_\alpha, D_x^\alpha e^{2\pi i\xi\cdot x}) = \sum_{\alpha} (D_x^\alpha f_\alpha, e^{2\pi i\xi\cdot x}) = (T_x, e^{2\pi i\xi\cdot x}).$$

Veamos la segunda parte. Cada integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x} f_\alpha(x) dx$ define una función $\mathcal{C}^\infty$ en ξ que puede extenderse a $\mathbb{C}^n$ como una función entera, pues, dado $\xi \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{R}^n$, tenemos la expansión en serie de potencias

$$e^{2\pi i\xi\cdot x} = \sum_{\beta} \frac{(2\pi i x)^\beta}{\beta!} \cdot \xi^\beta,$$

cuya convergencia es uniforme para x, ξ en compactos, y como f_α es continua con soporte compacto, podemos integrar término a término obteniendo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x} f_\alpha(x) dx = \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) (2\pi i x)^\beta dx \ \xi^\beta,$$

para cada $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Queda demostrado el teorema.

$\square$

Ejemplo 46. *Para las siguientes distribuciones, se muestran sus transformadas de Fourier, chequeando previamente que son distribuciones de $\mathcal{S}'$.*

- $T = \mathbb{1}$.

Completar

- $T = \delta_a$;

Completar

- $e^{-ax} H(x)$ *en* $\mathbb{R}$, *para* $a > 0$;

Completar

- $\dfrac{\sin(x)}{x}$;

Completar

- e^{iwx};

Completar

- $\cos(wx)$

Completar

- $\sin(wx)$

Completar

- δ^+

Completar

- δ^-

Completar

Observación 33. *Analizando el soporte de las transformadas de Fourier de las deltas de Heisenberg se observa la razón de la elección de los signos en su definición. Las transformadas $\mathcal{F}[\delta^+]$ y $\mathcal{F}[\delta^-]$ tienen como soporte la semirrecta positiva y la negativa respectivamente. (chequearlo).*

Definición 28. *Se da el nombre de **espectro de una distribución** temperada al soporte de su transformada de Fourier.*

5.4. La acción de la transformada de Fourier sobre el producto multiplicativo y la convolución.

Sabemos que $\mathcal{S}$ es un álgebra conmutativa tanto con el producto multiplicativo como con la convolución. Veremos ahora que la transformación de Fourier aplica la primera estructura en la segunda.

Lema 23. *Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. Entonces,*

$$\mathcal{F}\left[\varphi\,\overline{\mathcal{F}}[\psi]\right] = \mathcal{F}[\varphi] * \psi \tag{46}$$

y también

$$\overline{\mathcal{F}}\left[\varphi\,\mathcal{F}[\psi]\right] = \overline{\mathcal{F}}[\varphi] * \psi. \tag{47}$$

Demostración.

Completar

□

Observación 34. *Gracias a este lema, podemos ver la relación que dan la transformación de Fourier y su conjugada entre las estructuras de álgebra de $\mathcal{S}$ determinadas por la convolución y el producto multiplicativo.*

- *Sustituyendo en (46) ψ por $\mathcal{F}[\psi]$, tenemos*

  $$\mathcal{F}[\phi.\psi] = \mathcal{F}[\phi] * \mathcal{F}[\psi].$$

  A su vez, sustituyendo en (47) ψ por $\overline{\mathcal{F}[\psi]}$, resulta

  $$\overline{\mathcal{F}}[\phi.\psi] = \overline{\mathcal{F}}[\phi] * \overline{\mathcal{F}}[\psi].$$

  De este modo, $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son homomorfismos del álgebra $\mathcal{S}$ con el producto multiplicativo en aquella con el producto de convolución.

- *Sustituyendo en (47) φ por $\mathcal{F}[\varphi]$, obtenemos*

  $$\overline{\mathcal{F}}\left[\mathcal{F}[\varphi].\mathcal{F}[\psi]\right] = \varphi * \psi.$$

  Ahora, tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad, resulta

  $$\mathcal{F}[\phi * \psi] = \mathcal{F}[\phi]\ .\ \mathcal{F}[\psi].$$

  De forma análoga,

  $$\overline{\mathcal{F}}[\phi * \psi] = \overline{\mathcal{F}}[\phi]\ .\ \overline{\mathcal{F}}[\psi].$$

  Por lo tanto, $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}$ son homomorfismos del álgebra $\mathcal{S}$ con el producto de convolución en aquella con el producto multiplicativo.

Concluimos entonces que ambas álgebras son isomorfas, identificadas entre sí por la transformación de Fourier y su conjugada.

Teorema 33. *Dadas $f, g \in L^1$, se tiene*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \,.\, \mathcal{F}[g] \qquad y \qquad \overline{\mathcal{F}}[f * g] = \overline{\mathcal{F}}[f] \,.\, \overline{\mathcal{F}}[g].$$

Demostración.

Completar

□

Observación 35. *El teorema 33 muestra que la transformada de Fourier es un homomorfismo del álgebra $(L^1, *)$ en el álgebra $(C_0, \cdot)$, donde $C_0 = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \,:\, f \text{se anula en el infinito}\}$ y $\cdot$ denota la multiplicación puntual. Observemos que la imagen de este homomorfismo es una subálgebra* ***propia****, y puede verse además que la inclusión es densa.*

Ahora veamos la acción de la transformación de Fourier sobre productos entre distribuciones temperadas. Dadas $T \in \mathcal{E}'$, $S \in \mathcal{S}'$, la convolución $T * S$ está bien definida como distribución temperada.

Teorema 34. *Sean $T \in \mathcal{E}'$, $S \in \mathcal{S}'$. Entonces,*

$$\mathcal{F}[T * S] = \mathcal{F}[T].\mathcal{F}[S] \tag{48}$$

donde las distribuciones y las operaciones están en $\mathcal{S}'$.

Demostración.

Completar

□

Ejemplo 47. *Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:*

$$y''(x) - y(x) + 2f(x) = 0, \tag{49}$$

con $f(x) = 0$ si $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Aplicando la transformada de Fourier a (49),

Completar

Esta es una solución de (49). Ahora, veamos que ella y sus derivadas se anulan en el infinito.

Completar

Ejemplo 48. *Consideremos la siguiente ecuación:*

$$(P):\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Entonces, aplicando la transformada de Fourier en la variable x

Completar

Ejemplo 49. *Consideremos la ecuación del calor:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\Delta_x u(x,t)=0,\ t>0. \tag{50}$$

Vamos a calcular una solución de (50). Aplicando la transformada de Fourier en $x\in\mathbb{R}^n$.

Completar

5.5. Algunos resultados de la transformada de Fourier

Vamos a completar algunos resultados que no fueron probados en las secciones anteriores, usando la teoría de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{S}'$.

Lema 24. *(Fórmula de Inversión)*
Sea $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\mathcal{F}[T_f]=T_{\hat{f}}.$$

Hay un resultado similar para $\overline{\mathcal{F}}$.

Demostración. Observemos que ambos lados de la igualdad que queremos probar están en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces, dada $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\langle T_{\hat f},\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\ d\xi.$$

Pero, por otro lado

$$\langle\mathcal{F}[T_f],\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{\varphi}(x)\ dx.$$

Entonces, necesitamos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot\xi}f(x)\ dx\Big]\varphi(\xi)\ d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\ d\xi\Big]\ dx.$$

Pero como la integral doble

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot\xi}f(x)\varphi(\xi)\ dx\ d\xi,$$

existe, el teorema de Fubbini implica que las integrales iteradas coinciden. □

Demostración del teorema 23. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y asumimos que $g = \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces por el lema 24, usando la formula de inversión en la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$T_{\overline{\mathcal{F}}[g]} = \overline{\mathcal{F}}[T_g] = \overline{\mathcal{F}}\Big[T_{\hat{f}}\Big] = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[T_f]T_f.$$

Entonces $\overline{\mathcal{F}}[g] = f$ ctp. □

Demostración del teorema 24. Por el teorema 23 sabemos que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)]$ es sobreyectivo, bastaría ver que si $\hat{f} = 0$ ctp, entonces $f = 0$ ctp.

