

**TP Sistemas No Lineales****Código: TP\_SNL**

A-702 Control I

E-504 Dinámica de los Sistemas Físicos

Objetivos:

Muchos sistemas simples de segundo orden pueden ofrecer un comportamiento dinámico complejo en función de sus no linealidades. En algunos casos, con dinámica de al menos tercer orden, se llega a observar comportamiento caótico.

Además de la observación de estos fenómenos en el Espacio de Estados mediante simulación digital, este Trabajo Práctico pretende mostrar las posibilidades y las limitaciones del abordaje analítico de los problemas no lineales con aproximaciones lineales o de primer orden.

Se propone aplicar el Teorema de Hartman y Grobman y el segundo método de Liapunov como herramientas de análisis en los ejemplos que siguen, toda vez que resulte pertinente.

## 1) Modelo de Lotka -Volterra [1] [2]

El sistema está compuesto por dos especies de animales: Presa y Depredador. Es un sistema cerrado: contiene sólo estas dos especies en un ambiente aislado.

Denominamos  $x_1$  al número de presas y  $x_2$  al número de depredadores.  
El modelo de Lotka – Volterra es el siguiente:

$$\dot{x}_1 = \varepsilon \cdot x_1 - \alpha \cdot x_1 x_2 - \sigma \cdot x_1^2$$
$$\dot{x}_2 = -m \cdot x_2 + \beta \cdot x_1 x_2$$

donde

$\varepsilon$ : es la tasa neta de aumento de las presas en ausencia de depredadores.

$m$ : es la tasa neta de disminución de los depredadores en ausencia de las presas.

$\alpha$ : es el factor de medida del decremento de la población de las presas por la presencia de los depredadores.

$\beta$ : es el factor de medida del incremento de la población de los depredadores por la presencia de las presas.

$\sigma$ : tiene que ver con factores ambientales.

Observar que en este caso se ha representado un sistema ecológico (ya no un sistema físico) mediante ecuaciones de estado.

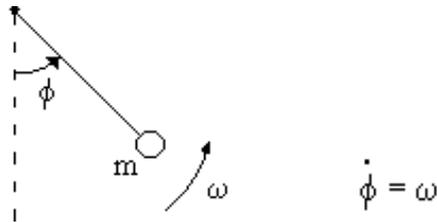
- 1) Determine todos los estados de equilibrio del sistema, suponiendo todos los parámetros positivos, y realice un estudio en el espacio de estados para determinar el comportamiento del sistema a partir de pequeñas desviaciones respecto a cada estado de equilibrio calculado.
- 2) Particularice lo calculado para los siguientes valores de los parámetros:  
 $\varepsilon = 0.1$ ;  $\sigma=0.01$ ;  $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.05$ ;  $m=0.4$ . Para cada punto de equilibrio obtenga analíticamente los retratos de fases del modelo linealizado analizando la estabilidad del mismo. ¿ Qué puede decir de las trayectorias del sistema no lineal en torno a los puntos de equilibrio? Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema original no lineal.
- 3) Realice un diagrama de bloques del sistema en Simulink y obtenga un retrato de fases del sistema.
- 4) Repita todos los pasos anteriores considerando ahora  $\sigma = 0$ .

Nota: Con el parámetro  $\sigma = 0$  el modelo se denomina modelo de Lotka.

Sugerencia: Para obtener un retrato de fases del sistema conviene realizar las simulaciones sacando las variables al espacio de trabajo y luego graficar mediante la orden PLOT y posteriormente HOLD ON de modo de superponer la siguiente trayectoria con la actual. Todo esto se puede realizar con una macro, ejecutando directamente la simulación mediante la orden SIM.

## 2) Péndulo

El sistema de la figura corresponde a un péndulo, constituido por una masa puntual  $m$  y una barra de masa despreciable y longitud  $\ell$



- 1) Haga un modelo del sistema, considerando la acción de la gravedad, así como la presencia de rozamiento viscoso (lineal) con el aire y obtenga las Ecuaciones de Estado del sistema.
- 2) I) Calcule todos los puntos de operación y obtenga los MILin's en torno a los mismos. Para cada MILin, obtenga analíticamente el retrato de fase correspondiente y analice la estabilidad.  
II) Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema original.
- 3) Mediante simulación digital, obtenga un retrato de fases del sistema completo. Compare los resultados con los del punto anterior y extraiga conclusiones.
- 4) Repita los puntos anteriores suponiendo ahora que no existe rozamiento.

