

En este apunte se describe el fenómeno de transferencia de calor en sus distintas formas, luego se definen los elementos constitutivos, tipo R y tipo C, para el posterior abordaje del modelado, con parámetros concentrados, de los sistemas térmicos. Además se brindan algunos ejemplos de modelado de sistemas térmicos y se proponen otros para ejercitación del alumno.

INDICE

1- Fundamentos físicos.

1.1 - Introducción.

1.2 - Fenómenos elementales, variables, procesos.

1.3 - Fenómenos elementales: Generación y almacenamiento

1.4 - Fenómenos elementales: Transferencia de calor

a- Conducción.

b- Convección

c- Radiación

d- Transferencia completa

2- Modelos

2.1- Introducción.

2.2- Modelos térmicos de parámetros concentrados

2.2.1- Metodología.

2.2.2- Casos ejemplares.

1. FUNDAMENTOS FISICOS

1.1 Introducción

Para describir procesos físicos la termodinámica recurre a un enfoque global de balance energético. Cuando en un determinado proceso hay en juego cantidades de energía que o puede detallar con un modelo analítico de índole mecánica, electrodinámica, nuclear, etc., recurre al concepto de calor para balancear, para cerrar las cuentas de acuerdo con el principio de conservación de la energía.

La termodinámica clásica se asienta como ciencia al madurar los tres principios (equilibrio térmico, conservación de la energía, entropía) que, sintetizando los resultados experimentales, permiten construir una teoría con un formalismo (Gibbs) que explica fenómenos concretos en una diversidad de condiciones.

No obstante dicha diversidad, todos estos procesos se sujetan (en la teoría) a una hipótesis común: son reversibles, es decir, evolucionan según una sucesión continua de estados de equilibrio. No es entonces una auténtica teoría dinámica, por lo que no puede dar cuenta de los procesos reales cuyos cambios de estado de equilibrio ocurren a través de otros que no lo son.

Siendo entonces irreversibles los procesos térmicos reales, se necesita una termodinámica de procesos irreversibles. Tal teoría ya existe y cubre una amplia gama de prácticas experimentales. Sin embargo, las restricciones en los casos tratables, junto con su complejidad teórica y computacional la excluyen de la enseñanza de grado en Ingeniería, y en los casos mas corrientes de la práctica ingenieril.

El camino que seguimos aquí para modelar procesos irreversibles que aproximan a los cuerpos hacia su estado de equilibrio térmico, no esta sustentado en la teoría termodinámica de los procesos irreversibles, sino que recurre a los resultados específicos de la física experimental, combinados con leyes básicas conocidas de la termodinámica clásica.

Este es un tratamiento de validez verificada, que da resultados satisfactorios en muchos tipos de aplicaciones.

1.3 Fenómenos elementales: generación y almacenamiento

a- *GENERACION*: Entenderemos por generación de energía térmica la conversión en calor de energía mecánica, eléctrica, química, atómica, nuclear, etc.

Su estudio recurre a las leyes de disipación de todos estos dominios físicos.

b- *ALMACENAMIENTO*: Considerando fenómenos exclusivamente térmicos, el almacenamiento de energía resulta del balance de calor de un cuerpo involucrado en un proceso termodinámico.

- Balance de calor:

$$Q_{\text{neto}} = \text{Energía almacenada}$$

$$Q_{\text{neto}} = Q_{\text{generado}} - Q_{\text{transferido}}$$

$$Q_{\text{transferido}} = Q_{\text{entregado}} - Q_{\text{recibido}}$$

Por otra parte, sabemos que, a no ser que el cuerpo cambie de estado de agregación o que se lo idealice como una fuente de temperatura constante, dicho almacenamiento produce variaciones de temperatura. La relación entre ambas magnitudes puede estudiarse en base al concepto de entropía o, como haremos aquí, al de calor específico (y su correlativo de capacidad térmica) a partir de la siguiente expresión básica:

$$m.c.(\theta_f - \theta_i) = Q_{\text{neto}} \quad \text{Ec.8}$$

θ_i : temperatura inicial del proceso

θ_f : temperatura final del proceso

m: masa del cuerpo

c: calor específico por unidad de masa

1.4 Fenómenos elementales: transferencia de calor.

Bajo transferencia de calor entendemos los procesos de su propagación, según la concurrencia en la práctica de dos o los tres modos elementales.

