

# Introducción a la modelización con Bond Graphs

Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos  
Depto. de Electrónica, FCEIA, UNR

## Características Generales

- **Los Bond Graphs (BG) son un lenguaje**
  - gráfico
  - acausal
  - con simbología
    - cuantificadora del flujo instantáneo de potencia
    - unificada
    - independiente de alinealidades

**para la modelización de Sistemas Físicos**

## Características Generales

- Los BG proveen una metodología

- sistemática
- estructurada, orientada a objetos
- unificada

### de modelado, análisis y simulación de Sistemas Físicos Dinámicos ( $\Sigma\Phi\Delta$ )

| DB / EE-ES / PO / SD

$\Sigma\Phi R \rightarrow \Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow$  | ANALISIS: Estabilidad

| Propiedades Estructurales

## Modelado con BG

- $\Sigma\Phi R$  (Sistema Físico Real)  $\rightarrow \Sigma\Phi I$  (Idealizado):

- Análisis de {Sistema + Problema}
- Identificación de fenómenos dominantes
- Hipótesis simplificadoras

etapas

- $\Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow \bullet\bullet\bullet\bullet$ : completamente  
algoritmizables

## Modelado con BG

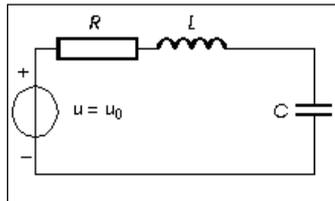
- ***Sistema***: disposición delimitada de entidades interactuantes
- ***Sistema***: {estructura + componentes}
- ***Sistema Físico***: interacción consiste en transformación y/o transporte de materia y/o energía.
- ***Sistema Físico Dinámico***: almacenamiento de materia y/o energía.

## Modelado con BG

### DOS EJEMPLOS SIMPLES

# Modelado con BG

## Circuito Electrico Serie



Estructura:

Serie **Conserva** Potencia

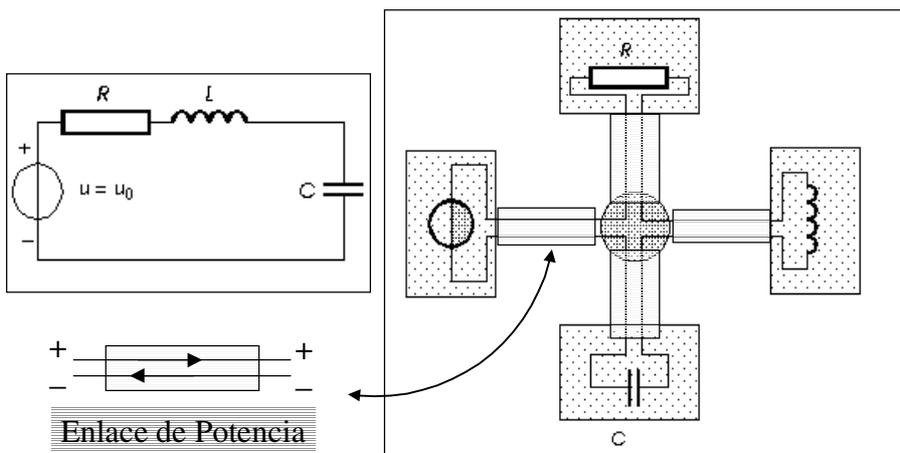
→ Vínculo Estructural **I**

**Componentes:**

<u>Fuente:</u>	<b>Genera</b> Energía	<b>S</b> (Source)	Fuente
<u>Resistor:</u>	<b>Disipa</b> Energía	<b>R</b> (Resistor)	Disipador
<u>Bobina:</u>	<b>Conserva</b> Energía (magnética)	<b>I</b> (Inertia)	Almacenador
<u>Capacitor:</u>	<b>Conserva</b> Energía (eléctrica)	<b>C</b> (Capacitor)	Almacenador