En efecto, usando la fórmula de inversión del lema 24,

$$T_f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[T_f] = \overline{\mathcal{F}}\Big[T_{\hat{f}}\Big] = 0.$$

Entonces $f = 0$ ctp. □

Demostración del teorema 26. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sabemos que $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos a probar que

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}.$$

Si aceptamos que para todas $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(\hat{\varphi}, \psi)_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}[\psi])_{L^2}, \tag{51}$$

entonces, usando (51) con $\hat{\varphi} = \psi$ y usando la fórmula de inversión de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$, tenemos que

$$(\hat{\varphi}, \hat{\varphi})_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}[\hat{\varphi}])_{L^2} = (\varphi, \varphi)_{L^2}.$$

Ahora, probemos (51)

$$\begin{aligned}(\hat{\varphi}, \psi)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\, dx\Big)\overline{\psi}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x}\varphi(x)\overline{\psi}(\xi)\, dxd\psi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\psi(\xi)\, d\xi\Big)}\, dx = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}[\psi])_{L^2}.\end{aligned}$$

□

Lema 25. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,*

$$\mathcal{F}[T_f] = T_{\hat{f}}.$$

Hay un resultado similar para $\overline{\mathcal{F}}$.

Demostración. Observemos que ambos lados de la igualdad que queremos probar están el $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ahora, sea $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión tal que $\varphi_j \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ cuando $j \to \infty$. Entonces, dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\langle T_{\hat{f}}, \varphi\Big\rangle &= \lim_{j\to\infty} \langle T_{\hat{\varphi}_j}, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_j(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x)\hat{\varphi}(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} \langle T_{\varphi_j}, \hat{\varphi}\rangle \\ &= \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}[T_f], \varphi\rangle.\end{aligned}$$

□

Demostración del teorema 27. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, y llamamos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ a la transformada de Fourier en L^1 y en L^2, respectivamente. Entonces dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por los lemas 24 y 25

$$\left\langle T_{\mathcal{F}_1[f]}, \varphi \right\rangle = \langle \mathcal{F}_1[T_f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}_1[\varphi] \rangle = \langle f, \mathcal{F}_2[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}_2[T_f], \varphi \rangle = \left\langle T_{\mathcal{F}_2[f]}, \varphi \right\rangle,$$

donde $\mathcal{F}_1[\varphi] = \mathcal{F}_2[\varphi]$ pues en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ las transformadas coinciden.

Entonces, $T_{\mathcal{F}_1[f]} = T_{\mathcal{F}_2[f]}$ de donde concluimos que $\mathcal{F}_1[f] = \mathcal{F}_2[f]$ ctp. □

Demostración del teorema 28. Esta prueba es similar a la del teorema 23, pero usando el lema 25.

Sean $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $g = \hat{f}$. Entonces,

$$T_{\overline{\mathcal{F}}[g]} = \overline{\mathcal{F}}\left[T_{\hat{f}}\right] = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[T_f] = T_f.$$

Esto prueba que

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[f] = f.$$

Ahora para probar la identidad de Plancherel, usamos (51).

Sea $\{\psi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión que converge a $\hat{f}_2$ en L^2. Entonces, $\overline{\mathcal{F}}[\psi_j] \to f_2$ en L^2. Entonces, de

$$\left\langle \varphi, \overline{\mathcal{F}}[\psi_j] \right\rangle_{L^2} = \langle \hat{\varphi}, \psi_j \rangle_{L^2}, \qquad j = 1, 2, ...$$

tomando $j \to \infty$, obtenemos que

$$\langle \varphi, f_2 \rangle_{L^2} = \left\langle \hat{\varphi}, \hat{f}_2 \right\rangle_{L^2}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ahora, consideremos una sucesión $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que converge a f_1 en L^2. Entonces

$$\langle \varphi_j, f_2 \rangle_{L^2} = \left\langle \hat{\varphi}_j, \hat{f}_2 \right\rangle_{L^2}, \qquad j = 1, 2, ...$$

Entonces, tomando $j \to \infty$

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} = \left\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \right\rangle_{L^2}.$$

□

6. Operadores diferenciales

Un operador diferencial lineal en derivadas parciales en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es un polinomio de la forma

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

donde los coeficientes $a_\alpha(x) = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ son funciones a valores complejos definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Se trabaja con multiíndices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, donde $|\alpha|$ indica la longitud $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Luego $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. El entero m es el orden del operador, esto asume que para algún multiíndice de longitud $|\alpha| = m$ el coeficiente $a_\alpha(x)$ no es idénticamente cero en Ω. Si los coeficientes a_α son constantes en Ω, se escribe directamente $P(D)$.

Si $P(x, D)$ es un operador diferencial y f una distribución en Ω, el problema de hallar una distribución u en Ω tal que

$$P(x, D) u = f, \tag{52}$$

constituye una *ecuación diferencial en derivadas parciales* (PDE). Si u satisface (52) es una solución de la PDE en Ω.

6.1. Polinomio característico

Considerando la ecuación

$$P(x, D) = f,$$

se tiene que P es un polinomio a coeficientes $a_\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En particular, $\varphi \in \mathcal{S}$. Luego $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ y así se tiene que $\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Entonces $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{-2\pi x \xi} d\xi$ a.e., y por la continuidad de φ, $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\varphi] = \varphi$, ver lema ???. Entonces,

$$\begin{aligned} P(x, D)\varphi(x) &= P(x, D)\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi(x) = P(x, D) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\imath x\cdot\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\imath x\cdot\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\imath x\cdot\xi} \underbrace{(-2\pi\imath\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\imath x\cdot\xi} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x) (-2\pi\imath\xi)^\alpha}_{P(x, -2\pi\imath\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Así, $P(x, -2\pi\imath\xi)$ es el polinomio asociado al operador $P(x, D)$ obtenido de reemplazar formalmente D^α por $(-2\pi\imath\xi)^\alpha$.

La parte homogénea de grado m (grado del operador), es decir,

$$P_m(x, -2\pi\imath\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) (-2\pi\imath\xi)^\alpha,$$

se denomina *polinomio característico* del operador $P(x, D)$.

6.2. Soluciones fundamentales.

Sea ahora la ecuación

$$P(D) = f,$$

en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde la ausencia de la variable x indica que es una ecuación lineal a coeficientes constantes, siendo $P(\xi)$ un polinomio de n variables con coeficientes complejos.

Se dice que una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es una solución fundamental del operador $P(D)$ si

$$P(D) E = \delta.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Todo operador diferencial lineal a coeficientes constantes $P(D)$ tiene una solución fundamental.

En general, un operador lineal posee muchas soluciones fundamentales. Si se toma una arbitraria E_0 y se le suma una solución h de la ecuación homogénea, $E_0 + h$ es nuevamente solución fundamental. Luego, las soluciones fundamentales forman una subvariedad lineal, que no pasa por el origen, del espacio de todas las distribuciones en $\mathbb{R}^n$.

Debido a las propiedades de la transformación de Fourier, es más útil el siguiente resultado:

Todo operador diferencial lineal a coeficientes constantes $P(D)$ tiene una solución fundamental temperada.
$(\exists E \in \mathcal{S}' / P(D) E = \delta.)$

Para analizar esto se tiene el trabajo de Lars Hörmander, " On the division of distribution by polynomials"[6] :

> Dada una distribución T en un abierto Ω de $\mathbb{R}^\nu$ y un función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, dividir T es encontrar una distribución S en Ω tal que
>
> $$T = \varphi S.$$
>
> Se puede también llamar a S una "partie finie" de T/φ.
>
> Cuando $\nu = 1$ la división es posible para toda T si y solo si φ posee sólo ceros aislados de orden finito. Cuando $\nu > 1$, la situación no resulta tan simple. Es el propósito de este trabajo mostrar que la división por un polinomio no idénticamente nulo es siempre posible.
>
> ... si T es una distribución temperada uno puede encontrar una "partie finie" temperada S.
>
> Aplicando la transformada de Fourier se tiene que toda PDE
>
> $$P(D) u = f$$
>
> con coeficientes constantes posee una solución u temperada.

La importancia de las soluciones fundamentales se ve en las propiedades de la convolución. Sean $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene

$$P(D) T = (P(D) \delta) * T,$$

$$P(D)(T * S) = (P(D) T) * S = T * P(D) S.$$

Pensando esto con una solución fundamental E,

$$E * P(D) u = u,$$

$$P(D)(E * f) = f.$$

Luego, la convolución con E se puede pensar como inversa de $P(D)$.

La ecuación

$$P(D) u = f$$

tiene así una solución para cada $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de la forma $E * f$.

