

**Trabajo Práctico N° 4: "Análisis de sistemas no lineales en el espacio de estados: Puntos de equilibrio"  
PLL (Phase Locked Loop)****TP04.98**

D.S.F.

Dinámica de los Sistemas Físicos

A-444 / E-147

**1. Objetivos**

Estudiar la respuesta dinámica de un sistema no-lineal ( $\Sigma$ NL) de interés práctico mediante un enfoque metodológico teórico y experimental-numérico.

- Mediante técnicas de linealización se analizará el comportamiento local del  $\Sigma$ NL alrededor de sus puntos de equilibrio.
- Mediante simulación digital se analizará el comportamiento global del  $\Sigma$ NL.

El empleo combinado de técnicas de análisis teóricas y matemático-experimentales constituye una metodología muy efectiva para entender la dinámica de muchos  $\Sigma$ NL habituales en la práctica ingenieril.

**2. Lazo enganchado en fase / Phase Locked Loop (PLL)****2.1. Introducción**

El PLL es un circuito electrónico que aparece en la década de 1930 en aplicaciones de radio y posteriormente en sincronización de radares. Desde entonces, el desarrollo de las comunicaciones satelitales y diversos procesos digitales impulsó su uso, investigación y perfeccionamiento tecnológico. Actualmente existen versiones integradas ampliamente difundidas de PLL, como lo son [4], [5] :

- LM565 de NATIONAL (versión analógica)
- CP4046 de MOTOROLA (versión digital)

Algunas aplicaciones más comunes de PLL se encuentran en :

- ◇ sincronización de datos
- ◇ modems
- ◇ demodulación FM
- ◇ síntesis de frecuencia
- ◇ decodificación de tonos
- ◇ multiplicación y división de frecuencia
- ◇ recepción telemétrica
- ◇ regeneración de señales
- ◇ demodulación coherente

Pueden verse algunas de estas aplicaciones en [1], [2] y [7]. En [3] hay una recopilación de artículos publicados sobre aplicaciones y análisis más avanzados de PLL.

**2.2. Funcionamiento**

Un PLL es capaz de generar una señal alterna - senoidal o cuadrada- de igual frecuencia y fase que la señal que recibe a su entrada. De esta forma, si se producen variaciones de fase o frecuencia en la señal de entrada, la salida del PLL tiende a seguirlas. Esta constituye la propiedad de sincronismo del PLL. En ausencia de señal de entrada, la salida oscila a la frecuencia de régimen  $\omega_c$  del dispositivo.

Los componentes básicos de un PLL son los siguientes :

- Un detector de fase DF (o detector sincrónico)
- Un filtro cuya función es la de controlador del lazo realimentado (mejora la respuesta del lazo mediante criterios de performance [6])
- Un oscilador controlado por tensión VCO

En la figura 1 se muestra la estructura básica del PLL.

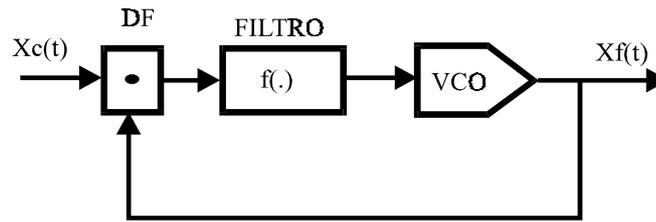


Figura 1. Estructura básica de un PLL.

El detector de fase está compuesto por un multiplicador, que hace el producto de las dos señales de entrada, y de un filtro pasa bajos, cuya función es la de eliminar las componentes de alta frecuencia provenientes de la salida del bloque producto. La figura 2 muestra un diagrama del mismo.

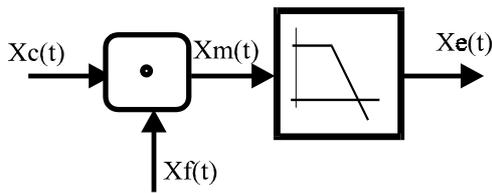


Figura 2. Esquema detallado del DF

## 2.2. Formulación de un MM del PLL.

Considerando las señales de entrada y salida respectivamente :

$$Xc(t) = Vi \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\varphi_i(t))$$

$$Xf(t) = Vo \cdot \sqrt{2} \cdot \text{cos}(\varphi_o(t))$$

con:

$\varphi_i(t)$  : fase de la señal de entrada.

