

Escuelas Matemáticas

Algunos casos notables que influyeron en nuestra forma de pensar, aprender, enseñar e investigar

Encuentros Matemáticos – Lisandro Parente

26 de marzo de 2021



Orígenes y primeros desarrollos

Evidencias de utilización de números

Marcas en huesos siguiendo patrones numéricos

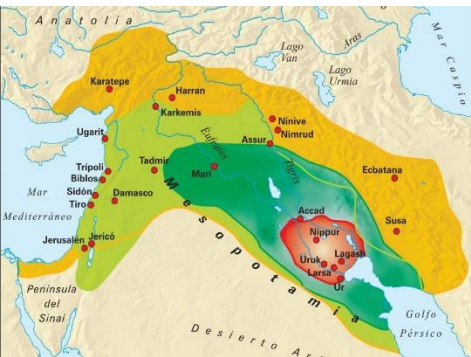


Hueso de Lebombo (Suazilandia) 43000 a 44200 años



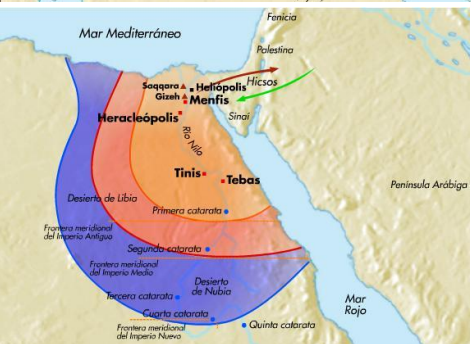
Hueso de Dolni Vestonice (Chequia) 35000 a.

Hueso de Ishango (Congo) 20000 a.



Civilización mesopotámica: Primer desarrollo conocido de la escritura (3400 a 3200 aC)

- ✓ Sistema de numeración sexagesimal, aditivo, basado en dos símbolos cuneiformes
- ✓ Notables avances en aritmética y álgebra
- ✓ Geometría elemental (teorema de Pitágoras, áreas simples, ternas pitagóricas, semejanza de triángulos)



Civilización egipcia: escritura jeroglífica (3000 aC)

- ✓ Sistema de numeración decimal
- ✓ Gran desarrollo de la geometría
- ✓ Aritmética y álgebra elemental
- ✓ Se conocen algunos nombres (Imhotep – Ahmes)



CONOCIMIENTO EMPÍRICO, NO APARECEN EVIDENCIAS DE DEMOSTRACIONES

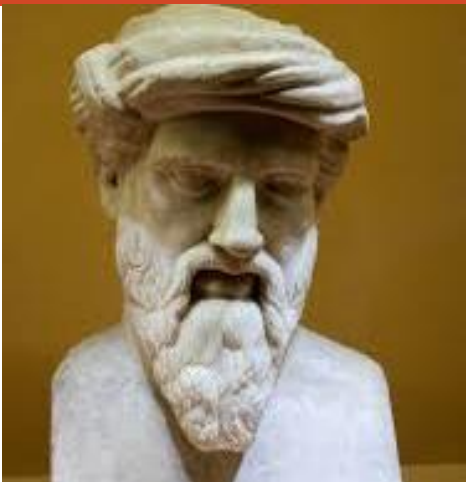
La escuela jónica

- ✓ Fue fundada por Tales en Mileto hacia 600 aC)
- ✓ Tales tuvo de discípulos a Anaximandro y Anaxímenes
- ✓ Anaxágoras formó parte de la escuela, tal vez Pitágoras estudió algún tiempo con Tales
- ✓ Se le reconoce gran influencia en la filosofía griega en general
- ✓ Consideraba al agua como el elemento primordial
- ✓ Tales viajó a Babilonia y vivió en Egipto, aprendiendo matemática
- ✓ Se le atribuye (sin plena seguridad) los siguientes logros:
 - Medición de la altura de las pirámides usando semejanza de triángulos, también distancia de un barco al puerto (s. Diógenes, Plinio)
 - Predicción de un eclipse solar en 585 aC (s. Heródoto)
 - **Primer concepto de demostración → primer matemático** (s. Proclo-Eudemo)
 - Ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto
 - El diámetro divide al círculo en dos partes iguales
 - Los ángulos básicos de un triángulos isósceles son iguales
 - Los ángulos opuestos por el vértice son iguales
 - Criterio ALA de congruencia de triángulos