Ejemplo 50. *Sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, buscaremos $E(x) := (H(x)e^{\lambda_1 x}) * (H(x)e^{\lambda_2 x})$.*

Completar

Ahora, consideremos el operador

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1\lambda_2,$$

y veamos que E es una solución fundamental del mismo.

Completar

6.3. Ecuaciones hipoelípticas.

Definición 29. *Se dice que el operador diferencial $P\left(x,D\right)$ en Ω es hipoelíptico si dado cualquier subconjunto abierto U de Ω y cualquier distribución $T\in\mathcal{D}'\left(U\right)$ tal que $P\left(x,D\right)T\in\mathcal{C}^\infty\left(U\right)$, resulta $T\in\mathcal{C}^\infty\left(U\right)$.*

Si $P\left(x,D\right)$ es hipoelíptico en Ω, dada cualquier función $f\in\mathcal{C}^\infty\left(U\right)$, las soluciones de la ecuación $P\left(x,D\right)u=f$ en U serán de clase $\mathcal{C}^\infty$. Por eso se dice que la hipoelipticidad es una propiedad de regularidad.

Si P posee coeficientes constantes y E es una solución fundamental resulta $P\left(D\right)E=0$ en el complemento del origen en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n-\{0\}$. Luego, si $P\left(D\right)$ es hipoelíptico, E debe ser una función $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$. Por otro lado, un teorema de Schwartz muestra la recíproca:

Si hay una solución fundamental E de $P\left(D\right)$ que resulta una función $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$, $P\left(D\right)$ es hipoelíptico en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto arbitrario, $u\in\mathcal{D}'(U)$ tal que $P(D)u=f$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en U.

Sea $x_0\in U$. Será suficiente mostrar que bajo las hipótesis, u es una función $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno abierto de x_0. Sea $U'\subset U$ un abierto con $\overline{U'}$ compacto, con $x_0\in U'$ y sea g una función plato, i.e., $g\in\mathcal{D}(U)$ y $g=1$ en U'. Se tiene

$$P(D)(gu)=gP(D)u+v=gf+v.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz para la derivación del producto, se puede ver que v es el producto de una distribución por una combinación lineal de derivadas de g de orden estrictamente positivo. Luego $v=0$ donde se anulan las derivadas de g, en particular en U' y fuera del $\mathtt{supp}(g)$.

Usando la solución fundamental E que existe por hipótesis, se puede escribir

$$E*P(D)(gu)=(P(D)E)*(gu)=gu,$$

entonces

$$gu=E*(gf)+E*v.$$

Pero $gf\in\mathcal{D}(U)$ y la convolución de una distribución con una función de $\mathcal{D}(U)$ es una función de $\mathcal{E}(U)$, luego todo se reduce a probar que $E*v$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de x_0, y así también será cierto para gu que es igual a u en U'.

Sea $\epsilon>0$ tal que

$$V_\epsilon=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,\complement_{\mathbb{R}^n}U')>\epsilon\}\in\mathcal{N}(x_0).$$

Sea

$$\eta_\epsilon\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\qquad \eta_\epsilon(x)=1,|x|\leqq\epsilon/2,\qquad \eta_\epsilon(x)=0,\ \ |x|>\epsilon. \tag{53}$$

Luego

$$E*v=(\eta_\epsilon E)*v+(1-\eta_\epsilon)E*v.$$

El segundo término es una función $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^n$ ya que por hipótesis $(1-\eta_\epsilon)E$ es $\mathcal{C}^\infty$ y la convolución de una distribución a soporte compacto, v con una función de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ es una función de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, por las propiedades de la convolución se tiene

$$\mathtt{supp}\,(\eta_\epsilon E * v) \subset \mathtt{supp}\,(\eta_\epsilon E) + \mathtt{supp}(v).$$

Por las características que tiene η_ϵ resulta $\mathtt{supp}(\eta_\epsilon E * v)$ contenido en un ϵ-entorno de $\mathtt{supp}(v)$. Como $v = 0$ en U' se tiene que $\eta_\epsilon E * v = 0$ en V_ϵ y en consecuencia $E * v$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en V_ϵ. □

6.4. Analiticidad de las soluciones.

Definición 30. *Se dice que el operador diferencial $P\,(x,D)$ en Ω es analítico-hipoelíptico si dado cualquier subconjunto abierto U de Ω y cualquier distribución $T \in \mathcal{D}'\,(U)$ tal que $P\,(x,D)\,T$ coincide con una función analítica*[2] *en U, resulta T una función analítica en U.*

La analítico-hipoelipticidad de un operador diferencial es una propiedad de regularidad: dada la ecuación $P\,(x,D)\,u = f$ en Ω, si $f \in \mathbb{H}\,(U)$, $U \subset \Omega$ y P es analítico-hipoelítico, entonces cualquier solución resulta $u \in \mathbb{H}\,(U)$, funciones holomorfas en U.

Si P además posee coeficientes constantes y E es una solución fundamental, como $P\,(D)\,E = 0$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, E debe ser una función analítica en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Por otro lado, vale la recíproca por un resultado análogo al de la sección anterior:

Si hay una solución fundamental E de $P\,(D)$ que resulta una función analítica en $\mathbb{R}^n - \{0\}$,
$P\,(D)$ es analítico-hipoelíptico en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 51. *El operador del calor no es analítico hipoelíptico. Basta considerar el caso de una variable espacial y tomar $F(x,t)$ en $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ dada por*

$$F(x,t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leqq 0. \end{cases}$$

Completar

6.5. Operadores elípticos.

Se dice que el operador diferencial a coeficientes constantes $P\,(D)$ es elíptico en $\mathbb{R}^n$ si su polinomio característico no se anula fuera de origen, es decir,

$$P_m\,(-2\pi\imath\xi) \neq 0,\ \forall \xi \neq 0.$$

Una condición equivalente a esta es que exista una constante $c > 0$ tal que

$$|P_m\,(-2\pi\imath\xi)| \geq c\,|\xi|^m\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

[2]Una función u a valores complejos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es analítica si su desarrollo en serie de Taylor en cada punto de Ω converge a la función en un entorno del punto. Una definición equivalente es que u puede ser extendida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ como una función analítica de las variables complejas $z_1, \ldots, z_n$, es decir, como una función holomorfa.

Un resultado importante:

> Todo operador elíptico a coeficientes constantes es también analítico - hipoelíptico.

Ver Teorema 16.6 de [9].

6.6. Ecuaciones diferenciales de la física.

6.6.1. Ecuaciones diferenciales de tipo elíptico.

Sea X un espacio euclídeo de dimensión n con un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

✧ La ecuación de Laplace es

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Δ se llama el operador de Laplace. Una solución en un dominio $\Omega \subset X$ se llama función armónica en Ω. Esta ecuación describe el comportamiento de una membrana estable (ecuación estacionaria), un campo electrostático o un campo gravitacional.

El operador de Laplace Δ es un operador positivo, su polinomio característico es proporcional al cuadrado de la norma de la variable en $\mathbb{R}^n$, $4\pi|\xi|^2$, que es una forma cuadrática definida positiva. Su firma (*signature*) es $(n, 0)$, es decir que tiene n autovalores positivos y 0 negativos.

Esto último remarca la estrecha relación que existe entre el operador de Laplace, la norma euclídea, las esferas en $\mathbb{R}^n$, las transformaciones ortogonales, etc. Más aun se tiene que Δ es invariante bajo transformaciones ortogonales, es decir que siendo T una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$(\Delta f)(Tx) = \Delta(f(Tx)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta simetría es una propiedad importante del operador de Laplace y es parte de la razón por la cual está involucrado en muchos fenómenos en medios isotrópicos.

✧ La ecuación de Helmholtz

$$\left(\Delta + \omega^2\right) u = 0.$$

Para $n = 1$ es la ecuación del oscilador armónico.

✧ Sea σ una función en Ω; la ecuación

$$\langle \nabla, \sigma \nabla \rangle \, u = f, \qquad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

es la ecuación electrostática con conductividad σ.

Se tiene que $\langle \nabla, \sigma \nabla \rangle \, u = \sigma \Delta u + \langle \nabla \sigma, \nabla u \rangle$.

✧ La ecuación de Schrödinger estacionaria

$$\left(-\frac{h^2}{2m} \Delta + V(x) \right) \phi = \mathrm{E}\phi.$$

E es la energía de la partícula.