$\varphi_o(t)$  : fase de la señal de salida.

y suponiendo  $Vi$  y  $Vo$  constantes, se formulará un MM del PLL tomando las fases de las señales como variables de interés. De la figura 2, la salida del bloque multiplicador del detector de fase DF es :

$$Xm(t) = 2 \cdot Vi \cdot Vo \cdot \text{sen}(\varphi_i(t)) \cdot \text{cos}(\varphi_o(t)) = Vi \cdot Vo \cdot (\text{sen}(\varphi_i - \varphi_o) + \text{sen}(\varphi_i + \varphi_o))$$

El filtro pasabajos atenúa la señal de alta frecuencia, resultando a la salida del DF :

$$Xe(t) = Kd \cdot Vi \cdot Vo \cdot \text{sen}(\varphi_i(t) - \varphi_o(t)) \quad \text{con } Kd = \text{constante del detector}$$

El VCO (oscilador controlado por tensión) genera una señal armónica de argumento (fase)  $\varphi_o$ :

$$\varphi_o = \theta_0 + \int \omega_o \cdot dt$$

$\theta_0$ : desfase propio

$\omega_o$ : frecuencia instantánea, suma de la frecuencia central  $\omega_c$  más una componente proporcional al valor instantáneo de la tensión de entrada.

$$\omega_o = \frac{d\varphi_o}{dt} = K_V \cdot Xe(t) + \omega_c$$

A partir de estas ecuaciones y suponiendo que el filtro controlador es un PI de transferencia

$$F(s) = \frac{1 + \tau_1 \cdot s}{\tau_2 \cdot s}$$

y agrupando constantes en  $K = K_v \cdot K_d \cdot V_i \cdot V_o$ , puede formularse el MM simplificado de la Figura 3.

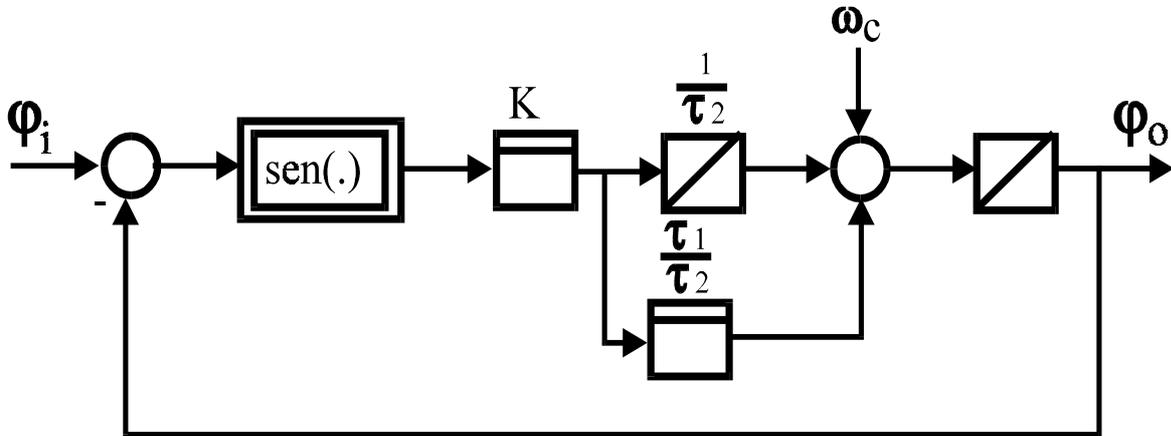


Figura 3. DBN simplificado del PLL

A partir del DBN de Figura 3 y definiendo  $\phi = \phi_i - \phi_o$  como el error de fase y  $\omega = \omega_i - \omega_c$  frecuencia de entrada referida a la de régimen del PLL, se llega a la EDO siguiente :

$$\ddot{\phi} + \frac{K\tau_1}{\tau_2}(\cos \phi) \dot{\phi} + \frac{K}{\tau_2} \sin \phi = \dot{\omega}$$

### 3. Desarrollo

El desarrollo del trabajo práctico consiste en un estudio dinámico del PLL utilizando como MM la EDO deducida en la sección anterior. Este estudio se divide en dos partes :

- 1) Dinámica local : Análisis teórico de la dinámica en el espacio de estados del PLL alrededor de sus puntos de equilibrio a través de linealización de su MM. Diseño del filtro controlador para determinar las características dinámicas de la respuesta del PLL a partir de su MM linealizado.
- 2) Dinámica global : Análisis experimental de la dinámica del PLL en todo el espacio de estados a través de la simulación digital de su MM.

Deberán compararse los resultados teóricos con los obtenidos experimentalmente, justificando las conclusiones extraídas.