- Conducción
- Convección
- Radiación

En todos los casos que se describen a continuación, considérese un fenómeno estacionario, o un tiempo fijo t.

a- Conducción

La conducción esta relacionada con el desordenado movimiento térmico de las partículas en un cuerpo en contacto directo. Mientras que en los metales el rol fundamental lo juegan los electrones libres, en los medios cristalinos la conducción se debe a las oscilaciones de los átomos en la red y en los gases a la difusión molecular. Conducción pura se observa en el interior de los sólidos opacos y en los fluidos a condición de que la presión en su seno sea uniforme.

El calor se propaga de los puntos de mayor temperatura (calientes) a los de menor temperatura (fríos). Según la ley (experimental) de Fourier sobre conducción, el flujo de calor por unidad de área isotérmica es proporcional al gradiente de temperatura:

$$q = \frac{d\phi}{dA} = -\lambda \cdot \text{grad } \theta = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dn} \quad \text{Ec.9}$$

λ : coeficiente de conductividad del calor o conductividad térmica [λ]=W/m.K

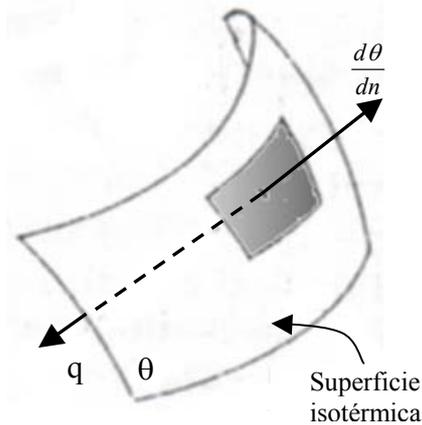


Figura 1

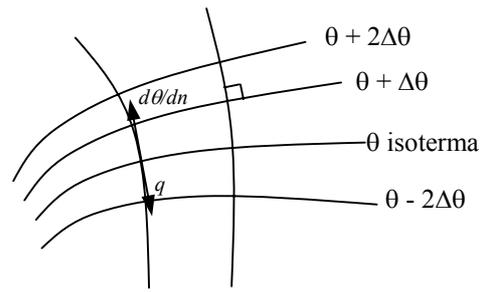


Figura 2

Las trayectorias ortogonales a las isoterma de un plano cualquiera están en una relación biunívoca con el gradiente en todo punto de plano, y definen las líneas de flujo de calor en (ese plano de) el cuerpo durante un proceso estacionario.

La conductividad térmica λ es una propiedad física de cada sustancia, que depende de su estructura, densidad, humedad, temperatura, y de la presión en el caso de los fluidos.

Para la mayoría de los materiales aislantes del calor la dependencia de λ con la temperatura es prácticamente lineal:

$$\lambda_{\theta} = \lambda_0 + b.\theta \quad \text{W/m}^{\circ}\text{C} \quad \text{Ec.10}$$

$\lambda_{\theta}, \lambda_0$: conductividades térmicas a $\theta^{\circ}\text{C}$ y 0°C

b : coeficiente de temperatura determinado experimentalmente .

Conductividad térmica de algunos materiales

MATERIAL	ρ , kg/m ²	θ , °C	λ , W/(m°C)
Aire	1,293	0	0,024
Vapor	5,16	180	0,38
Acero	7900	0 a 300	45 a 62,9
Ladrillo rojo	1900 a 1700	0	0,81 a 0,7
Agua	1000 a 965	0 a 90	0,55 a 0,63

De otra fuente

MATERIAL	C , J/(kg K)	λ , W/(m°C)
Aluminio	$0,92.10^3$	210
Constantan	0,41	25
Corcho	1,67 a 2,1	0,21 a 0,33
Plata	0,23	418
Silicio	0,70	-
Tentelio	0,14	54

b- Convección

La transferencia de calor por convección tiene lugar entre las partes de un fluido (o entre fluidos y cuerpos sólidos) que estén a temperaturas desiguales, produciéndose como resultado del movimiento de partículas macroscópicas del fluido, las unas respecto a las otras y/ o a los sólidos.