6.6.2. Ecuaciones de ondas. El caso dim $X = 1$

En base a lo anterior se pueden considerar otras formas cuadráticas con distinta firmas. Un caso importante es la forma con todos sus autovalores estrictamente positivos salvo uno que es estrictamente negativo. Conviene considerar esta forma en un espacio de $n+1$ dimensiones notando sus variables $(\xi_1, ..., \xi_n, \tau)$. La forma en cuestión es

$$|\xi|^2 - \tau^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2 - \tau^2, \tag{54}$$

que se corresponde con el operador de ondas, también llamado operador d'Alembert.

✧ La ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0$$

es la ecuación de d'Alembert con coeficientes generales.

✧ Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial V}{\partial X} + L\tfrac{\partial I}{\partial t} + R\tfrac{\partial I}{\partial x} &= 0, \\ \tfrac{\partial I}{\partial x} + C\tfrac{\partial V}{\partial t} + GV &= 0. \end{aligned}$$

representan la relación de V voltaje y I corriente en la línea donde los coeficientes L, C, R, G son la inductancia, la capacitancia, la resistencia y la conductividad del sistema.

✧ La ecuación de la oscilación de una loza

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

6.6.3. Ecuaciones de ondas. El caso dim $X = 2, 3$

✧ La ecuación de ondas en un medio isotrópico - ecuación de una membrana- :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(x)\Delta\right) u(x,t) = 0$$

✧ La ecuación acústica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left\langle \nabla, v^2 \nabla \right\rangle u = 0.$$

✧ La ecuación de ondas en un medio anisotrópico

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) u(x,t) = 0.$$

6.6.4. Ecuaciones de difusión.

✧ La ecuación

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k^2 \Delta_x u(x,t) = f,$$

en $x \times \mathbb{R}$ describe la propagación del calor en X con fuente f.

Se utiliza para describir varios fenómenos de transferencia, como la transferencia del calor en medios isotrópicos. En principio los operadores de onda y del calor pueden parecer similares, y de hecho comparten ciertas propiedades pero también presentan diferencias significativas: las soluciones de la ecuación del calor están asociados a fenómenos de difusión y no a fenómenos de propagación de ondas.

✧ La ecuación

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \langle \nabla, p\nabla \rangle\, u - qu = f,$$

describe la difusión en pequeñas partículas.

✧ La ecuación de Flik

$$\frac{\partial}{\partial t} c + \operatorname{div}(\omega c) = D\Delta c + f,$$

para difusión convectiva acompañada de una reacción química; c es la concentración, f es la producción de una sustancia, ω es la velocidad y D es el coeficiente de difusión.

✧ La ecuación de Schrödinger

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\Delta - V(x) \right) \psi(x,t) = 0,$$

donde $h = 1{,}054\ldots \times 10^{-27}$ erg·sec es la constante de Plank. La función de onda ψ describe el movimiento de una partícula de masa M en un campo exterior de potencial V. La densidad $|\psi(x,t)|^2\, dx$ es la probabilidad de encontrar una partícula en el punto x en el instante t.

6.7. Los operadores básicos.

6.7.1. Operadores diferenciales lineales ordinarios.

Los operadores diferenciales no triviales más simples son los de primer orden, de la forma

$$L = \frac{d}{dx} - aF = \delta, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{55}$$

Se busca entonces una $F \in \mathcal{D}'$, solución de

$$\frac{dF}{dx} - aF = \delta. \tag{56}$$

Si $a = 0$, $F' = \delta$ indica que $F = H + C$, donde H es la distribución Heavyside y $C \in \mathbb{C}$, ya que $H' = \delta$ y $(F - H)' = 0 \Rightarrow F - H = C$.

Análogamente, pensando en la aplicación $F \to e^{-ax}F$, se ve que las soluciones de (55) son $F = E + Ce^{ax}$, donde $E = H(x)\, e^{ax}$ y $C \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dF}{dx} - aF &= \delta, \\
e^{-ax}\left(\tfrac{dF}{dx} - aF\right) &= e^{-ax}\delta, \quad (\operatorname{supp}(\delta) = 0), \\
\tfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}F\right) &= \delta = \tfrac{dH}{dx}, \\
\tfrac{d}{dx}\left(e^{-ax}F - H\right) &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow e^{-ax}F - H &= C.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(x) = e^{ax}H(x) + Ce^{ax}$. Recíprocamente, podemos ver que, dada $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
\langle LF, \varphi \rangle = \left\langle F, -\frac{d}{dx}\varphi - a\varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{ax}H(x) + Ce^{ax}\right)\left(-\frac{d}{dx}\varphi(x) - a\varphi(x)\right) dx \\
&= -\int_0^\infty e^{ax}\left(\frac{d}{dx}\varphi(x) + a\varphi(x)\right) dx - C\int_{\mathbb{R}} e^{ax}\left(\frac{d}{dx}\varphi(x) + a\varphi(x)\right) dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\varphi(x)\right) dx - C\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\varphi(x)\right) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones fundamentales de (56) son de la forma $F = e^{ax}H + Ce^{ax}$, con C constante.

Observaciones:

- Si $C = 0$, $F = E$ es la única solución fundamental de (56) con soporte en $x > 0$.
- Si $C = -1$, F es la única solución fundamental de (56) con soporte en $x < 0$.
- Si $C = \frac{1}{2}$ se obtiene la solución fundamental simétrica $F = \frac{1}{2}\mathrm{sg}\,(x)\, e^{ax}$.
- Las soluciones fundamentales $F = E + Ce^{ax}$ son analíticas en el complemento del origen. Luego, por los resultados ya enunciados, el operador L es analítico-hipoelíptico; todas las soluciones de la ecuación homogénea $Lh = 0$ resultan soluciones clásicas, así como también las soluciones de $Lh = f$, con $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- Estas ideas se pueden generalizar al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y luego a ecuaciones de orden superior.

Ejemplo 52. *Sea I la matriz identidad y A una matriz cualquiera en $\mathbb{R}^{p\times p}$. Definamos el operador:*

$$L = I\frac{\partial}{\partial x} - A$$

y veamos cuales son sus soluciones fundamentales.

Completar

Ejemplo 53. *Consideremos la función $H(s)H(t)$ definida en $\mathbb{R}^2$, entonces $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(s)H(t) = \delta$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.*

Completar

Ejemplo 54. *(agregar otro ejemplo?)*

Completar

6.7.2. El operador de Cauchy - Riemann

La ecuación de Cauchy - Riemann en el plano $\mathbb{R}^2$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0. \tag{57}$$

Reescribiendo $f(x,y)=u(x,y)+\imath\, v(x,y)$, para f funciones diferenciables a valores complejos, resulta (57) equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y} &= 0, \end{cases}$$

Efectuando un cambio de variables

$$\left[\begin{array}{lcl} z &=& x+\imath y, \\ \bar{z} &=& x-\imath y. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{lcl} x &=& \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \\ y &=& \frac{1}{2\imath}(z-\bar{z}). \end{array}\right. \quad f(x,y)\leftrightarrow f(z,\bar{z}).$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x} f(z,\bar{z}) &= \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\ \tfrac{\partial}{\partial y} f(z,\bar{z}) &= (-\imath)\left(-\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial x}+\imath\frac{\partial f}{\partial y} &= 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Luego, el operador de Cauchy - Riemann resulta

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\imath\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

siendo $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\imath\frac{\partial}{\partial y}\right)$ el anti-operador de Cauchy - Riemann.[3]

Así, la ecuación (57) es equivalente a $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$; cualquier solución f es independiente de $\bar{z}$.

El polinomio asociado al operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ es ...

Completar

Al igual que el del operador de Laplace, éste sólo se anula en el origen, por lo que el operador resulta elíptico.

Para buscar una solución fundamental, es decir, $E\in\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial x}+\imath\frac{\partial E}{\partial y}\right)=\delta=\delta(x)\otimes\delta(y),$$

se transforma la ecuación mediante Fourier respecto de la variable y ...

Completar

[3]Observación: con este cambio de variables resulta $4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}=\Delta$, el laplaciano.