#### 3.1. Dinámica local

Deberá realizarse un estudio del comportamiento en el espacio de estados del MM del PLL en las cercanías de sus puntos de equilibrio considerando entrada nula ( $\omega(t)=0$ ). Para ello deberán obtenerse :

- a) Puntos de equilibrio del PLL.
- b) Modelos incrementales linealizados del PLL alrededor de sus puntos de equilibrio.
- c) Para los siguientes valores numéricos de un PLL comercial X-R215 :

$$K_d = 2 \text{ rad/V}$$

$$K_v = 4 \cdot 10^6 \text{ rad/Vs}$$

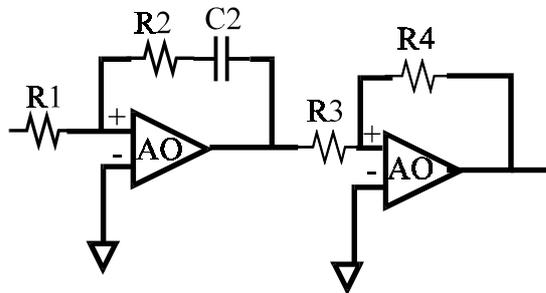
$$V_i = V_o = 10 \text{ mV}$$

Calcular todos los parámetros del filtro PI sintetizado mediante un amplificador operacional que se indica en la figura 4, de forma que el PLL tenga las siguientes características dinámicas :

$$\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_r @ 5\% \leq 300 \mu\text{seg}$$

alrededor de sus puntos de equilibrio estable.



$$F(s) = A \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2}$$

$$A = \frac{R4}{R3}; \quad \tau_1 = R1 \cdot C2; \quad \tau_2 = R2 \cdot C2;$$

Figura 4. PI implementado con AO

d) Plano de fase de los modelos incrementales para distintas condiciones iniciales, identificando el tipo de singularidad en cada uno de los puntos de equilibrio considerados.

### 3.2. Dinámica global

Deberá obtenerse un plano de fase global del PLL mediante simulación digital de su MM, de forma de conocer la evolución del sistema a partir de condiciones iniciales en todo el espacio de estados. Analizar sobre el  $\Sigma$ NL si se cumplen las especificaciones de diseño del punto 3.1.c). Justificar conclusiones.

### 4. Referencias

- [1] C. Etchart, D. Svampa, "Demodulador Costas", Monografía de regularización, Comunicaciones Electrónicas, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1991
- [2] Colombetti, "Análisis del PLL 4046", Proyecto de Ingeniería Electrónica, FCEIyA, UNR.
- [3] W. Lindsey, M. Simon, "Phase-Locked Loops & their application", IEEE Press, 1977. (En biblioteca del Dpto. de Electrónica)
- [4] Linear Handbook, National Semiconductor.
- [5] Linear Handbook, Motorola.
- [6] Wolf J. Gruen, "Theory of AFC synchronization", IEEE Press, 1977. (En biblioteca del Depto. de electrónica).
- [7] Industrial Electronics Handbook, "Phase-Locked Loop-Based Control" pp 529-534. (En biblioteca del Depto. de electrónica).

## 5. Bibliografía

- S. Junco, “Retratos de fase de un sistema libre de segundo orden , A03C10.95” Apunte de DSF, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1995.
- J. C. Gómez: “ Sistema presa-depredador, EFT02.91”, Apunte de DSF, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1991.
- S. Junco, J. C. Gómez, “Linealización de sistemas dinámicos, A01C06.91”, Apunte de DSF, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1991.
- S. Junco, “Solución de la Ecuación de Estado, A01C10.88”, Apunte de DSF, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1988. Optativo.
- S. Junco, “A01C11.88: La respuesta de modelos lineales estacionarios”, Apunte de DSF, Dpto. de Electrónica, FCEIyA, UNR, 1988. Optativo.

### • ANEXO 1

Para facilitar el desarrollo de las simulaciones para obtener los planos de fases se recomienda :  
Crear un archivo tipo Script de MATLAB que contenga el siguiente listado de instrucciones :

```
figure(1)
clf
hold on
for i=1:size(X0,1), %X0 es el vector de c.i. (X0: n x 2) donde n es
                  %el número de c.i. desde las cuales se desea
                  %simular.

    x10=X0(i,1); %x10 y x20 son las c.i. delos int del
    x20=X0(i,2); %modelo en Simulink

    sim modelo %invoca al modelo para la simulación

    plot(salida1,salida2,'b') %grafica la trayectoria.
                              %salida1,2 son salidas a Workspace del
                              %modelo Simulink
end
```