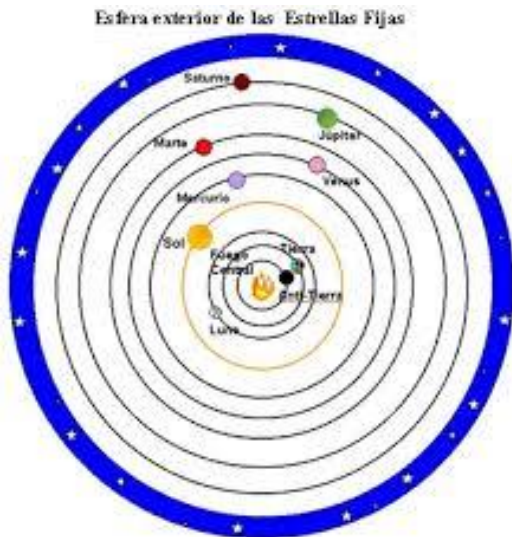


Tales de Mileto (aprox. 630-548 aC)

La escuela pitagórica

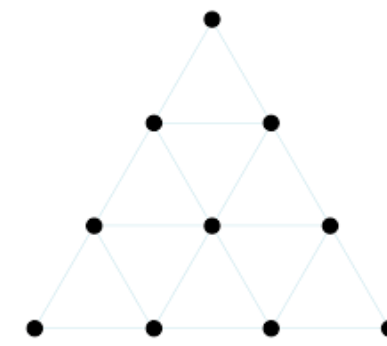


Pitágoras de Samos
(585-497 aC o 569-475 aC)



Modelo pitagórico del cosmos

- ✓ Fundada por Pitágoras en Crotona hacia 518 aC, luego de haber tenido contacto con la escuela jónica y haber viajado a Egipto, Babilonia y tal vez India.
- ✓ Sociedad similar a un culto órfico, eran vegetarianos, creían en la metempsicosis y tenían prohibido comunicar sus resultados fuera de la escuela.
- ✓ Se les atribuyen las palabras *filosofía* y *matemática*, y la noción de sus elementos como conceptos abstractos.
- ✓ Se admitían estudiantes mujeres con los mismos derechos y obligaciones.
- ✓ Tenían cierto misticismo numérico, "Todo es número" o todo está conformado de acuerdo al número (natural). como orden esencial (cualidades de los números, modelo matemático de las notas musicales, armonía de las esferas).
- ✓ La escuela sufrió diversos ataques, Pitágoras habría muerto en Metaponto, su esposa Teano continuó con la escuela en Tarento y otros discípulos en diferentes ciudades.



Tetraktys: $1+2+3+4=10$



Pitagóricos tardíos

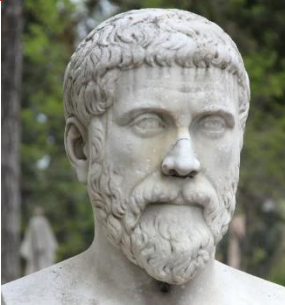


Teano de Crotona (546 aC-??)



Arquitas de Tarento
(428-360 aC)

- ✓ Teano habría escrito tratados sobre la razón áurea, astronomía, medicina, comportamiento de los niños y una biografía de Pitágoras (todos perdidos).
- ✓ Se atribuye a Hipaso haber descubierto o bien dado a conocer las magnitudes inconmensurables, por lo cual habría sido cruelmente castigado. Es posible que Pitágoras no haya conocido este concepto, pero la versión sobre Teano y la razón áurea implicaría que ella lo manejaba bien, aunque no en la demostración que luego Aristóteles atribuiría a Pitágoras.
- ✓ A Filolao se le permitió escribir un tratado sobre las ideas y resultados de la escuela, por lo cual se le atribuyen varios resultados y el sistema cosmológico, luego modificado por Ecfanto e Hicetas (geocéntrico con rotación de la Tierra).
- ✓ Arquitas, discípulo de Filolao, gobernó Tarento y se interesó en la educación, impulsando la organización de los tratados en 4 artes (Aritmética-Geometría-Música-Astronomía). Creó una paloma mecánica que funcionaba a vapor. Escribió tratados sobre las medias pitagóricas y se le atribuye el método para aproximar raíces cuadradas. Halló una asombrosa solución tridimensional para la duplicación del cubo, mediante la intersección de un cilindro, un toro y un cono. Intercedió salvando la vida de su amigo Platón, preso del tirano Dionisio.
- ✓ Perictione, madre de Platón, habría sido pitagórica e influenciado, junto con Arquitas, el amor del gran filósofo por la matemática.