6.7.3. El operador del calor

Se quiere encontrar las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E = \delta, \quad \text{en } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Para ello se utiliza la transformada de Fourier con respecto a las variables espaciales x, pensando

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x,t) - \Delta_x E(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t).$$

Resulta la ecuación

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(\xi,t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \tilde{E}(\xi,t) = \mathbf{1}(\xi) \otimes \delta(t). \tag{58}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}(\xi,t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \tilde{E}(\xi,t)\right) &= e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\left(\mathbf{1}(\xi) \otimes \delta(t)\right) = \\
&= \mathbf{1}(\xi) \otimes \delta(t), \\
\frac{d}{dt}\left(e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\tilde{E}(\xi,t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(1(\xi) \otimes H(t)\right), \\
e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\tilde{E}(\xi,t) - \mathbf{1}(\xi) \otimes H(t) &= C(\xi) \otimes \mathbf{1}(t).
\end{aligned}$$

Siendo $C(\xi)$ una distribución arbitraria de ξ, se puede elegir $C(\xi) \equiv 0$. Se tiene así una solución de (58),

$$\tilde{E}(\xi,t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\left(\mathbf{1}(\xi) \otimes H(t)\right) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} H(t). \tag{59}$$

Como $\tilde{E}$ es temperada, se puede realizar la transformada de Fourier inversa para recuperar E.

Puesto que

$$\begin{aligned}
& -2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k - 4\pi^2 t \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = -4\pi^2 t \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 2\frac{\pi\imath}{4\pi^2 t} x_k \xi_k\right) = \\
&= -4\pi^2 t \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 2\frac{\pi\imath}{4\pi^2 t} x_k \xi_k - \frac{1}{16\pi^2 t^2} x_k^2\right) - 4\pi^2 t \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{16\pi^2 t^2} x_k^2 = \\
&= -4\pi^2 t \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k + \frac{\imath}{4\pi t} x_k\right)^2 - \frac{1}{4t} \sum_{k=1}^{n} x_k^2,
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}\left[\tilde{E}(\xi,t)\right](x,t) &= H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} e^{-2\pi\imath\xi x} d\xi = \\
&= H(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t\left|\xi + \frac{\imath}{4\pi t}x\right|^2} d\xi \; e^{-\frac{1}{4t}|x|^2} = \\
&= H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-4\pi^2 t\left(\xi_k + \frac{\imath}{4\pi t}x_k\right)^2} d\xi_k = \\
&= H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4\pi^2 t}}\right)^n = H(t)\,(4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Resulta así $E(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Toda solución de la ecuación del calor se consigue añadiendo a E una solución de la ecuación homogénea del calor.

Propiedades de E:

① $E(x,t)$ es invariante bajo rotaciones espaciales, ya que depende sólo de $|x|^2$.

② $E(x,t) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\right)$. Para ver esto alcanza con mostrar que todas las derivadas parciales de $t^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}$ tienden a cero cuando $t \searrow 0$:

$$\left(-\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \overset{t\searrow 0}{\to} 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$
$$t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{-1}{4t}2x_j\right) = -\frac{x_j}{2}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \overset{t\searrow 0}{\to} 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

E no se anula si $t > 0$ y $E \equiv 0$ si $t < 0$, por lo que E no puede ser analítica en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ (aunque sí lo sea en la región $t \neq 0$). El operador del calor resulta entonces hipoelíptico pero no analítico - hipoelíptico.

Para verificar que $E(x,t) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} H(t)\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es una solución fundamental se observa que

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leqq r}\int_{0<t\leqq r}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}dt\ dx &= \int_0^r\int_{|x|\leqq r} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}dt = \\ =\int_0^r\int_{|y|\leqq\frac{r}{2\sqrt{t}}} e^{-|y|^2}dy\pi^{-n/2}dt &\leqq \pi^{1/2-n/2}r < \infty.\end{aligned}$$

Como además de continua en $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{t=0\}$ resulta integrable en $B_r(0)\ \forall r>0$, es $E(x,t) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, por lo que actúa como distribución vía la integral como una distribución regular.

Sea ahora $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, luego $\mathtt{supp}(\varphi) \subset \{(x,t) : |x| \leqq R, |t| \leqq R\}$ para cierto $R > 0$.

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E, \varphi\right\rangle &= \left\langle\frac{\partial E}{\partial t}, \varphi\right\rangle - \langle\Delta_x E, \varphi\rangle = \\ &= -\left\langle E, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle - \langle E, \Delta_x\varphi\rangle = \\ &= -\left\langle E, \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Delta_x\varphi\right\rangle = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^R\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + \Delta_x\varphi(x,t)\right)dtdx = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\int_\epsilon^R\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + \Delta_x\varphi(x,t)\right)dtdx = \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\left\{\underbrace{\int_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\int_\epsilon^R\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dtdx}_{I} + \right. \\ &\left. + \underbrace{\int_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\int_\epsilon^R\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\Delta_x\varphi(x,t)\,dtdx}_{II}\right\}\end{aligned}$$

Además,

$$\int_\epsilon^R E\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = E\varphi|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R\frac{\partial E}{\partial t}\varphi dt = -E(x,\epsilon)\,\varphi(x,\epsilon) - \int_\epsilon^R\varphi\frac{\partial E}{\partial t}dt,$$

reemplazando,

$$I = -\int_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}E(x,\epsilon)\,\varphi(x,\epsilon)\,dx - \int_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\int_\epsilon^R\varphi(x,t)\frac{\partial E}{\partial t}(x,t)\,dtdx.$$

Por otro lado, utilizando el teorema de Green, se tiene

$$\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}(E\Delta_x\varphi-\varphi\Delta_x E)\,dx=\int\limits_{|x|=\epsilon}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\varphi\frac{\partial E}{\partial\eta}\right)d\sigma.$$

Como el gradiente resulta $\nabla E(x,t)=(4\pi t)^{-n/2}\dfrac{-2}{4t}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$ y el vector normal en la cáscara interior es $\eta=\dfrac{-x}{|x|}$, se tiene

$$\left.\frac{\partial E}{\partial n}\right|_{|x|=\epsilon}=\left.\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\left(\frac{2\,|x|}{4t}\right)\right|_{|x|=\epsilon}=\frac{\epsilon}{2t}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}.$$

Entonces,

$$\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}(E\Delta_x\varphi-\varphi\Delta_x E)\,dx=\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\sigma-\frac{\epsilon}{2t}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\varphi d\sigma.$$

Por lo que reemplazando,

$$II=\int\limits_{\epsilon}^{R}\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\varphi\Delta_x E dx dt+\int\limits_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\sigma dt-\int\limits_{\epsilon}^{R}\frac{\epsilon}{2t}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\varphi d\sigma dt.$$

$$\left\langle\frac{\partial E}{\partial t}-\Delta_x E,\varphi\right\rangle=\lim_{\epsilon\to o^+}\left\{\underbrace{\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}\int\limits_{\epsilon}^{R}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-\Delta_x E\right)\varphi dt dx}_{❶}+\underbrace{\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}E\left(x,\epsilon\right)\varphi\left(x,\epsilon\right)dx}_{❷}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int\limits_{\epsilon}^{R}\frac{\epsilon}{2t}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\varphi d\sigma dt-\int\limits_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{|x|=\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\sigma dt}_{❸}\right\}.$$

Como $E\left(x,t\right)=\dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}$ satisface la ecuación homogénea del calor en el sentido clásico en $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, resulta ❶ igual a cero.

Para el segundo sumando,

$$\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}E\left(x,\epsilon\right)\varphi\left(x,\epsilon\right)dx=\tfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi\epsilon}\right)^n}\int\limits_{\epsilon\leqq|x|\leqq R}e^{-\pi\left(\frac{|x|}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\right)^2}\varphi\left(x,\epsilon\right)dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi|y|^2}\varphi\left(2\sqrt{\pi\epsilon}y,\epsilon\right)\chi_{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}\leqq|y|\leqq\frac{R}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\right\}}\left(y\right)dy.$$

Como el integrando está acotado por $Me^{-\pi|y|^2}\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ independiente de ϵ, se puede pasar el límite dentro de la integral. Entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}❷=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi|y|^2}\varphi\left(0\right)\chi_{\mathbb{R}^n}\left(y\right)dy=\varphi\left(0\right).$$