Son procesos muy complicados que dependen de muchos factores: el origen del movimiento (convección libre, convección forzada); las condiciones del movimiento (régimen laminar, régimen turbulento); el campo de velocidades del fluido, sus propiedades físicas y químicas (viscosidad, calor específico, densidad, conductividad térmica, etc.); la geometría de las paredes limitantes del fluido (perfil, dimensiones); las temperaturas en el fluido y en las paredes; otras condiciones de contorno.

Los fenómenos subyacentes a la convección –intercambio de impulso y de energía de las partículas- se describen con las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos (continuidad, Navier-Stokes) y las de conservación de la energía. Dado el cúmulo de factores intervinientes a partir de este enfoque, resultan ecuaciones sumamente complejas, posibles de resolver solo en casos muy específicos. Por ello es que para el estudio de la convección se recurre además –y preponderantemente- a la investigación experimental mediante los métodos de *modelado físico* (representación en escala en el mismo dominio físico) y de *analogía* (distinto dominio físico). La validez del traslado de los resultados (teóricos o experimentales) de los fenómenos estudiados sobre un sistema a otros se determina conforme a la *Teoría de la Semejanza*.

Para ilustrar, veamos un proceso importante en ingeniería: el intercambio de calor entre un fluido en movimiento y las paredes que la limitan.

La figura muestra, en una sección transversal al movimiento, un (posible) perfil de la temperatura desde la pared hacia el seno del fluido. δ es el espesor de la capa límite donde el movimiento es laminar; más allá es turbulento.

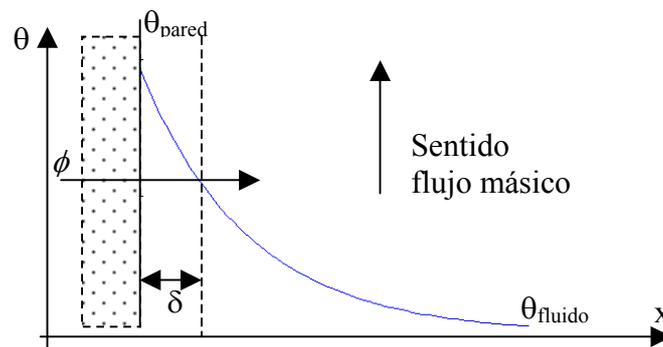


Figura 3

Los cálculos prácticos de calor transferidos se hacen con la fórmula (experimental) o *Ley de enfriamiento de Newton*.

$$q = \frac{d\phi}{dA} = \alpha (\theta_p - \theta_f) \quad [q]=W/m^3 \quad \text{Ec.11}$$

α : coeficiente (local) de traspaso de calor. Debe determinarse por experimentación directa sobre el proceso en cuestión o por traslado de resultados de procesos semejantes, mediante la fundamentación de la teoría de la Semejanza.

En la teoría de la semejanza, la idea básica consiste en reducir el número de magnitudes físicas dimensionales que intervienen en un proceso combinándolas en grupos o términos adimensionales (números) denominados invariantes o *criterios de semejanza*. Estos criterios funcionan como nuevas variables en relaciones funcionales llamadas ecuaciones de criterios, cada una de las cuales vale para ciertos rangos de los criterios involucrados y define una clase de fenómenos. O sea, cada ecuación de criterio es un modelo matemático de una clase de semejanza o conjunto de procesos con criterios dentro de determinada región.

Los resultados obtenidos para un proceso se trasladan a todos sus semejantes, que resultan ser los que tienen criterios (números) iguales (considerados de a pares correspondientes). El traslado de los valores de sus variables o parámetros se hace de acuerdo a los factores de escala o constantes de semejanza que relacionan las variables correspondientes. (Estas constantes son las que combinadas -obsérvese que equivale a combinar variables- definen criterios de semejanza).