Hipaso (500-?? aC)



Filolao (470 -380 aC)



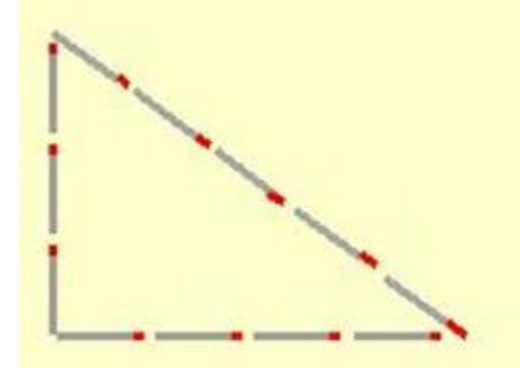
Perictione (455 -?? aC)

Los inconmensurables

con-mesurables: magnitudes que pueden *medirse con la misma vara*



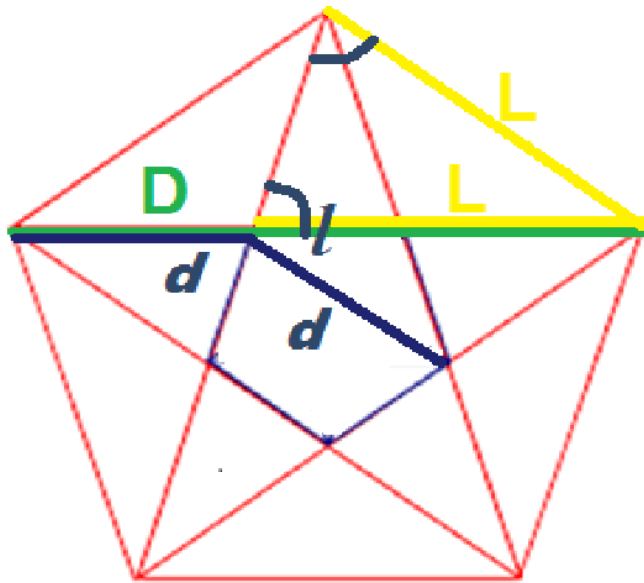
razones entre naturales (racionales)



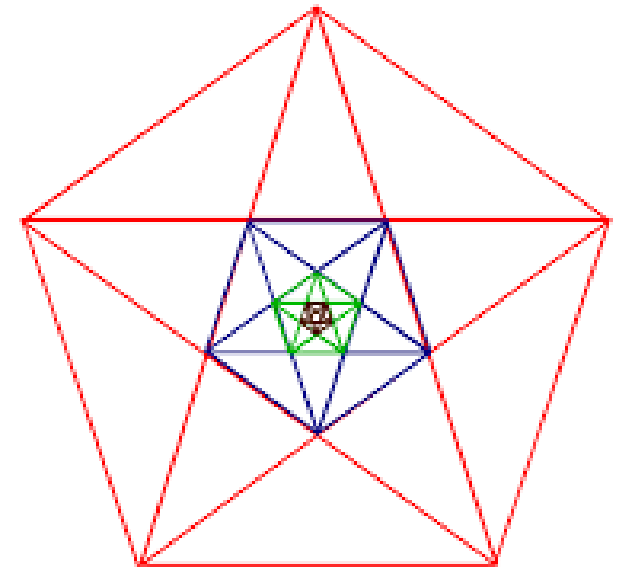
in-con-mensurables: magnitudes que NO pueden *medirse con la misma vara*