Por otro lado, como

$$\int\limits_{|x|\leq\epsilon}dx=\int\limits_{0}^{\epsilon}\left(\int\limits_{\Sigma_r}d\sigma\right)dr=\int\limits_{0}^{\epsilon}\int\limits_{\Sigma}r^{n-1}d\sigma dr=$$
$$=|\Sigma|\int\limits_{0}^{\epsilon}r^{n-1}dr=|\Sigma|\,\tfrac{\epsilon^{n-1}}{n},$$

donde $|\Sigma|$ indica la superficie de la cáscara de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, considerando además que $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right| = |\nabla\varphi \times \bar{\eta}| \leqq K$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|❸| &\leqq \int_\epsilon^R \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \underbrace{\int_{|x|=\epsilon} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| d\sigma}_{\leqq M\epsilon^{n-1}} dt + \int_\epsilon^R \tfrac{\epsilon}{2t} \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \underbrace{\int_{|x|=\epsilon} |\varphi|\, d\sigma}_{\leqq M\epsilon^{n-1}} dt \leqq \\
&\leqq M\epsilon^{n-1} \int_\epsilon^R \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \left(\tfrac{\epsilon}{2t}+1\right) dt \leqq M\epsilon^{n-1} \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4\epsilon}}}{\left(2\sqrt{\pi\epsilon}\right)^n} \left(1+\tfrac{\epsilon}{2\epsilon}\right) R \leqq \\
&\leqq \frac{M}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^n} \tfrac{3}{2} R\epsilon^{n-1-\frac{n}{2}} \overset{n>2,\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

Para el caso de $n=2$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|❸| &\leqq \int_\epsilon^R \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{4\pi t} \underbrace{\int_{x^2+y^2=\epsilon^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| d\sigma}_{\leqq 2\epsilon\pi M} dt + \int_\epsilon^R \frac{\epsilon}{4t} \frac{e^{-\frac{\epsilon^2}{4t}}}{4\pi t} \underbrace{\int_{x^2+y^2=\epsilon^2} |\varphi|\, d\sigma}_{\leqq 2\epsilon\pi M} dt \leqq \\
&\leqq \int_\epsilon^R \frac{e^{-\frac{\epsilon}{4t}}}{2t} \epsilon M dt + \int_\epsilon^R \frac{\epsilon}{4t} \frac{e^{-\epsilon/4t}}{4\pi t} 2\epsilon\pi M dt = \\
&= \frac{\epsilon M}{2} \int_\epsilon^R \frac{e^{-\frac{\epsilon}{4t}}}{t} dt + \frac{\epsilon}{2} M\, e^{-\frac{\epsilon}{4t}}\Big|_\epsilon^R \overset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

pues se puede ver que $\epsilon \int_\epsilon^R \frac{e^{-\epsilon/4t}}{t} dt \to 0$ utilizando el teorema de L'Hopital.

$$
\therefore\ \left\langle \frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E, \varphi \right\rangle = \varphi(0).
$$

6.7.4. El operador de Schrödinger

El operador de Schrödinger a coeficientes constantes en n-variables espaciales es

$$\frac{1}{\imath}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x.$$

Aunque la única diferencia con el operador del calor sea el factor $\imath^{-1}$ en $\frac{\partial}{\partial t}$, las soluciones de sendas ecuaciones exhiben comportamientos muy diferentes.

Análogamente al caso de la ecuación del calor, se busca E tal que

$$\frac{1}{\imath}\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E = \delta \quad \text{en } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Por la transformada de Fourier se tiene que...

Completar

6.7.5. El operador de ondas

Considerando, en un espacio (n+1)-dimensional $\mathbb{R}_{n+1}$ donde las variables se indican con $(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$, la forma

$$|\xi|^2 - t^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 - t^2, \tag{60}$$

ésta se corresponde al operador diferencial, con variables $(x_1, \ldots, x_n, t)$,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2.$$

Este es el operador de ondas, a veces llamado de D'Alembert. Las x_j son llamadas las variables espaciales y t la variable de tiempo. Es el operador usado para describir fenómenos de oscilación y propagación de ondas.

Las operaciones lineales en $\mathbb{R}^{n+1}$ que conmutan con $\Box$ son las mismas que las transformaciones lineales en el espacio dual $\mathbb{R}_{n+1}$ que dejan invariante la forma cuadrática (60). Éstas forman un grupo muy utilizado en física para la teoría de la relatividad, el grupo de Lorentz.

El caso $n = 1$ es bastante elemental.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta\,(t) \otimes \delta\,(x)\,. \tag{61}$$

Es conveniente el cambio de variables

$$s = t - x, \quad y = t + x.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\varphi\,(t, x)$ y $\varphi^\natural\,(s, y)$ sus expresiones en las distintas variables, es decir,

$$\varphi\,(t, x) = \varphi^\natural\,(t - x, t + x)\,, \quad \varphi^\natural\,(s, y) = \varphi\left(\frac{s + y}{2}, \frac{y - s}{2}\right).$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\left(\frac{s + y}{2}, \frac{y - s}{2}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left(\frac{s + y}{2}, \frac{y - s}{2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial s \partial y}\varphi^\natural\,(s, y)\,.$$

Entonces

$$\langle E, \varphi\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} E\,(t, x)\,\varphi\,(t, x)\,dtdx = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} E\left(\frac{s + y}{2}, \frac{y - s}{2}\right)\varphi^\natural\,(s, y)\,ds\;dy.$$

Así, la distribución E queda definida en las variables s, y por

$$E^\natural\,(s, y) = \frac{1}{2}E\left(\frac{s + y}{2}, \frac{y - s}{2}\right).$$

El problema es ahora encontrar una $E^\natural$ solución de

$$4\frac{\partial^2}{\partial s \partial y}E^\natural = \delta\,(s) \otimes \delta\,(y)\,, \tag{62}$$

siendo luego $E\,(t, x) = 2E^\natural\,(t - x, t + x)$. Reescribiendo,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(4\frac{\partial E^\natural}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(H(s) \otimes \delta(y)\right),$$

luego,

$$4\frac{\partial E^\natural}{\partial y} - H(s) \otimes \delta(y) = \mathbf{1}(s) \otimes C_1(y).$$

Eligiendo $c_1 \equiv 0$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4E^\natural(s, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(H(s) \otimes H(y)\right),$$

por lo que

$$4E^{\natural}(s,y) - H(s)\otimes H(y) = C_2(s)\otimes \mathbf{1}(y).$$

Entonces, eligiendo adecuadas distribuciones C_1 y C_2, las soluciones de (62) resultarán sumas de:

$$E_1^{\natural} = \frac{1}{4}H(s)\otimes H(y), \qquad E_2^{\natural} = -\frac{1}{4}H(-s)\otimes H(y),$$

$$E_3^{\natural} = -\frac{1}{4}H(s)\otimes H(-y), \qquad E_4^{\natural} = \frac{1}{4}H(-s)\otimes H(-y).$$

Así se consigue la solución fundamental E_1 del operador de ondas en $\mathbb{R}^2$,

$$E_1(t,x) = \frac{1}{2}H(t-x)H(t+x).$$

El soporte de E_1 es el sector $\begin{cases} t+x \geq 0, \\ t-x \geq 0, \end{cases}$ y la función $E_1(t,x)$ es constantemente igual a $\frac{1}{2}$ en el interior de ese sector. Luego, su soporte singular, es decir, el menor conjunto cerrado fuera del cual es una función suave, es exactamente igual al borde de ese sector, esto es la unión de los rayos $\begin{cases} t+x=0, \\ t\geq 0, \end{cases}$ y $\begin{cases} x-t=0, \\ t\geq 0, \end{cases}$.

Análogamente para las soluciones E_2, E_3 y E_4 conseguidas al transformar $E_2^{\natural}$, $E_3^{\natural}$ y $E_4^{\natural}$.