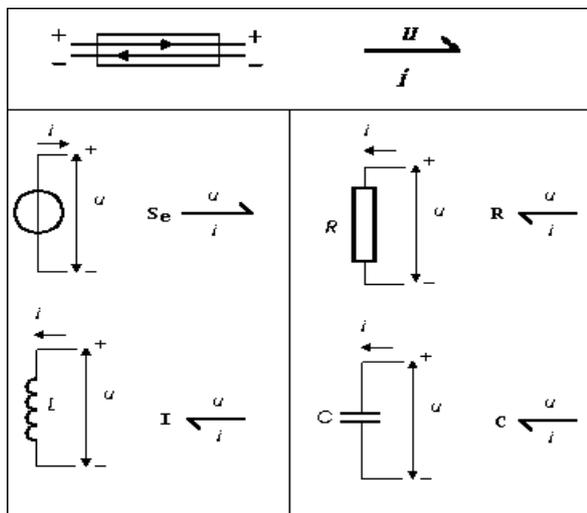
# Modelado con BG

## Una extraña pero ilustrativa topología



# Modelado con BG

## Elementos estructurales y componentes

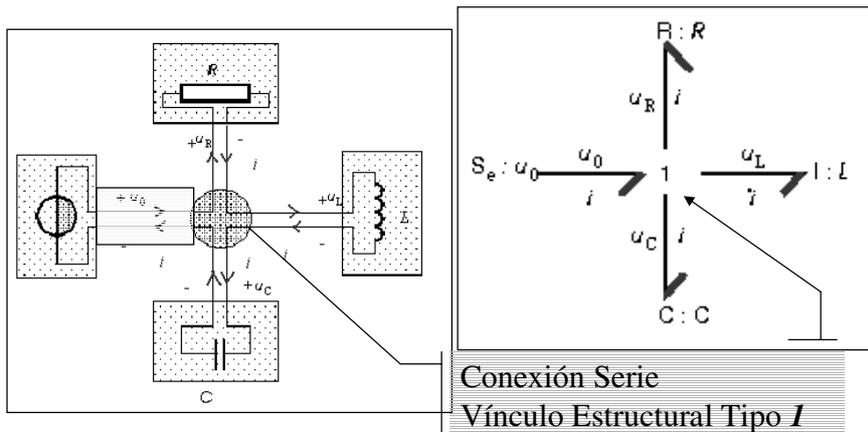


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

9

# Modelado con BG

## Bond Graph del Circuito Serie



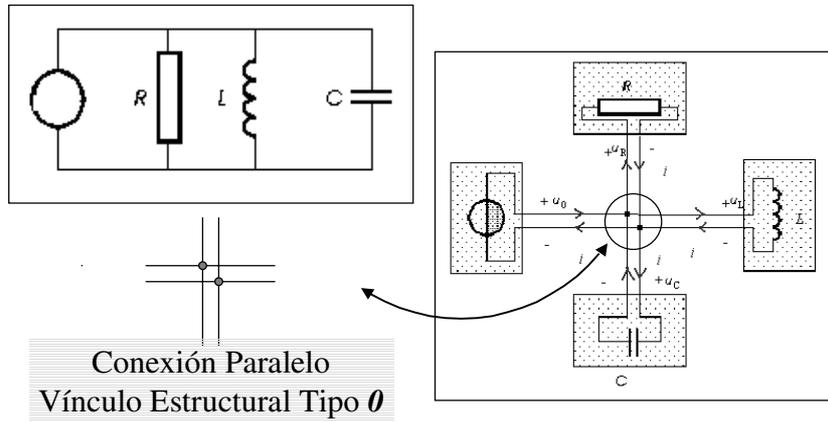
Conexión Serie  
Vínculo Estructural Tipo I

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

10

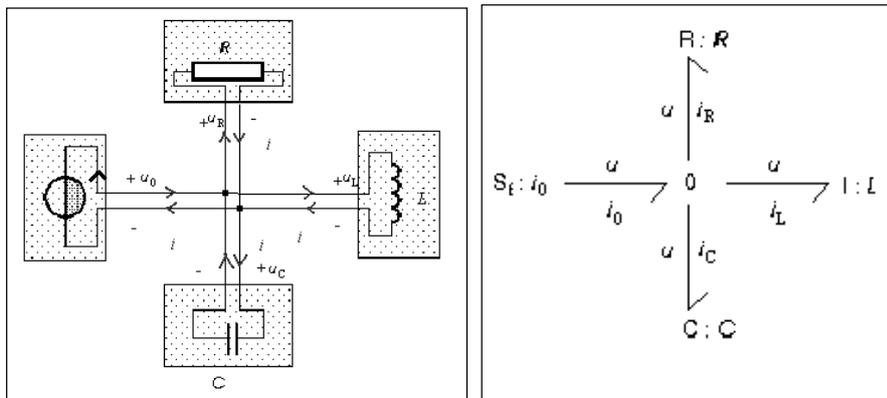
# Modelado con BG

## Circuito Electrico Paralelo



# Modelado con BG

## Bond Graph del Circuito Paralelo



## **EXTENSIÓN A SISTEMAS MECÁNICOS**

# **ANALOGÍA**

## **Analogía**

### **Analogía Electricidad - Mecánica**

- Energía Cinética ~ Energía Campo Magnético  $\leftrightarrow$  **I**
- Energía Potencial ~ Energía Campo Eléctrico  $\leftrightarrow$  **C**
  
- $\Rightarrow$  Energía Cinética  $\rightarrow$  **I**
  
- $\Rightarrow$  Energía Potencial  $\rightarrow$  **C**

# Analogía

## Implicancias de la Analogía elegida

ANALOGIA  
ENERGETICA

⇒

ANALOGIA EN  
SEÑAL

Tensión~	Fuerza	(Esfuerzo generalizado)
Corriente ~	Velocidad	(Flujo generalizado)
Flujo Magn. ~	Impulso	(Impulso generalizado)
Carga ~	Desplaz./Def.	(Desplaz. Generalizado)