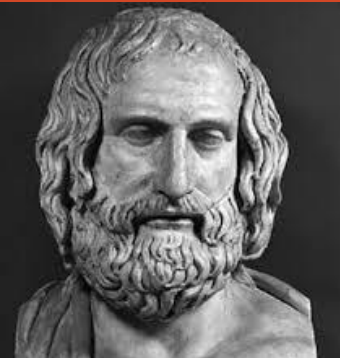
irracionales



$$d = D - L$$
$$l = L - d$$

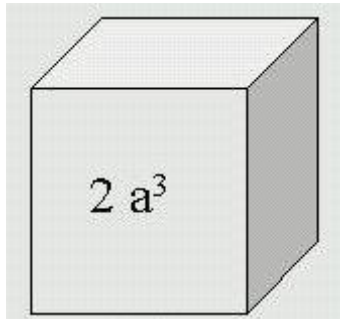
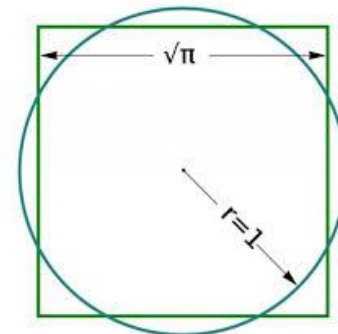


Los tres problemas clásicos

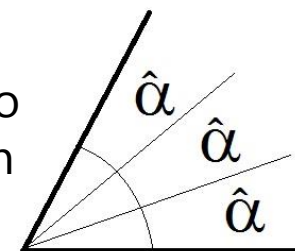


Anaxágoras de Clazomene
(500-528 aC)

- ✓ **La cuadratura del círculo.** Se dice que Anaxágoras lo estudió estando preso por afirmar que el sol y la luna no eran dioses. Jonio, llegó a Atenas en 483 aC huyendo de los persas y fue maestro de Pericles, Arquelaos, Protágoras, Tucídides y Eurípides, tal vez de Demócrito y Sócrates, y fue retomado por Aristóteles. Filósofo de la naturaleza (Tales) fue autor del primer best-seller científico, *Sobre la naturaleza*. (perdido). Liberado gracias a Pericles, muere exiliado.



- ✓ **La duplicación del cubo.** En 430 y 429 aC hubo una epidemia conocida como la *Plaga de Atenas*, que mató gran parte de la población (incluido Pericles). Se dice que al consultar al oráculo de Apolo en Delos, la pitonisa pide duplicar el altar cúbico del dios. Los atenienses duplicaron la arista, pero el oráculo les aclaró que era el volumen lo que debían duplicar.
- ✓ **La trisección del ángulo.** Por la misma época en Atenas circula el problema de, dado un ángulo cualquiera, construir otro igual a un tercio del ángulo dado, generalización del conocido problema de bisección y de casos particulares como el ángulo recto.

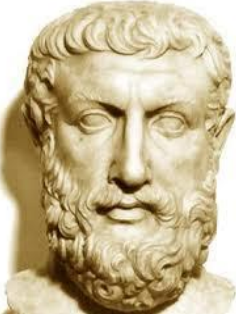


TODOS DEBÍAN SER RESUELTOS UTILIZANDO SÓLO REGLA Y COMPÁS

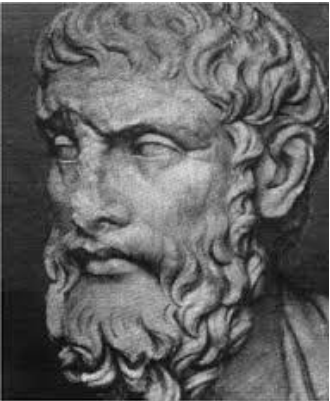
2200 años después se demostraría que es imposible, pero los esfuerzos por hallar soluciones serían una gran fuente de avances matemáticos.

La escuela eleática – Sofistas - Cuadraturas

✓ La escuela de Parménides en Elea tenía como principio fundamental la *unidad y permanencia del Ser*, en contraste con las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio, criticando el atomismo numérico y atacando tanto la visión discreta de organización por números enteros como la visión continua derivada de los inconmensurables. Zenón de Elea argumentó la inconsistencia de estos conceptos con 4 paradojas conocidas como *Dicotomía, Aquiles y la tortuga, la Flecha y el Estadio*. Usó el método dialéctico y propuso a la Gramática, la Retórica y la Dialéctica como núcleo de la educación.