### 3) Sistema masa – resorte (y su análogo eléctrico)

El modelo circuital de la fig.1 es análogo al modelo mecánico de la fig.2. (Verifíquelo)

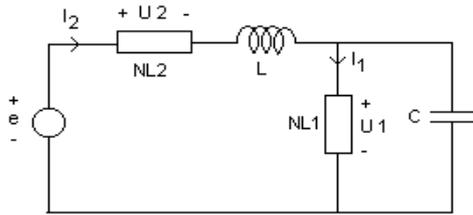


Fig.1

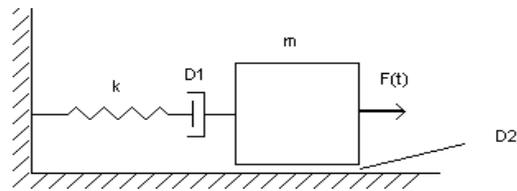
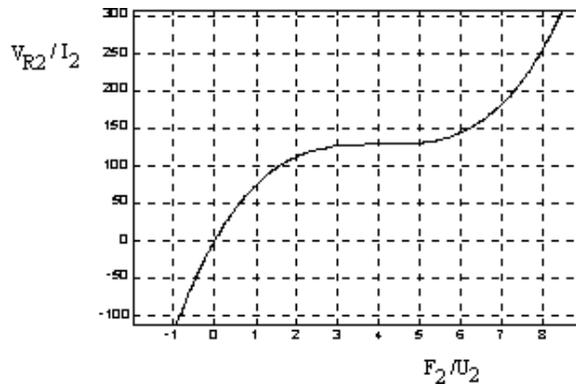
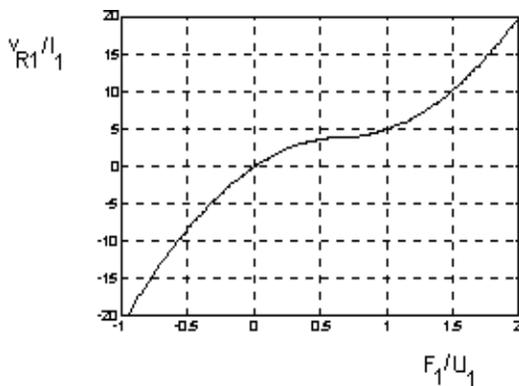


Fig.2

Las RelaCs. No Lineales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{NL1: } I_1 &= 4 + 9 (U_1 - 2/3)^2 \operatorname{sgn}(U_1 - 2/3) & \text{D1: } V_{R1} &= 4 + 9 (F_1 - 2/3)^2 \operatorname{sgn}(F_1 - 2/3) \\ \text{NL2: } U_2 &= 128 + 2 (I_2 - 4)^3 & \text{D2: } F_2 &= 128 + 2 (V_{R2} - 4)^3 \end{aligned}$$



- 1) Obtenga las Ecuaciones de Estado del sistema, y calcule el P.O. para  $e(t)=128,6666$  ( $F(t)=128,6666$ ).
- 2) I) Obtenga el MILin del sistema en torno a dicho P.O., obtenga analíticamente el retrato de fases y analice la estabilidad de dicho MILin.  
II) Analice la estabilidad del sistema original.
- 3) Realice un DB Simulink del sistema y obtenga un retrato de fases del sistema mediante simulación. Compare los resultados con los del punto anterior y extraiga conclusiones.

#### 4) Oscilador de Van der Pol [2]

El siguiente sistema corresponde a un circuito eléctrico diseñado por B.Van der Pol en 1927, conocido como oscilador de Van der Pol. El mismo se puede representar mediante las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$$

- 1) Determine los estados de equilibrio del sistema y estudie su estabilidad a partir del MILin, considerando  $\varepsilon > 0$ .
- 2) Utilizando el Simulink, obtenga un retrato de fases del sistema. Utilice como valores de los parámetros  $\varepsilon = 0.1$  y  $\omega=1$ . Extraiga conclusiones sobre el tipo de singularidades presentes en el sistema.

## 5) Proceso de oxidación [2]

El siguiente modelo de ecuaciones de estado representa la dinámica del proceso de oxidación heterogénea de monóxido de carbono (CO) y oxígeno (O<sub>2</sub>) en la superficie de un catalizador.

$$\dot{x}_1 = 0,95 \cdot (1 - x_1 - x_2) - 0,2 \cdot x_1 - 79,2 \cdot 10^3 x_1 x_2 e^{-25,2 \cdot x_2}$$

$$\dot{x}_2 = 5 \cdot (1 - x_1 - x_2)^2 e^{-0,5 \cdot (x_1 + x_2)} - 3 \cdot 10^{-4} \cdot x_2^2 - 79,2 \cdot 10^3 x_1 x_2 e^{-25,2 \cdot x_2} - 0,13 \cdot x_2$$

donde  $x_1$  representa la concentración normalizada de CO y  $x_2$  la concentración normalizada de O<sub>2</sub>. Por lo tanto, los límites de validez del modelo quedan determinados por las siguientes inecuaciones:

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$$

En este modelo es imposible calcular en forma algebraica los puntos de operación, ya que conduce a un sistema de ecuaciones trascendentes. Dichos puntos pueden ser obtenidos por métodos gráficos o bien por métodos numéricos.