## Analogía - Generalización de Variables

Dominio físico	Variables de Potencia				Variables de Energía			
	Esfuerzo e	S.I.	Flujo f	S.I.	Momento p	S.I.	Desplaz. q	S.I.
Traslación	fuerza F	N	velocidad v	$\frac{m}{s}$	impulso p	N · s	desplaz. x	m
Rotación	torque τ	N · m	velocidad angular ω	$\frac{rad}{s}$	momento angular L	Nm · s	ángulo φ	rad
Fluidodinámica	presión P	$\frac{N}{m^2}$	caudal Q	$\frac{m^3}{s}$	impulso del fluido Γ	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	volumen V	$m^3$
Electromagnetismo	tensión U	V	corriente I	A	flujo magnético φ	V · s	carga eléctrica	C
Química	potencial químico μ	$\frac{J}{mol}$	flujo molar ν	$\frac{mol}{s}$			número de moles n	mol
Termodinámica	tempera- tura absoluta T	$^{\circ}K$	flujo de entropía ḡ	$\frac{W}{^{\circ}K}$			entropía S	$\frac{J}{^{\circ}K}$

## Analogía - Generalización de Componentes

Fenómeno energético	Clase	Elementos				Ejemplos técnicos	
		Símbolo	Nombre	Potencia Energía	Relación Constitutiva		
Generación de Energía	Fuentes	Monopuertas	$\mathbf{Se} \xrightarrow{e(t)}$	Fuente de esfuerzo	$P_{entregada} = e(t) \cdot f$	$e(t)$ independiente	Gravedad, Fuente de f.e.m.
			$\mathbf{Sf} \xrightarrow{f(t)}$	Fuente de flujo	$P_{entregada} = f \cdot e(t)$	$f(t)$ independiente	Fuente de corriente Bomba hidráulica
Disipación de energía	Disipadores	Multipuertas	$\mathbf{R} \xleftarrow{\frac{e}{f}}$	Resistor	$P_{dissipada} = f \cdot e(t)$	$\phi(e, f) = 0$	Rozamiento, Electroresistor
Conservación de Energía	Almacenadores		$\mathbf{C} \xleftarrow{\frac{e}{f}}$	Capacitor	$\epsilon_{almac.} = \epsilon_0 + \int_{q_0}^q e(q) dq$	$f - \frac{dq}{dt} = 0$ $\phi(e, q) = 0$	Elasticidad de materiales Tanque de agua
		$\mathbf{I} \xleftarrow{\frac{e}{f}}$	Inercia	$\epsilon_{almac.} = \epsilon_0 + \int_{p_0}^p e(p) dp$	$e - \frac{dp}{dt} = 0$ $\phi(f, p) = 0$	Inductancia Inercia mecánica	

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

17

## Analogía - Generalización de Componentes

Fenómeno energético	Clase	Elementos				Ejemplos técnicos	
		Símbolo	Nombre	Potencia Energía	Relación Constitutiva		
Conservación de Potencia	Acopladores	$\frac{e}{f}$	Enlace	$P_{transferida} = e \cdot f$		Cardan (ideal) Línea eléctrica	
	Acopladores Convertidores	Multipuertas	$\frac{1}{\mathbf{TF}} \frac{2}{\mathbf{m}}$	Transformador	$P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$	$e_2 - m \cdot e_1 = 0$ $f_1 - m \cdot f_2 = 0$	Piñón-cremallera Pistón-cilindro
			$\frac{1}{\mathbf{GY}} \frac{2}{\mathbf{m}}$	Girador	$P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$	$f_2 - m \cdot e_1 = 0$ $f_1 - m \cdot e_2 = 0$	Giróscopo Convers. electro-mecánica
	Vínculos	Multipuertas	$\frac{1}{\mathbf{1}} \frac{j}{\mathbf{n}}$	Vínculo uno	$P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$	$f_1 = \dots = f_n = f$ $\sum_{j=1}^n \pm e_j = 0$	Velocidad común Circuito serie
			$\frac{1}{\mathbf{0}} \frac{j}{\mathbf{n}}$	Vínculo cero	$P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$	$e_1 = \dots = e_n = e$ $\sum_{j=1}^n \pm f_j = 0$	Serie mecánico Circuito paralelo