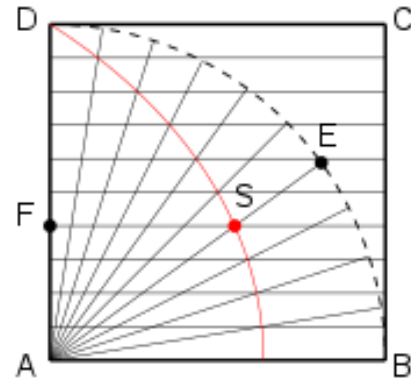


Zenón (490-430 aC)



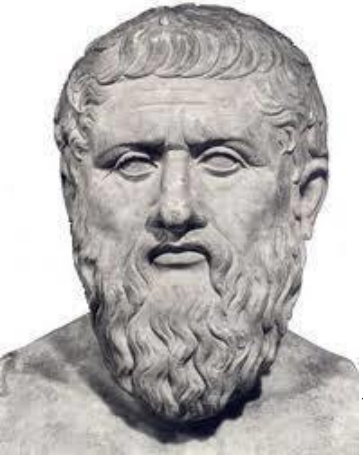
Hipias de Ellis
(460-400 aC)

✓ La primera escuela ateniense fue la de *los sofistas*, eruditos en gramática, retórica, dialéctica, moral, elocuencia, geometría, astronomía y filosofía. Usaban la matemática para entender el funcionamiento del universo. Platón los acusó luego de *hacer que lo peor parezca lo mejor*. Hipias, natural de Ellis, fue uno de los más prominentes. Platón habla de él en los Diálogos tratándolo de codicioso, insustancial y vanidoso, pues se jactaba de haber ganado más dinero que todos los demás sofistas juntos. Se le atribuye la introducción de la primera curva diferente de la circunferencia y la recta, de construcción mecánica, que diseñó para resolver el problema de la trisección del ángulo, por lo que se la llama *trisectriz de Hipias* (o *cuadratriz* pues sirve para cuadrar el círculo).



✓ Otros sabios que trabajaron en Atenas fueron Hipócrates de Chios (470-410 aC), que escribió unos Elementos de Geometría y logró cuadrar ciertas *lúnulas* (figuras no curvilíneas) y Demócrito de Abdera (460-370 aC), que escribió muchos tratados y utilizó métodos infinitesimales para cuadraturas, sin rigurosidad, Al igual que todas las obras anteriores al s.IV aC, se han perdido.

La Academia de Platón



Platón (427 – 347 aC)

- ✓ De alta estirpe ateniense que se remontaba a Solón a través de su madre Perictione, será uno de los filósofos más influyentes de occidente. Hacia los 20 años conoce a Sócrates, su principal influencia. Luego de varios viajes funda su *Academia*, que perduraría casi 900 años en Atenas. Situada al norte de la ciudad con edificios y jardines donde Platón y sus ayudantes daban cursos. Hay divergencias sobre el papel de las mujeres, se sabe que Platón admiraba a Aspasia de Mileto, Diotima de Mantinea y Jastipa de Atenas, y que al menos dos mujeres estudiaron en la Academia, Astenia de Mantinea y Axiotea de Fliunte (aunque debían vestirse de hombre).
- ✓ Platón tuvo fuerte influencia pitagórica y si bien ninguna de sus obras (más de 30 *Diálogos*) es específicamente matemática, incluyen muchos datos, referencias y explicaciones matemáticas.
- ✓ Las 7 artes liberales (Arquitas-Zenón) se afianzaron en su Academia, quetenía la máxima: *No entre aquí quien no sepa Geometría*. La abstracción matemática se enlaza con el concepto platónico de *mundo inteligible*, y gran parte del pensamiento matemático se debe a su influencia, casi todo el desarrollo matemático del siglo IV aC es de sus discípulos y amigos.
- ✓ Los platónicos mejoraron las definiciones y pruebas de la geometría plana, con algunos nuevos resultados y contribuciones a la axiomática. Platón señaló que puede ser útil invertir el proceso usual de *síntesis* del razonamiento deductivo que lleva de las premisas a los resultados, partiendo en su lugar de suponer cierto lo que se quiere probar e ir deduciendo de allí conclusiones. Formalizó este procedimiento llamándolo *método analítico* o *análisis*.