Considérense por ejemplo dos movimientos. Se pueden definir los factores de escala para las respectivas distancias, tiempos y velocidades:

$$k_d = d_2/d_1 \quad k_t = t_2/t_1 \quad k_v = v_2/v_1 \quad \text{Ec.12}$$

Como se ve, cada variable puede tener su propia *constante de semejanza*, distinta de las otras, aunque no todas son independientes. En este caso vale

$$\frac{k_v \cdot k_t}{k_d} = 1 \quad \text{Ec.13}$$

Algunos criterios de semejanza relevantes son (llevan las dos primeras letras de científicos que estudiaros fenómenos asociados):

- Número de Reynolds: $Re = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\mu} = \frac{\text{Fuerza de inercia}}{\text{Fuerza de rozamiento}} \quad \text{Ec.14}$

A igual Re, el carácter de flujo de diferentes fluidos por ejemplo de distinta viscosidad μ y o densidad ρ , a diferentes velocidades v , por tubos de diferentes diámetros l , es el mismo.

- Número de Grashof: $Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta\theta \cdot l^3}{\mu^2} = \frac{\text{Fuerza de inercia} \cdot \text{Peso}}{(\text{Fuerza de roce})^2} \quad \text{Ec.15}$

β : coeficiente térmico de dilatación del fluido.

μ : viscosidad cinemática

g : aceleración de la gravedad

$\Delta\theta$: valor absoluto de la diferencia de temperaturas fluido-pared.

- Número de Nußelt: $Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \frac{q \text{ convección fluido}}{q \text{ conducción pared}} \quad \text{Ec.16}$

α : coeficiente de traspaso de calor

- Número de Péclét: $Pe = \frac{v \cdot l}{a} \quad \text{Ec.17}$

a : coeficiente de termodifusividad $[a]=m^2/s$

- Número de Prandtl: $Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\mu}{\alpha} \quad \text{Ec.18}$

Caracteriza las propiedades físicas del fluido

En todos los casos l es una longitud característica (diámetro del tubo, por ejemplo).

Hay otros números o criterios como los de Mach (M), de Fourier (Fo), de Fraude (Fr), de Strouhal (St), etc.

Las ecuaciones de criterio son del tipo:

$$F(Un, Re, Pr, Gr) = 0 \quad \text{Ec.19}$$

Son ecuaciones estáticas (recodemos que se trata de procesos estacionarios). En el ejemplo expuesto del proceso de transferencia de calor entre un líquido que fluye turbulento y las paredes del tubo que lo contiene, la ecuación de criterio:

$$Nu = 0,021 \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_p} \right)^{0,25} \quad \text{Ec.20}$$

donde los criterios se calculan en relación a la temperatura media θ_f del fluido y θ_p de la pared.

Con los parámetros isométricos y físicos del problema, la velocidad del fluido y las temperaturas, pueden calcularse Re_f , Pr_f , Pr_p y con ellas Nu .

De allí, y recurriendo a la definición del número de Nuβelt, se obtiene:

$$\alpha = \frac{\lambda \cdot Nu}{l} \quad \text{Ec.21}$$

(aquí l representa el diámetro del tubo)

Ahora podemos calcular el flujo de calor ϕ según la ley de Newton (para incrementos finitos)

$$\phi = A \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \quad \text{Ec.22}$$

A: Área del caño

$$\Delta\theta: \theta_f - \theta_p \quad \text{Ec.23}$$

Ejemplo numérico

Determinar el coeficiente local de transferencia de calor desde el agua a las paredes de un tubo de diámetro $d = 50$ mm. La temperatura de las paredes es $\theta_p = 70^\circ\text{C}$. El agua fluye a una velocidad $v_f = 0,8$ m/s y su temperatura es $\theta_f = 80^\circ\text{C}$.

De la correspondiente tabla obtenemos que para $\theta_f = 80^\circ\text{C}$, $\lambda_f = 0,669$ W/(m.°C), $\mu_f = 5,56 \cdot 10^{-9}$ m²/s; $Pr_f = 3,54$. A temperatura $\theta_p = 70^\circ\text{C}$, $Pr_p = 2,55$.