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

18

# Causalización y Generación de Modelos Matemáticos y Computacionales a partir de Bond Graphs.

## Causalidad

$f(a,b,c) = 0$        $\longrightarrow$       **Relación NO Causal**

$a = g(b,c)$        $\longrightarrow$       **Relación Causal**

## Causalidad

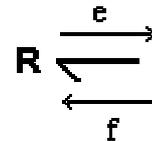
**Ejemplo:**



Resistencia Lineal:  $e - R \cdot f = 0$

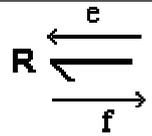
•Opción 1

$$e = R \cdot f$$



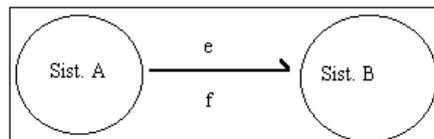
•Opción 2

$$f = \frac{e}{R}$$

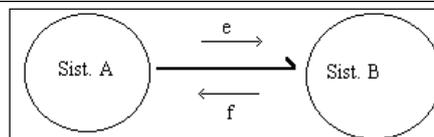


## Causalidad

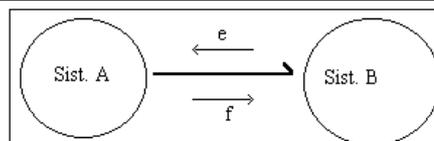
**En General:**



•Opción 1



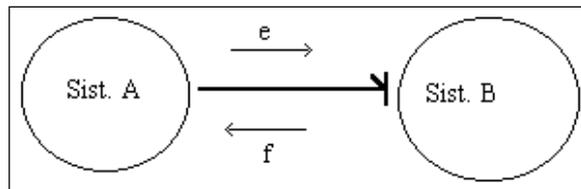
•Opción 2



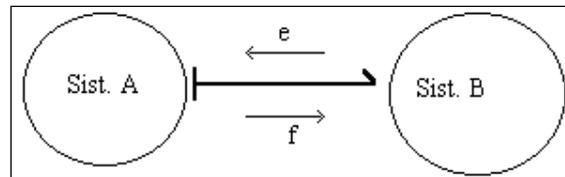
# Causalidad

## Codificación:

### •Opción 1



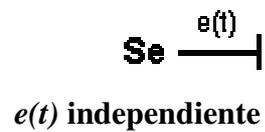
### •Opción 2



# Causalidad

## Fuentes: (causalidad necesaria)

### Fuente de Esfuerzo:



### Fuente de Flujo:



# Causalidad

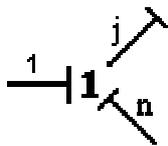
## Componentes estructurales: (causalidad restringida)

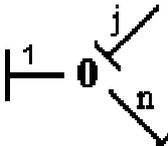
<b>Transformador:</b>	$\frac{1}{\ddot{m}} \text{TF} \frac{2}{\ddot{m}}$	$\text{TF} \frac{2}{\ddot{m}}$
	$e_2 = m \cdot e_1$	$e_1 = m \cdot e_2$
	$f_1 = m \cdot f_2$	$f_2 = m \cdot f_1$

<b>Girador:</b>	$\frac{1}{\ddot{m}} \text{GY} \frac{2}{\ddot{m}}$	$\text{GY} \frac{2}{\ddot{m}}$
	$f_1 = m \cdot e_2$	$e_1 = m \cdot f_2$
	$f_2 = m \cdot e_1$	$e_2 = m \cdot f_1$

# Causalidad

## Componentes estructurales: (causalidad restringida)

<b>Vínculo 1:</b>	$f_1 = f_j, \dots, f_n = f_j$	
	$e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$	

<b>Vínculo 0:</b>	$e_1 = e_j, \dots, e_n = e_j$	
	$f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$	

## Causalidad

### Almacenadores: (causalidad preferencial)

	$\mathbf{C} \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}  $	$\mathbf{C}   \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}$
<b>Capacitor:</b>	$e = e(q)$	$f = \frac{d}{dt} q(t)$
	$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$	$q = q(e)$

	$\mathbf{I} \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}  $	$\mathbf{I}   \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}$
<b>Inercia:</b>	$f = f(p)$	$e = \frac{d}{dt} p(t)$
	$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$	$p = p(f)$

## Causalidad

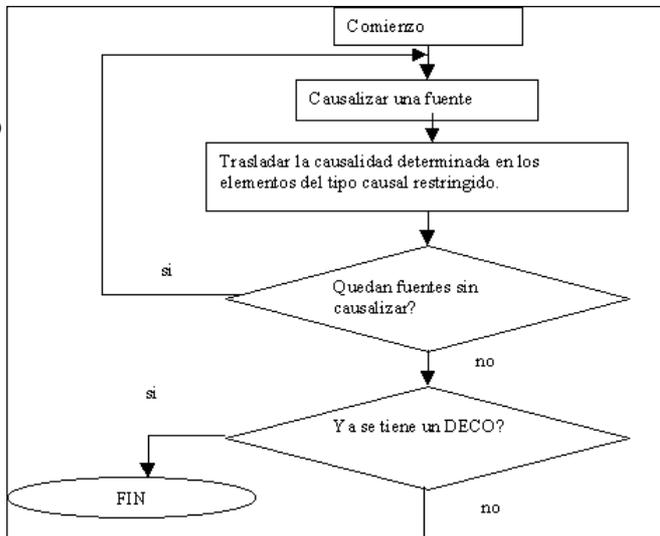
### Disipadores: (causalidad arbitraria)

$\mathbf{R} \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}  $	$\mathbf{R}   \begin{array}{c} \text{e} \\ \text{---} \\ \text{f} \end{array}$
$e = e(f)$	$f = f(e)$