- 1) Calcule los puntos de operación utilizando algún método que considere adecuado.
- 2) Simule el sistema utilizando el Simulink de modo de obtener un retrato de fases del mismo (a partir de condiciones iniciales dentro de los límites de validez mencionados).

## 6) Oscilador de Duffing [3]

En 1918 Duffing introdujo un oscilador no lineal con un término cúbico para describir el fenómeno de “endurecimiento del resorte” observado en muchos problemas mecánicos.

La siguiente variante de la ecuación de Duffing:

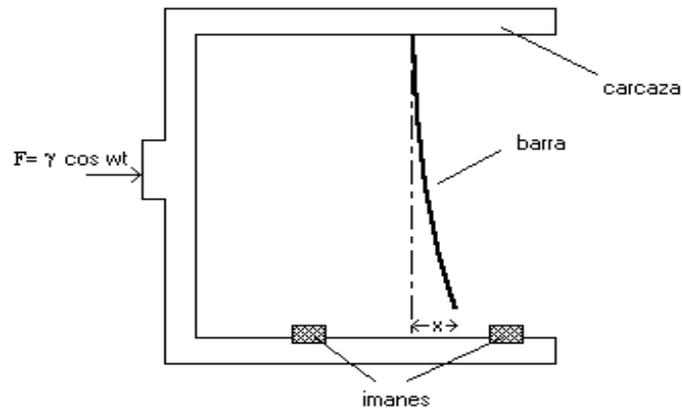
$$\ddot{x} + \delta \cdot \dot{x} + (x^3 - x) = \gamma \cos(\omega \cdot t)$$

brinda el modelo mas simple posible (normalizado) para describir las vibraciones forzadas de una barra metálica delgada sujeta al campo no uniforme de dos imanes permanentes.

Un esquema de una disposición experimental de este sistema se muestra en la figura.

La barra está fija en uno de los extremos a la carcasa rígida que soporta los dos imanes.

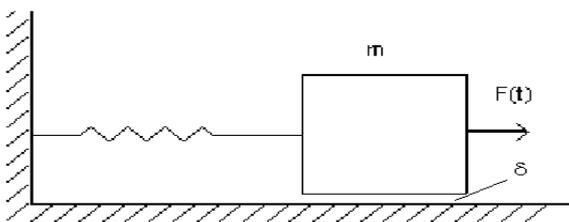
Las fuerzas de atracción de los imanes vencen las fuerzas elásticas de la barra que de otra manera permanecería derecha y, en ausencia de fuerzas externas, la barra se equilibra con su extremo libre cerca de uno u otro imán.



La disipación por fricción, amortiguamiento viscoso del aire y amortiguamiento magnético se concentran en el coeficiente  $\delta$ .

El término forzado  $F = \gamma \cos(\omega t)$  representa una sacudida senoidal de la carcasa producida por un vibrador externo.

Otro modelo que puede ser representado por dicha ecuación es el siguiente:



Si se considera la presencia de rozamiento lineal (fuerza de roce proporcional a la velocidad), la fuerza del resorte =  $m(x^3 - x)$  y una entrada  $F(t)$  cosenoidal, se llega a la misma EDO.

Para estos modelos, haciendo  $\gamma=0$  (sistema autónomo) se pide:

- 1) Calcular todos los Puntos de Equilibrio del sistema, y linealizar en torno a los mismos analizando en cada caso la estabilidad de dichos puntos.

- 2) Obtener un retrato de fases mediante simulación y analizar los resultados, para  $\delta = 1$  y para  $\delta=3$ .
- 3) Tomando ahora  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$  simule el sistema a partir de alguna condición inicial haciendo  $\delta = 0,22$  y luego  $\delta = 0,25$ . En ambos casos grafique la evolución en el espacio del vector  $(x_1, x_2, u)$ ; donde  $u = \gamma \cos(\omega t)$ . Para esto utilice el comando `comet3` de Matlab de modo de visualizar la evolución del sistema en el tiempo. Grafique también la evolución temporal de  $x$ .

### Referencias:

- [1] A03C10.95: "Retrato de fase de un sistema libre de segundo orden".
- [2] J. Böcker, I. Hartmann, Ch. Zwanzig: "Nichtlineare und adaptative Regelungssysteme" 1986, Springer-Verlag. (Disponible en Cátedra DSF).
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes: "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields". 1986, Springer-Verlag. (Disponible en Cátedra DSF).