Para el caso general, considerando $x\in\mathbb{R}^n$, después de transformar la ecuación (61) mediante la transformada de Fourier respecto de las variables espaciales, queda

$$\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2} + 4\pi^2|\xi|^2\tilde{E} = \delta(t)\otimes\mathbf{1}(\xi). \tag{63}$$

Pasando al sistema de ecuaciones de primer orden asociado,

$$u_1 := \tilde{E}, \quad u_2 := \frac{\partial\tilde{E}}{\partial t} = u_1', \quad \frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial t^2} = u_2' = -4\pi^2|\xi|^2\tilde{E} = -4\pi^2|\xi|u_1.$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\pi^2|\xi|^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{pmatrix}, \quad \jmath = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= M\mathbf{u}+\mathbf{f}, \\
\tfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} &= M\mathbf{u}+\delta(t)\jmath, \\
e^{-Mt}\left(\tfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - M\mathbf{u}\right) &= e^{-Mt}\delta(t)\jmath = \delta(t)\jmath, \\
\tfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{-Mt}\mathbf{u}\right) &= \delta(t)\jmath = \tfrac{\partial}{\partial t}H(t)\jmath \Rightarrow \\
&\Rightarrow e^{-Mt}\mathbf{u} - H(t)\jmath = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}\in\mathbb{R}^2. \\
&\therefore \quad \mathbf{u} = H(t)e^{Mt}\jmath + e^{Mt}\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Tomando $\mathbf{c}=0$, se tiene $\mathbf{u} = H(t)e^{Mt}\jmath$.
Siendo

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi|\xi|t) & \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \\ -2\pi|\xi|\sin(2\pi|\xi|t) & \cos(2\pi|\xi|t) \end{pmatrix},$$

se tiene

$$e^{Mt}\jmath = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \\ \cos(2\pi|\xi|t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = H(t)\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \\ \cos(2\pi|\xi|t) \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \tilde{E} = H(t)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}.$$

Se obtiene así una solución fundamental con soporte en la semirrecta $t \geqq 0$,

$$\tilde{E}_+(t,\xi) = H(t)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}. \tag{64}$$

Análogamente, considerando $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, se puede conseguir una solución con soporte en $t \leqq 0$,

$$\tilde{E}_{-} = -H(-t) \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}. \tag{65}$$

Combinando estas dos soluciones, se obtienen más soluciones de la forma

$$\tilde{E} = \alpha(\xi) \tilde{E}_{+} + \beta(\xi) \tilde{E}_{-}, \tag{66}$$

donde α, β son funciones medibles acotadas, o distribuciones temperadas de $\xi \in \mathbb{R}^n$, tales que verifican $\alpha + \beta = 1/2$ para que $\tilde{E}$ sea solución de (63). Las distribuciones $\tilde{E}$ dadas por (66) son temperadas, como resulta de (64) y (65).

Para conseguir E_+ se necesitaría aplicar la transformada inversa de Fourier. Sea $\varphi(x)$ una función test. Se tiene

$$\begin{aligned} \langle E_+(t,x), \varphi(x) \rangle &= \left\langle \bar{\mathcal{F}}_\xi \tilde{E}_+(t,\xi), \varphi(\xi) \right\rangle = \\ &= \left\langle \tilde{E}_+(t,\xi), \left(\bar{\mathcal{F}}\varphi\right)(\xi) \right\rangle = \\ &= \int \tilde{E}_+(t,\xi) \left(\bar{\mathcal{F}}\varphi\right)(\xi)\, d\xi = \\ &= \int \tilde{E}_+(t,\xi) \left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \varphi(x) dx\right) d\xi, \end{aligned} \tag{67}$$

e «invirtiendo formalmente» el orden de integración se obtendría

$$\begin{aligned} \langle E_+(t,x), \varphi(x) \rangle &= \int \left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \tilde{E}_+(t,\xi)\, d\xi\right) \varphi(x) dx = \\ &= \left\langle \int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \tilde{E}_+(t,\xi)\, d\xi, \varphi(x) \right\rangle, \end{aligned}$$

resultando

$$E_+(t,x) = \int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \tilde{E}_+(t,\xi)\, d\xi.$$

Sin embargo, no es posible invertir el orden de integración en (67), pues la función

$$e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \tilde{E}_+(t,\xi) \varphi(x) = H(t) e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \varphi(x)$$

no es integrable en $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$.

En efecto,

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi} \left| H(t) e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \varphi(x) \right| dx\, d\xi = \\ &= H(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi} \frac{|\sin(2\pi |\xi| t)|}{2\pi |\xi|} |\varphi(x)|\, dx\, d\xi = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi} \frac{|\sin(2\pi |\xi| t)|}{2\pi |\xi|} |\varphi(x)|\, dx\, d\xi & \text{si } t > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

siendo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi} \frac{|\sin(2\pi |\xi| t)|}{2\pi |\xi|} |\varphi(x)|\, dx\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} |\varphi(x)|\, dx \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \frac{|\sin(2\pi |\xi| t)|}{2\pi |\xi|} d\xi = +\infty.$$

Se introduce entonces un factor de convergencia en la integral de (67), más precisamente, se considera la integral

$$\int \tilde{E}_+(t,\xi) e^{-\epsilon|\xi|} \left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \varphi(x) dx\right) d\xi,$$

donde $\epsilon > 0$.

Se tiene que en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$e^{-\epsilon|\xi|} \tilde{E}_+(t,\xi) \stackrel{\epsilon \to 0_+}{\longrightarrow} \tilde{E}_+(t,\xi).$$

En efecto, si $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \left\langle e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi), \psi(\xi)\right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \odot$$

y es lícito pasar el límite bajo el signo integral, pues

$$\left| e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,\psi(\xi)\right| \leqq \mathrm{cte}\,|\psi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

y la constante es independiente de $\epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\odot = \int \tilde{E_+}(t,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \left\langle \tilde{E_+}(t,\xi), \psi(\xi)\right\rangle.$$

Si ahora se considera

$$\psi(\xi) = \bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi) = \int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx,$$

se tiene

$$\begin{gathered}\left\langle \tilde{E_+}(t,\xi), \bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi)\right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \left\langle e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi), \bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi)\right\rangle = \\ \lim_{\epsilon \to 0_+} \int e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\left(\textstyle\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx\right)d\xi. \end{gathered} \tag{68}$$

En (68) es lícito invertir el orden de integración. Se obtiene así

$$\begin{aligned} &\int e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx\right)d\xi = \\ &= \int \tilde{E_+}(t,\xi)\,e^{-\epsilon|\xi|}\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx\right)d\xi = \\ &= \int\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle}e^{-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)dx = \\ &= \int\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Reemplazando en (68), resulta

$$\left\langle \tilde{E_+}(t,\xi), \bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi)\right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)dx,$$

o sea,

$$\langle E_+(t,x), \varphi(x)\rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int\left(\int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,d\xi\right)\varphi(x)dx,$$

lo que significa que

$$E_+(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle-\epsilon|\xi|}\tilde{E_+}(t,\xi)\,d\xi,$$

en el sentido de las distribuciones.

Si $t < 0$, $\tilde{E_+}(t,\xi) = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ y resulta

$$E_+(t,x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{69}$$

Si $t > 0$, en este caso

$$\tilde{E_+}(t,\xi) = \frac{\sin(2\pi|\xi|\,t)}{2\pi|\xi|} = \frac{e^{2\pi\imath|\xi|t} - e^{-2\pi\imath|\xi|t}}{4\pi\imath|\xi|},$$

y resulta

$$\begin{aligned} E_+(t,x) &= \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath\langle x,\xi\rangle-\epsilon|\xi|}\frac{e^{\imath|\xi|t} - e^{-\imath|\xi|t}}{2\imath|\xi|}d\xi = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{4\pi\imath|\xi|}\left[e^{-2\pi\imath\left(\langle x,\xi\rangle - \frac{\langle\xi,\xi\rangle}{|\xi|}t\right)} - e^{-2\pi\imath\left(\langle x,\xi\rangle + \frac{\langle\xi,\xi\rangle}{|\xi|}t\right)}\right]d\xi = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{4\pi\imath|\xi|}\left[e^{-2\pi\imath\left\langle\left(x - \frac{\xi}{|\xi|}t\right),\xi\right\rangle} - e^{-2\pi\imath\left\langle\left(x + \frac{\xi}{|\xi|}t\right),\xi\right\rangle}\right]d\xi. \end{aligned} \tag{70}$$

Se puede resumir (69) y (70) poniendo

$$E_+(t,x) = H(t)\mathcal{U}(t,x),$$

donde

$$\mathcal{U}(t,x) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\epsilon|\xi|}}{4\pi\imath\,|\xi|} \left[e^{-2\pi\imath\left\langle \left(x - \frac{\xi}{|\xi|}t\right), \xi \right\rangle} - e^{-2\pi\imath\left\langle \left(x + \frac{\xi}{|\xi|}t\right), \xi \right\rangle} \right] d\xi,$$

y el límite debe entenderse en el sentido de la convergencia en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, resumiendo lo desarrollado,

$$\langle E_+(t,x), \varphi(t,x) \rangle = \left\langle \tilde{E}_+(t,\xi), \bar{\mathcal{F}}\varphi(\xi) \right\rangle .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_+(t,x) &= \int_{\mathbb{R}_n} e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \tilde{E}_+(t,\xi)\, d\xi = \\ &= H(t) \int_{\mathbb{R}_n} e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \frac{\sin(2\pi\,|\xi|\,t)}{2\pi\,|\xi|} d\xi = \\ &= H(t) \int_{\mathbb{R}_n} e^{-2\pi\imath\langle x,\xi\rangle} \left(e^{2\pi\imath|\xi|t} - e^{-2\pi\imath|\xi|t} \right) \tfrac{d\xi}{4\pi\imath|\xi|} = \\ &= H(t) \int_{\mathbb{R}_n} \exp\left(-2\pi\imath \left\langle \xi, x - \tfrac{\xi}{|\xi|}t \right\rangle\right) - \exp\left(-2\pi\imath \left\langle \xi, x + \tfrac{\xi}{|\xi|}t \right\rangle\right) \tfrac{d\xi}{4\pi\imath|\xi|}. \end{aligned}$$

interpretando todas estas integrales con un factor de convergencia $\exp(-\epsilon\,|\xi|)$ escondido, como en el caso del operador anterior.