# Causalidad

## Procedimiento de Asignación de Causalidad

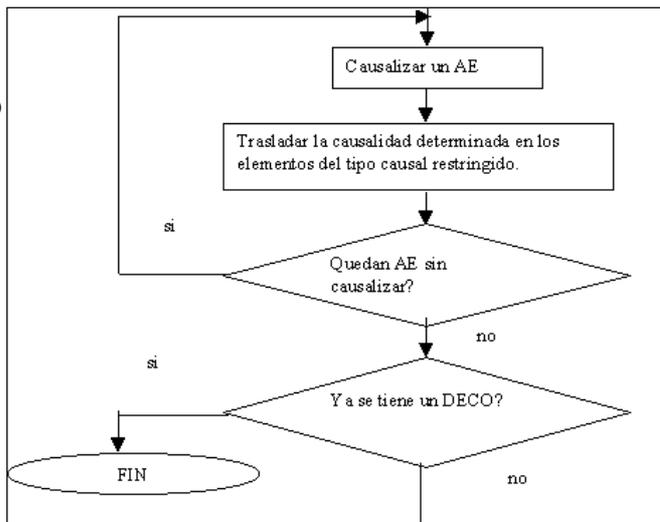
(1)



# Causalidad

## Procedimiento de Asignación de Causalidad

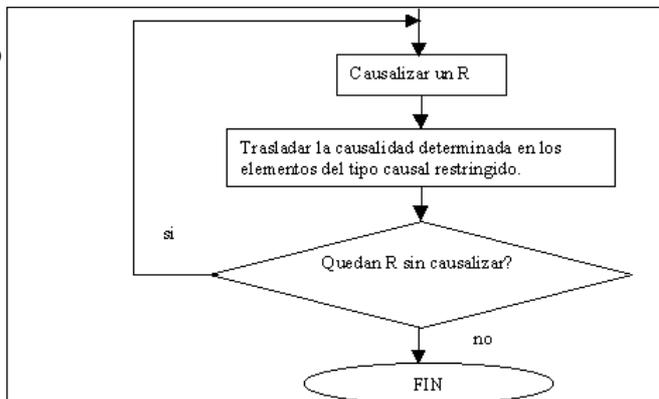
(2)



# Causalidad

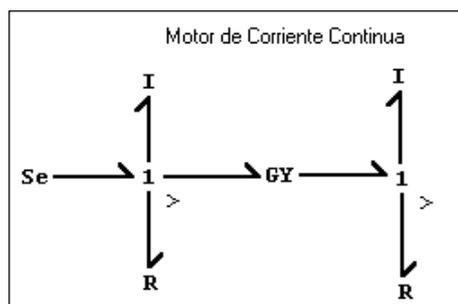
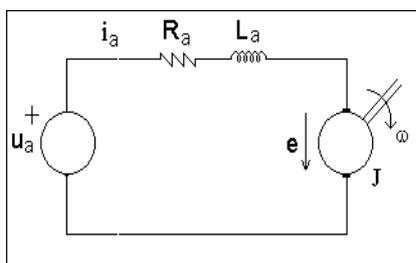
## Procedimiento de Asignación de Causalidad

(3)



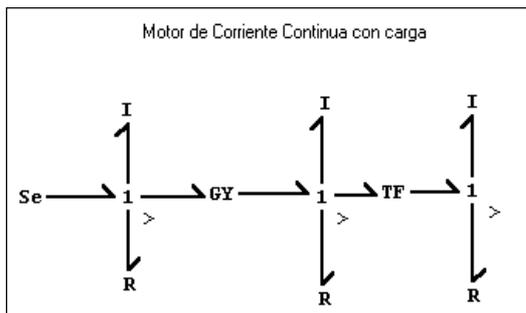
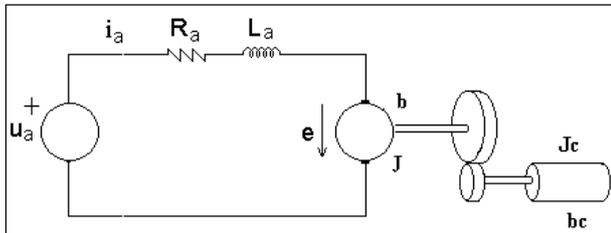
# Causalidad

## Ejemplo 1:



# Causalidad

## Ejemplo 2:

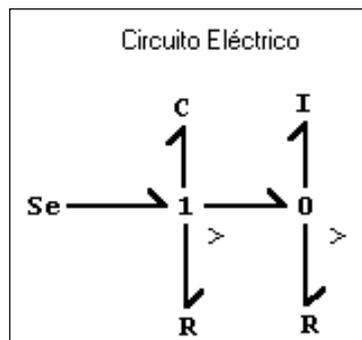
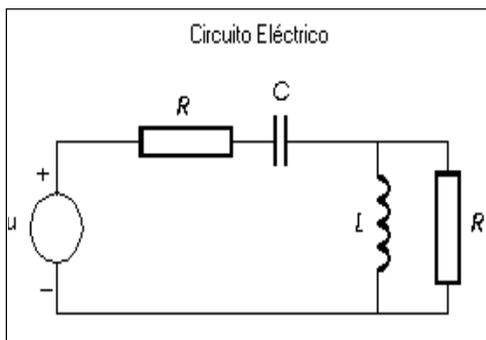


Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

33

# Causalidad

## Ejemplo 3:



Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

34

## Causalidad- Resumen

Tipo Causal	Notación		
	Gráfica		Matemática
	Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Necesario	$S e \frac{e(t)}{r(t)}$	$e(t) \longrightarrow$	$e(t)$ <b>independiente</b>
	$S f \frac{f(t)}{r(t)}$	$r(t) \longrightarrow$	$f(t)$ <b>independiente</b>
Restringido	$\frac{1}{m} \left  \frac{TF}{m} \right ^2$		$e_2 = m \cdot e_1$ $f_1 = m \cdot f_2$
	$\frac{1}{\rho} \left  \frac{TF}{\rho} \right ^2$		$e_1 = \rho \cdot e_2$ $f_2 = \rho \cdot f_1$ $\rho = 1/m$
	$\frac{1}{m} \left  \frac{GY}{m} \right ^2$		$f_1 = m \cdot e_2$ $f_2 = m \cdot e_1$
	$\frac{1}{\rho} \left  \frac{GY}{\rho} \right ^2$		$e_1 = \rho \cdot f_2$ $e_2 = \rho \cdot f_1$ $\rho = 1/m$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

35

## Causalidad- Resumen

Tipo Causal	Notación		
	Gráfica		Matemática
	Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Restringido	$\frac{1}{1} \left  \frac{j}{n} \right $		$f_1 = f_2 \dots f_n = f_j$ $e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$
	$\frac{1}{0} \left  \frac{j}{n} \right $		$e_1 = e_2 \dots e_n = e_j$ $f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$
Preferencial	Integral		$e = e(q)$ $q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$
	Integral		$f = f(p)$ $p(t) = p_0 + \int e(\tau) d\tau$
	Derivativa		$f = \frac{d}{dt} q(t)$ $q = q(e)$
	Derivativa		$e = \frac{d}{dt} p(t)$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR  $p(f)$

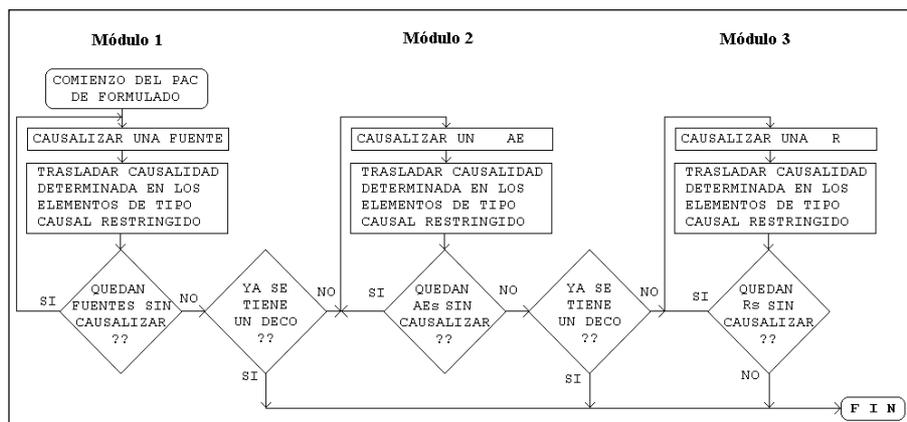
36

## Causalidad- Resumen

Tipo Causal	Notación		
	Gráfica		Matemática
	Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Arbitrario	$R \begin{array}{c} e \\ \hline f \end{array}$	$f \longrightarrow \boxed{e(\cdot)} \longrightarrow e$	$e = e(f)$
	$R \begin{array}{c} \hline e \\ f \end{array}$	$e \longrightarrow \boxed{f(\cdot)} \longrightarrow f$	$f = f(e)$

## Causalidad- Resumen

### Procedimiento de Asignación de Causalidad



## Ecuaciones de Estado

- **Paso 1: Causalizar el BG.**
- **Paso 2: Enumerar los Enlaces.**
- **Paso 3: Identificar las Variables de Estado.**

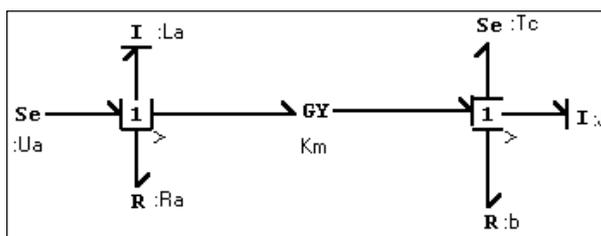
*Tomamos como Variables de Estado las variables de energía de los Almacenadores que tengan causalidad Integral.*

- **Paso 4: Leer las ecuaciones siguiendo la causalidad del BG y utilizando las leyes de los componentes.**

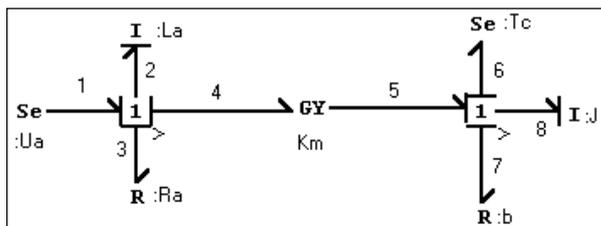
## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:

**Paso 1:**

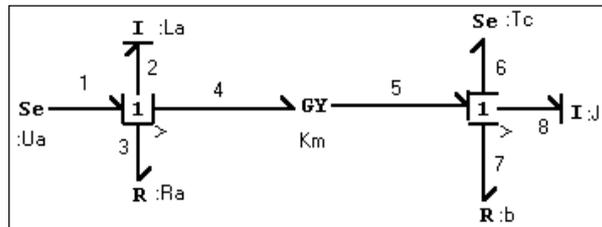


**Paso 2:**



## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:

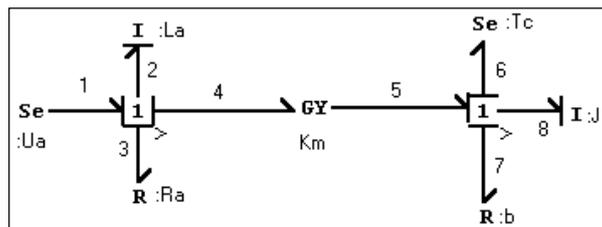


*Utilizamos los números de los enlaces como subíndices de las correspondientes variables de potencia y energía.*

### Paso 3: Variables de Estado: $p_2, p_8$

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 1:



### Paso 4:

$$\dot{p}_2 = e_2 = e_1 - e_3 - e_4 = U_a(t) - R_a f_3 - k_m f_5$$

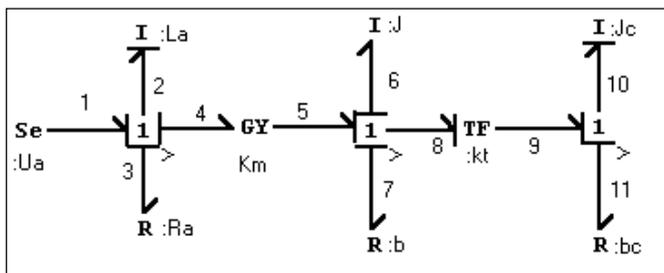
$$\dot{p}_2 = U_a(t) - R_a f_2 - k_m f_8 = \boxed{U_a(t) - \frac{R_a}{L_a} p_2 - \frac{k_m}{J} p_8}$$

$$\dot{p}_8 = e_8 = e_5 - e_6 - e_7 = k_m f_4 - T_c(t) - b \cdot f_7 =$$

$$\dot{p}_8 = k_m f_2 - T_c(t) - b \cdot f_8 = \boxed{\frac{k_m}{L_a} p_2 - T_c(t) - \frac{b}{J} \cdot p_8}$$

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 2:

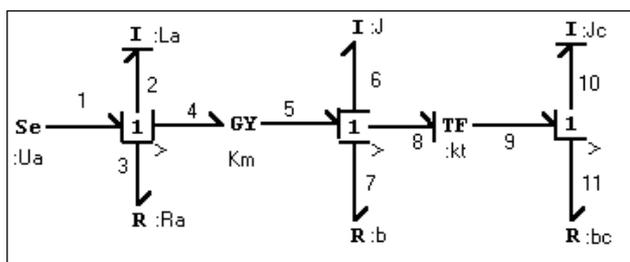


Variables de Estado:  $p_2, p_{10}$

$p_6$  no es variable de estado porque la inercia correspondiente tiene causalidad derivativa.

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 2:

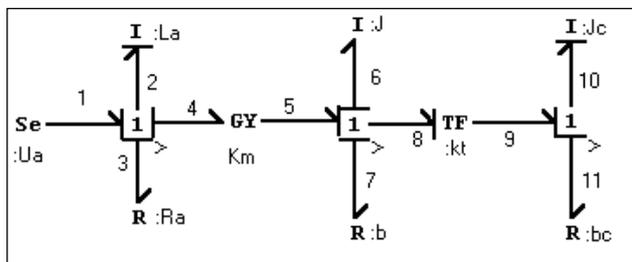


$$\dot{p}_{10} = e_{10} = e_9 - e_{11} = k_t e_8 - b_c f_{11} = k_t (e_5 - e_6 - e_7) - b_c f_{10}$$

Debido a la causalidad derivativa, encontramos un primer inconveniente al intentar leer  $e_6$ .

## Ecuaciones de Estado

**Causalidad derivativa**



**Método:**

**1 - Continuar leyendo, utilizando como variables auxiliares las derivadas de las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa.**

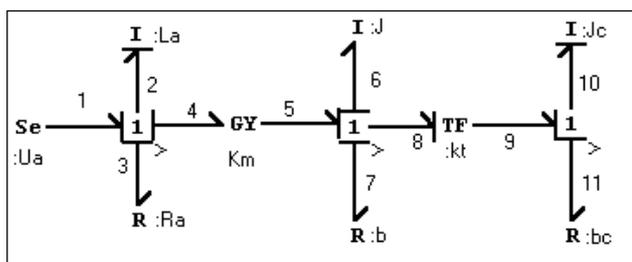
$$\dot{p}_{10} = \dots = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \dot{p}_6 - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