El número de Reynolds es

$$Re_f = \frac{v_f \cdot d}{\mu_f} = \frac{0,8 \cdot 0,05}{5,56 \cdot 10^{-9}} = 7,2 \cdot 10^4$$

$$Re_f > 10^4; Re_f^{0,8} = (7,2 \cdot 10^4)^{0,8} = 7,7 \cdot 10^3$$

El número de Prandtl es:

$$Pr_f^{0,43} = 3,54^{0,43} = 1,72$$

$$\left(\frac{Pr_f}{Pr_p} \right)^{0,25} = \left(\frac{3,54}{2,55} \right)^{0,25} = 1,09$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de criterio tenemos:

$$Nu_f = 0,021 \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_p} \right)^{0,25} = 0,021 \cdot 7,7 \cdot 10^3 \cdot 1,72 \cdot 1,09 = 303$$

El coeficiente local de transferencia de calor α es:

$$\alpha = \frac{Nu_f \cdot \lambda_f}{d} = \frac{303 \cdot 0,669}{0,05} = 3920 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

La siguiente tabla ilustra algunos valores de α :

CONDICIONES DE CONVECCION	LIMITES DE α , [W/m ² .°C]
Gases en convección natural	6 a 120
Agua en convección natural	120 a 1160
Gases fluyendo entre tuberías	12 a 360
Agua fluyendo entre tuberías	600 a 11600
Agua hirviendo en el interior de una tubería	2300 a 30000 y mas
Película de vapor de agua condensándose	4600 a 17500

c- Radiación

Es el proceso de propagación de la energía interna de un cuerpo o sustancia por medio de ondas electromagnéticas. Una porción de la energía térmica es emitida por radiación, que se convierte nuevamente en energía térmica cuando es absorbida por otros cuerpos.

La radiación térmica (la que produce cambios en la temperatura del emisor o del receptor) abarca las longitudes de onda λ entre 0,8 μm y 0,8 mm aproximadamente.

La radiación de los cuerpos depende de su naturaleza física, temperatura y estado de sus superficies (Ley de Prévost), influyendo la presión y la densidad en los gases. En los sólidos y líquidos solo una fina capa superficial participa del proceso, que es independiente del medio. Su potencia radiante es considerable en la mayoría de ellos. Los gases poseen una potencia mucho menor, aunque participa todo su volumen del proceso.

De la radiación incidente sobre una superficie, parte de la energía es absorbida (Q_α), parte reflejada (Q_ρ), y otra parte pasa a través del cuerpo (Q_τ).

La cantidad total de energía se compone:

$$Q = Q_\alpha + Q_\rho + Q_\tau \quad \text{Ec.24}$$

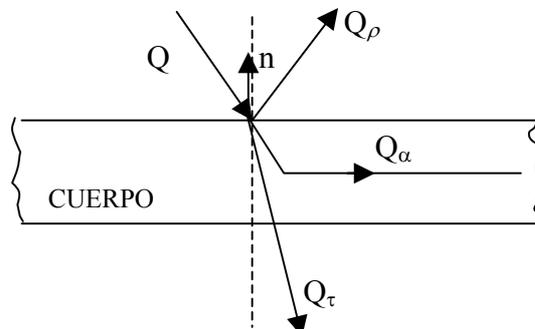


Figura 4

La proporción con que participa cada componente, con independencia de la cantidad total, caracteriza la receptividad de radiación térmica del cuerpo. Se definen los grados de:

$$\text{Absorción: } \alpha = Q_\alpha / Q \quad \text{Ec.25}$$

$$\text{Reflexión: } \rho = Q_\rho / Q \quad \text{Ec.26}$$

$$\text{Transmisión: } \tau = Q_\tau / Q \quad \text{Ec.27}$$

Para los cuales vale obviamente:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad \text{Ec.28}$$

Estos grados o coeficientes varían según la longitud de onda λ -no confundir con el coeficiente de conductividad térmica- de la radiación incidente.

$$\alpha = \alpha(\lambda) \quad \rho = \rho(\lambda) \quad \tau = \tau(\lambda) \quad \text{Ec.29}$$

Esto explica, por ejemplo, el llamado efecto invernadero: el vidrio, si bien absorbe las ondas ultravioletas de la radiación exterior, refleja la radiación térmica interior, producto de la conversión en energía térmica de la radiación visible que traspasa el vidrio.