La escuela de Atenas, de Rafael



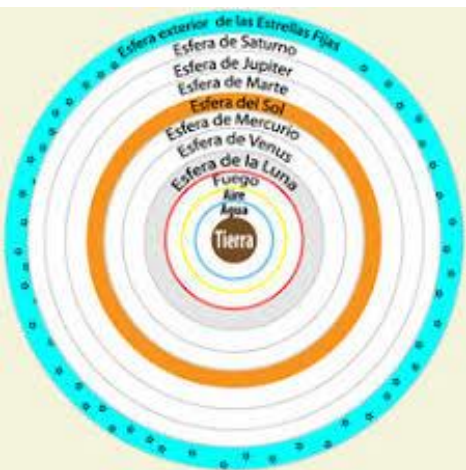
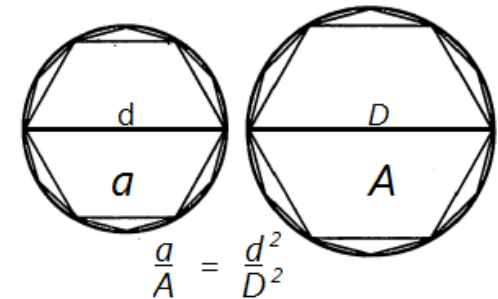
Eudoxo, resolviendo los grandes problemas



Eudoxo de Cnido
(408-355 o 390-337 aC)

- ✓ Natural de Cnido (Asia menor) nació entre 408 y 390 aC, estudió con Arquitas y Platón y luego astronomía en Heliópolis (Egipto). Volvió a la Academia donde enseñó varios años para regresar a Cnido donde redactó la constitución de una reciente democracia y murió a los 53 años.
- ✓ Fue el primero en dar una definición satisfactoria para la comparación entre magnitudes inconmensurables. *Dos magnitudes están en razón una a la otra si cada una de ellas tiene un múltiplo entero que exceda a la otra.* La comparación se realiza entonces de la siguiente manera:

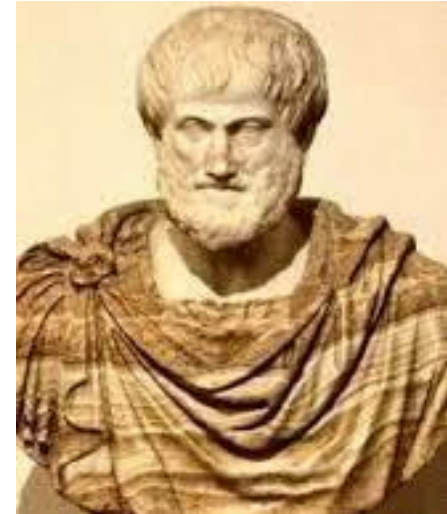
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}: \begin{cases} ma < nb \Rightarrow mc < nd \\ ma = nb \Rightarrow mc = nd \\ ma > nb \Rightarrow mc > nd \end{cases}$$



- ✓ Esta idea también permite resolver el problema de la validez de métodos infinitesimales mediante la *propiedad de exhaustión*, que permite demostrar la validez de muchas fórmulas para áreas y volúmenes. También fue el padre de la astronomía científica, construyendo un modelo astronómico geocéntrico con fuerte sustento matemático, mediante combinaciones de movimientos circulares uniformes, que respondía a las observaciones de la época y, a través de Aristóteles, será hegemónico por casi 2000 años (junto con el de Apolonio).
- ✓ Su discípulo Menecmo, que fue como Aristóteles tutor de Alejandro Magno, fue el primero en estudiar las secciones cónicas, buscando resolver el problema de la duplicación del cubo.

El Liceo de Aristóteles, historia y lógica

- ✓ Aristóteles, con Platón, fue el filósofo más influyente de la historia occidental, principalmente sobre la escolástica medieval. Discípulo de Platón y Eudoxo en la Academia, abandonó Atenas para ser tutor de Alejandro Magno (como Menecmo) en Macedonia, donde viviría 5 años. Los últimos años de su vida los pasaría en Atenas donde fundó su propia escuela en 335 aC, conocida como el *Liceo*. A diferencia de la escuela pitagórica y la Academia, prohibía estrictamente el ingreso de mujeres y tenía una impronta fuertemente misógina.
- ✓ Si bien no tiene tratados matemáticos propiamente dichos, estaba al corriente de toda la matemática de la época e hizo críticas sobre varios matemáticos, incluyendo la refutación de la paradojas de Zenón y las discusiones sobre el infinito en aritmética y geometría. Se dice que escribió una biografía de Pitágoras, hoy perdida.
- ✓ A su pedido, uno de sus discípulos, Eudemo, escribió una *Historia de la Geometría*, que si bien está perdida fue la fuente de varios comentaristas posteriores, en especial Proclo, y constituye uno de los eslabones más importantes en el conocimiento que tenemos de la matemática griega anterior al siglo III aC.
- ✓ Tal vez su aporte fundamental a la matemática haya sido su fundamentación de la lógica, que constituyó el primer sistema axiomático que se conserva. Lo puso por escrito en una obra que llamó *Órganon* (útil) y tiene dos principios fundamentales:



Aristóteles (384-322 aC)

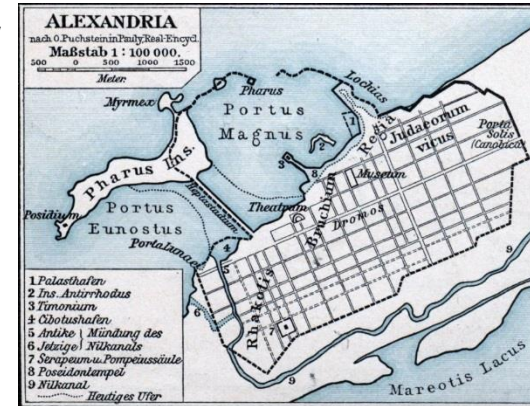
**No se puede afirmar una cosa y su contraria
Una asección y su contraria no pueden ser falsas las dos**

El Museo de Alejandría



Alejandro Magno (356 – 323 aC)

✓ Alejandro Magno legó al trono a los 20 años y en poco tiempo conquistó gran parte de Asia y Egipto, donde fundó Alejandría en 332 aC.. Tras su muerte, Egipto quedó en manos de Ptolomeo I, coronado faraón en 305 aC, que hizo de Alejandría en la ciudad más importante de la época, en parte por la construcción de la institución cultural más fabulosa de la antigüedad y tal vez de la historia: el *Museion* o *Museo de Alejandría*, dedicado a las Musas, que incluía la imponente *Biblioteca*..



✓ El Museo atrajo a sabios y eruditos de todo el mundo griego y la mayor parte de los desarrollos matemáticos entre 300 aC y 415 estuvieron relacionados con él. Poco después de su creación, Euclides llegó para allí, se dice que puede haber sido su director, y fue en Alejandría donde escribió *Los Elementos* y muchas otras obras. Apolonio, el *Gran Geómetra*, estudió y trabajó allí, escribiendo su gran tratado *Secciones cónicas*, Arquímedes, el maestro de Siracusa, estaba en contacto con los sabios alejandrinos, principalmente Eratóstenes, y se dice que pasó un tiempo en el Museo. Trabajaron allí Aristarco y Ptolomeo, Herón, Menelao y Diofanto . La institución sufrió múltiples ataques y destrucciones. A partir del s III hubo un grupo de matemáticos conocidos como *Comentaristas*, a partir de los cuales conocemos que existieron muchos tratados hoy perdidos y tenemos una idea sobre sus contenidos. Su última gran matemática fue Hypathia, cuyo femicidio a manos de fanáticos cristianos en 415 marca el fin de la matemática griega antigua.



Euclides
(aprox 325-256 aC)



Hypatia de Alejandría
(355 o 370 - 415)

Algunos recursos y recomendaciones

Páginas recomendadas:

Repositorio del PM: <https://www.fceia.unr.edu.ar/pmatematica/>

Repositorio hipermedial UNR: <https://rehip.unr.edu.ar/>

The Mathematics Genealogy Project: <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>

Libros recomendados:



El hombre que calculaba. Malba Tahan.



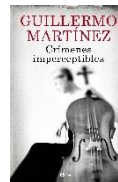
El teorema del loro. Denis Guedj.



El enigma de Fermat. Simon Singh.



El hombre que sólo amaba los números. Paul Hoffman.



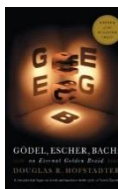
Crímenes imperceptibles. Guillermo Martínez.



La música de los números primos. El enigma de un problema matemático abierto. Marcus du Sautoy.



Gödel \forall . Guillermo Martínez y Gustavo Piñeiro.



Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle. Douglas Hofstadter.