45

## Ecuaciones de Estado

**Causalidad derivativa**



**2 - Leer del BG las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa en función de las restantes variables de energía y entradas.**

$$p_6 = J \cdot f_6 = J \cdot f_8 = J \cdot k_t f_9 = J \cdot k_t f_{10} = \frac{J \cdot k_t}{J_c} p_{10}$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

46

## Ecuaciones de Estado

### Causalidad derivativa

3 - Derivar miembro a miembro las expresiones obtenidas en el punto anterior

$$\dot{p}_6 = \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10}$$

4 - Reemplazar las derivadas de las variables de energía en las ecuaciones obtenidas en el primer punto

$$\dot{p}_{10} = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10} - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

## Ecuaciones de Estado

### Causalidad derivativa

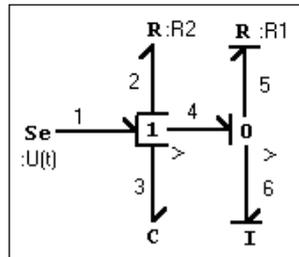
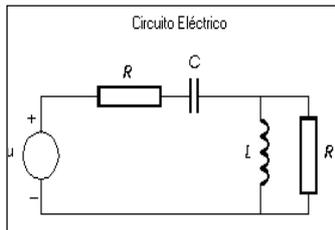
5 - Despejar la expresión de las derivadas de las variables de estado.

$$\dot{p}_{10} = \left( \frac{J_c}{J_c + J \cdot k_t^2} \right) \left( \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - \frac{k_t^2 b + b_c}{J_c} p_{10} \right)$$

**Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado**

## Ecuaciones de Estado

### Ejemplo 3:



$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = \frac{e_5}{R_1} + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} e_4 + \frac{1}{L} p_6$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1} (f_4) - \frac{1}{R_1 C} q_3 + \frac{1}{L} p_6$$

Debido a la presencia de *disipadores acoplados*, para calcular  $f_4$  necesitamos  $f_4$ .

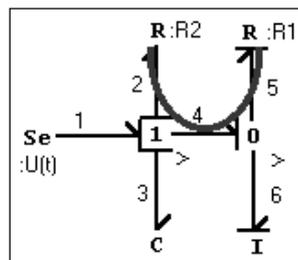
Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

49

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados

#### Método:



1 -Detectar los disipadores acoplados y utilizar las salidas de los mismos como variables auxiliares al leer las ecuaciones.

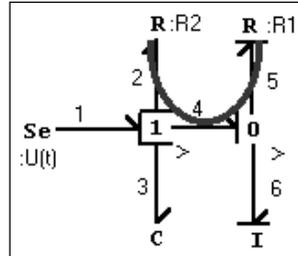
$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = f_5 + \frac{1}{L} p_6$$

Introducción a la modelización con Bond Graphs - Cátedra DSF - FCEIA - UNR

50

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados



**2 -Leer del BG las variables auxiliares en función de las variables de estado, entradas y de ellas mismas.**

$$f_5 = \frac{e_5}{R_1} = \frac{1}{R_1} e_4 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{1}{R_1} e_2 - \frac{1}{R_1 C} q_3$$

$$e_2 = R_2 \cdot f_2 = R_2 \cdot f_4 = R_2 (f_5 + f_6) = R_2 f_5 + \frac{R_2}{L} p_6$$

## Ecuaciones de Estado

### Disipadores Acoplados

**3 -Despejar del sistema anterior las variables auxiliares en función de las variables de estado y de entrada.**

$$f_5 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right)$$

**4 -Reemplazar las variables auxiliares en las ecuaciones obtenidas en el primer punto.**

$$\dot{q}_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right) + \frac{1}{L} p_6$$

### Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado

## Comentarios

- Separación de los problemas de modelado y de obtención del modelo computacional.
- Ventajas al trabajar con un paradigma acausal.
- El pasaje del modelo BG al modelo “matemático” es completamente algoritmizable.
- Algunas herramientas de Software para dicho pasaje: Dymola, 20Sim, Power Dynamo.
  
- Problemas de “Singularidades Estructurales”.

## Bibliografía Recomendada

(Disponible en la cátedra)

- Cellier, F.E. 1991. *Continuous System Modeling*. Springer-Verlag, New York.
- Karnopp, D.C., D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. 1990. *System Dynamics: A Unified Approach*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York.
- Karnopp, D. and R. Rosenberg. 1983. *Introduction to Physical System Dynamics*. N.Y: McGraw-Hill.
- Cellier, F., H. Elmqvist, and M. Otter. 1995. “Modeling from Physical Principles”, *The Control Handbook* (W.S. Levine, ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, pp.99-108.
- Borutzky, W. 1999. “Relations between bond graph based and object-oriented physical systems modeling”. *Proceedings ICBGM'99 /Simul. Series* 31:1
- Junco, S. 1986 “Los Diagramas de Enlaces y un Eficaz Método Estructurado de Modelado Analítico de Sistemas Dinámicos”. *Anales del 2do. Congreso Latinoamericano de Control Automático*.