Los valores unitarios de los grados indican casos límites idealizados, solo realizables en forma aproximada:

- $\alpha = 1$ cuerpo negro.
- $\rho = 1$ cuerpo blanco perfecto, reflector o espejo ideal.
- $\tau = 1$ medio diatérmano o transparente absoluto.

La mayoría de los sólidos y líquidos son prácticamente opacos, (no transparentes) a la radiación térmica:

- $\tau = 0$ sustancias atérmanas
- $\tau = 0, \quad 0 < \alpha < 1$ cuerpos grises (con α independiente de λ)

La potencia radiante de los cuerpos depende de la temperatura en forma creciente, dado que así lo hace la temperatura con la energía interna. Esta dependencia de la temperatura es mayor que para la conducción o la convección. Por ello, a bajas temperaturas predominan conducción y convección, mientras que a altas el medio primordial de transferencia de calor es la radiación.

1.5 Leves (cuantitativas) básicas.

Considerando la emisión de una superficie hacia un hemisferio del espacio, definimos:

Q: energía irradiada total $[Q]=J$ (Joules)
 $\phi = dQ/dt$: $[\phi]=W$ (Vatio) Ec.30
M: emisividad $[M]=W/m^2$

o, radiación específica o densidad integral de radiación, es el flujo radiante por unidad de área

$d\phi = M \cdot dA$ dA : área elemental Ec.31

I: Intensidad radiante $[I]=W/m^2$
 $d\phi = I \cdot d\Omega$ $d\Omega$: elemento de ángulo sólido en una bola unitaria Ec.32

Emisividad e intensidad dependen de la temperatura. La emisividad se compone de aportes energéticos de las diferentes longitudes de onda:

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(\lambda, T) \cdot d\lambda \quad \text{Ec.33}$$

$M_{\lambda}(\lambda, T)$: emisividad espectral $[M_{\lambda}(\lambda, T)]=W/m^3$

Para la intensidad de radiación valen las *leyes de Lambert*

- *Ley del coseno*: $I_{\gamma} = I_n(T) \cdot \cos \gamma$

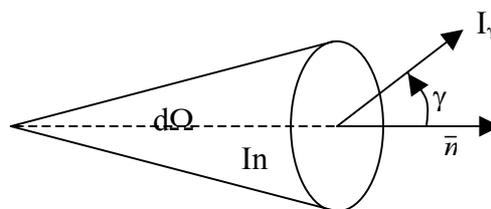


Figura 5

- *Ley de la distancia*: la intensidad de radiación disminuye con el cuadrado de la distancia.

Ley de Kirchhoff: los cuerpos que absorben calor, también lo irradian. La ley vincula los grados de absorción y de emisión de los cuerpos grises y negros

Supongamos transferencia exclusiva de energía por radiación entre dos cuerpos con $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=1$, a la misma temperatura T, que conforman un sistema adiabático. Según el segundo principio, no se deben producir modificaciones de la temperatura debido a la radiación. Luego, a temperatura constante cada cuerpo irradia tanta energía térmica como absorbe.

Luego, el cuerpo negro de máxima absorción ($\alpha=1$), también debe emitir un máximo, que se puede indicar con la emisividad M_N .

La emisividad de cuerpos cualesquiera se estudia en relación con el del cuerpo negro a través del grado de emisión ($\varepsilon(T)$):

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M_N(T)} = \frac{\alpha(T)}{\alpha_N(T)} = \alpha(T) \quad \text{Ec.34}$$

O sea que el grado de emisión de un radiador a la temperatura T es idéntico a su grado de absorción de radiación negra a dicha temperatura.

Veamos entonces las leyes para el cuerpo negro (subíndice N).