6.7.6. El operador de Laplace

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, el operador de Laplace es

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2.$$

En ciertos casos se puede encontrar que el operador de Laplace es definido como $-\Delta$. Esto se debe a que $-\Delta$ es un operador positivo, su transformada de Fourier es el cuadrado de la norma de la variable en $\mathbb{R}_n$, $|\xi|^2$.

Se podría proceder como en las secciones precedentes y reducir el problema a resolver una ecuación ordinaria con respecto a alguna de las variables, por ejemplo x_n, luego de una adecuada transformación de Fourier respecto a las $n-1$ primeras variables. Pero en este caso esto resultaría antinatural. Al elegir una de las variables se rompe la simetría básica de la ecuación, El operador de Laplace se utiliza justamente en varias ecuaciones que modelizan fenómenos físicos que tienen lugar en un medio isotrópico. Es así más conveniente usar un método que tenga en cuenta que este operador es invariante bajo rotaciones. La variable a utilizar es la variable radial

$$r = |x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}.$$

Las soluciones de $\Delta u = 0$ son las clásicas, llamadas funciones armónicas. Se puede empezar por analizar las funciones armónica radiales, $u(x) = U(r)$, $r = |x| > 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = U'(r)\frac{x_j}{|x|}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = U''(r)\left(\frac{x_j}{r}\right)^2 + U'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right)$$

$$\therefore \Delta u = U''(r) + \frac{n-1}{r}U'(r) = 0.$$

$$rU''(r) + (n-1)U'(r) = 0, \ r > 0.$$

Si $n = 2$,

$$\begin{aligned} rU''(r) + U'(r) &= 0, \\ (rU')' &= 0, \\ rU' &= c_1, \\ \therefore \quad U(r) &= c_1 \log r + c_2. \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} rU''(r) + (n-1)U'(r) &= 0, \\ r^{n-1}U''(r) + (n-1)r^{n-2}U'(r) &= 0, \\ \left(r^{n-1}U'\right)' &= 0, \\ r^{n-1}U' &= c_1, \\ U' &= c_1 r^{1-n}, \\ \therefore \quad U(r) &= c_1 r^{2-n} + c_2. \end{aligned}$$

Si se tiene una solución fundamental E, $E + u$ también será solución fundamental si u es armónica.

En base a la idea de buscar soluciones invariantes bajo rotaciones, se observa que las únicas funciones armónicas radiales que lo cumplen son las constantes.

Como el polinomio característico de la ecuación $\Delta E = \delta$ resulta $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ que obviamente se anula sólo en el origen, el operador de Laplace es de tipo elíptico. Por los resultados ya mencionados, este operador es analítico - hipoelíptico.

Consiguiendo una solución fundamental del operador de Laplace invariante bajo rotaciones, resultará que toda otra solución fundamental también invariantes bajo rotaciones diferirá de ella en una constante.

Sea u una distribución en $\mathbb{R}^n$ definida por una función localmente integrable que dependa sólo de r, indicada por $f(r)$. Entonces, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \int f(r)\varphi(x)\,dx = \iint f(r)\varphi(r\dot{x})\,r^{n-1}dr d\dot{x} = \\ &= \left|S^{n-1}\right| \int_0^\infty f(r)\varphi_\natural(r)\,r^{n-1}dr, \end{aligned} \tag{71}$$

donde $\varphi_\natural(r) = \varphi_\natural(x)$, siendo para una ψ localmente integrable

$$\psi_\natural(x) = \left|S^{n-1}\right|^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \psi(r\dot{x})\, d\dot{x}.$$

la función promedio de ψ sobre la esfera de radio $r = |x|$ y $\left|S^{n-1}\right|$ la medida de la cáscara de S^{n-1}, esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Utilizando los cálculos anteriores y reemplazando φ por $\Delta\varphi$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle u, \Delta\varphi\rangle &= \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty f(r)\,(\Delta\varphi)_\natural(r)\, r^{n-1} dr = \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty f(r) \left(\tfrac{d}{dr} + \tfrac{n-1}{r}\right) \tfrac{d\varphi_\natural}{dr}(r)\, r^{n-1} dr = \\
&= \left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty f(r)\, \tfrac{d}{dr}\left(r^{n-1}\tfrac{d\varphi_\natural}{dr}\right) dr.
\end{aligned}$$

Asumiendo que f es derivable con respecto a r y también localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, integrando por partes se tiene

$$\langle u, \Delta\varphi\rangle = -\left|S^{n-1}\right| \int\limits_0^\infty \frac{df}{dr}\frac{d\varphi_\natural}{dr} r^{n-1} dr.$$

Observando que

$$-\int\limits_0^\infty \frac{d\varphi_\natural}{dr} dr = \varphi_\natural(0) = \varphi(0),$$

se necesitaría determinar un f localmente integrable que dependa sólo de r y verifique

$$r^{n-1}\frac{df}{dr} = \left|S^{n-1}\right|^{-1}, \quad r > 0,$$

consiguiendo así

$$\langle u, \Delta\varphi\rangle = \langle \Delta u, \varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle.$$

Revisando los cálculos anteriores, se consigue una solución particular al tomar $f(x) = F(r)$, con

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log r, & \text{si } \; n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\left|S^{n-1}\right|}\frac{1}{r^{n-2}} & \text{si } \; n \geq 3. \end{cases}$$

Como el elemento de volumen en $\mathbb{R}^n$ puede ser visto como $r^{n-1}\; dr\; d\theta$, se ve que $f(r)$ resulta localmente integrable así como también sus derivadas con respecto a r.

Reescribiendo la solución fundamental E de Δ definida por la función $F(r)$, de (71) se tiene

$$\langle E, \varphi\rangle = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \varphi_\natural(r)\, r\log r\; dr, & \text{si } \; n = 2, \\ \\ -\frac{1}{n-2}\int\limits_0^\infty \varphi_\natural(r)\, r\; dr & \text{si } \; n \geq 3. \end{cases}$$

Referencias

[1] Robert A. Adams. Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[2] Lolina Alvarez Alonso. Distribution Theory and Fourier Transform. Cuadernos de Matemática y Mecánica - IMAL - CIMEC, 2000.

[3] Lawrence C. Evans. Partial differential equations. American Mathematical Society, 1998.

[4] Julien Garsoux. Espaces vectoriels topologiques et distributions. Dunod, 1963.

[5] D.H. Griffel. Applied functional analysis. Ellis Horwood Ltd., Publishers, 1981.

[6] Lars Hörmander. On the division of distribution by polynomials. Arkiv för Matematik, 3(53):555–568, 1958.

[7] Lars Hörmander. Linear Partial Differential Operators. Springer - Verlag, 1976.

[8] Lars Hörmander. The analysis of linear partial differential operators. Springer - Verlag, 1990.

[9] Johan Kolk Johannes Duistermaat. Distributions: Theory and Applications. Editorial Springer, 2006.

[10] Roberto Cignoli Mischa Cotlar. Nociones de Espacios Normados. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1967.

[11] Halsey Royden. Real Analysis. The Macmillan Company, 1968.

[12] Walter Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1987.

[13] Walter Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, Inc, 1991.

[14] Laurent Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, 1957.

[15] Vidar Thomée Stig Larsson. Partial differential equations with numerical methods. Springer - Verlag, 2003.

[16] Francois Treves. Basic linear partial differential equations. Academic Press, 1975.

[17] Kôsaku Yosida. Functional analysis. Springer - Verlag, 1980.

[18] Armen H. Zemanian. Distribution theory and transform analysis. Mc Graw - Hill, inc., 1965.