Ley de Planck para la emisividad espectral del cuerpo negro

$$M_{\lambda N}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot [e^{c_2/\lambda T} - 1]} \quad \text{Ec.35}$$

c_1, c_2 : primera y segunda constantes (de radiación) de Planck.

$$c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ W} \cdot \text{m}^2$$

$$c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Ley de Stefan-Boltzman: se obtiene teóricamente integrando la anterior

$$M_N(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda N}(\lambda, T) \cdot d\lambda = \sigma_N T^4 \quad [M_N(T)] = \text{W}/\text{m}^2 \quad \text{Ec.36}$$

$$\sigma_N = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4, \text{ constante de Stefan-Boltzman.}$$

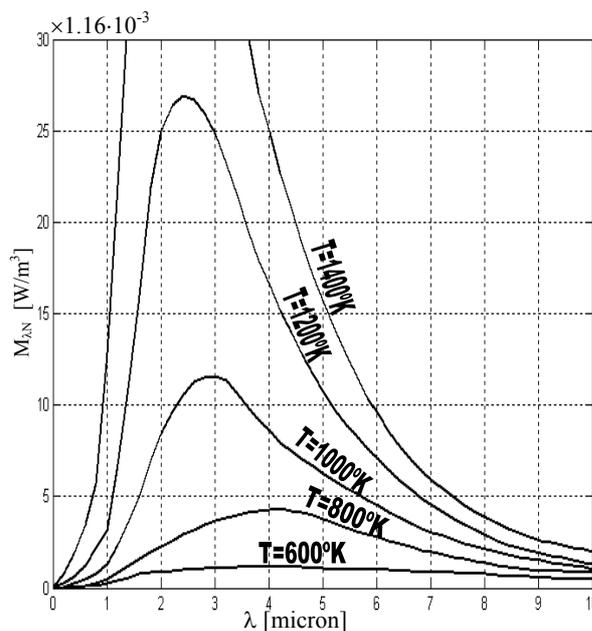


Figura 6

Suele escribirse:

$$M_N(T) = C_N \cdot (T/100)^4 \quad \text{Ec.37}$$

Con la constante de radiación del cuerpo negro, $C_N = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

De la ley de Planck resulta que los máximos de emisión se corren hacia menores longitudes de onda con temperatura creciente. Cualitativamente esto es expresado por la Ley de corrimiento de Wien

$$(\lambda \cdot T)_{\max} = 2,896 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad \text{Ec.38}$$

Expresando de aquí la longitud de onda del máximo en función de la temperatura, y reemplazando en la fórmula de Planck, se obtiene la emisividad espectral máxima del cuerpo negro en función de la temperatura:

$$M_{\lambda_{\max N}} = 1,307 \cdot T^5 \text{ W}/\text{m}^3 \quad \text{Ec.39}$$

Para los cuerpos grises la emisividad espectral es, aproximadamente según un factor constante, menor que la emisividad del cuerpo negro a la misma temperatura:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{M_\lambda(\lambda, T)}{M_{\lambda N}(\lambda, T)} = \text{constante} \quad \text{Ec.40}$$

Las longitudes de los máximos coinciden aproximadamente, pudiéndose escribir para la ley de Stefan-Boltzman:

$$M(T) = \varepsilon \cdot C_N \cdot (T/100)^4 \quad \text{Ec.41}$$

Con la constante de radiación del cuerpo gris

$$C = \varepsilon \cdot C_N \quad \text{Ec.42}$$

Ejemplos de intercambio de energía radiante

- Intercambio de energía radiante entre superficies planas paralelas.

Si dos superficies paralelas 1 y 2 a temperaturas diferentes T_1 y T_2 están colocados a una distancia pequeña una de otra, hay un intercambio de calor por radiación entre ellas.

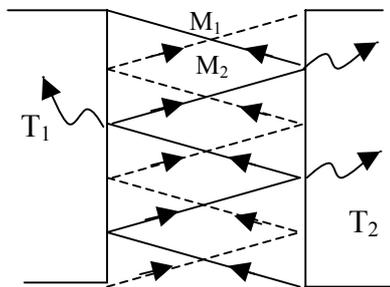


Figura 7

La primera superficie emite rayos a la segunda que absorbe una parte y refleja otra. En este caso, solo primera reflexión es importante ya que las cantidades de energía reflejadas repetidamente son tan pequeñas que pueden ignorarse. La radiación total M_1 de la primera superficie consiste de su radiación inherente

$$M_{1i} = C_1 \cdot (T/100)^4$$

y lo que refleja de la radiación emitida por la segunda superficie

$$M_{1r} = M_2 \cdot (1 - \alpha)$$

entonces:

$$M_1 = C_1 \cdot (T/100)^4 + M_2 \cdot (1 - \alpha_1)$$

Análogamente para la otra superficie:

$$M_2 = C_2 \cdot (T/100)^4 + M_1 \cdot (1 - \alpha_2)$$

En la figura, el calor absorbido por cada superficie es indicado por las flechas ondeadas. La diferencia entre las cantidades de calor emitidas por las dos superficies es igual a la cantidad de calor radiante intercambiada, y cuando $T_1 > T_2$

$$q = M_1 - M_2$$

Sustituyendo los valores de M_1 y M_2 en esta fórmula, tenemos la expresión para el flujo neto de calor radiante intercambiado por dos superficies planas paralelas de área A :

$$Q = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_0} \cdot A \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \text{ W}$$

Ejercicio: Plantear el cálculo de la radiación total y de Q para el caso en que las superficies próximas sean dos esferas concéntricas de temperaturas T_1 y T_2 , áreas A_1 y A_2 , y coeficientes de absorción α_1 y α_2 respectivamente.

Ejercicio: ídem para el caso de dos cilindros concéntricos.

d- Transferencia compleja

Transferencia compleja de calor designa usualmente en un proceso de todos o por lo menos dos de los modos anteriores.

El calentamiento desde abajo (o enfriamiento desde arriba) de un líquido es un proceso común que involucra dos modos elementales: *conducción* preponderantemente a través de las paredes del recipiente y también en el interior del líquido, donde sin embargo el rol esencial lo juega la convección forzada por el campo gravitatorio sobre las capas de diferente densidad (ya que están a diferentes temperaturas).

Procesos más complicados aún y comunes en la práctica agregan transferencia de masa. Un ejemplo es la evaporación de agua, donde en adición al calor, se transfiere masa del agua líquida a la mezcla aire-vapor. Estos procesos se denominan *transferencia convectiva de masa*.

2. MODELOS

2.1 Introducción

Teniendo en cuenta la dependencia espacio-temporal de las variables descriptivas los modelos más precisos involucran ecuaciones en derivadas parciales (EDeP) y se conocen como de *parámetros distribuidos*.

La conservación de la energía es la ley básica para la formulación de los modelos matemáticos. A los fines de presentar este enfoque y el tipo de modelos supongamos un volumen V ocupado por un sólido homogéneo e isótropo, con propiedades físicas independientes de la temperatura y de la presión. Podemos hacer el siguiente balance de energía térmica por unidad de tiempo: el calor generado es igual al almacenado más el entregado al medio por conducción.

$$\Phi_G = \phi_a + \phi_c \quad \text{Ec.42}$$

Φ_G : calor generado por unidad de tiempo, en todo el volumen, con

γ_G : idem por unidad de volumen.

escribimos

$$\Phi_G = \int_V \gamma_G(\vec{r}, t) \cdot dV \quad \text{Ec.43}$$

ϕ_a : calor almacenado por unidad de tiempo

$$\phi_a = \int_V \gamma_a(\vec{r}, t) \cdot dV \quad \text{Ec.44}$$

Calculamos γ_a , o calor almacenado por unidad de tiempo y de volumen recurriendo al calor específico c_p .

$$m \cdot c_p \cdot \Delta\theta = \Delta Q_a \quad \text{Ec.45}$$

$$\rho \cdot dV \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dQ_a}{dt} = \gamma_a \quad \rightarrow \quad \gamma_a(\vec{r}, t) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{d\theta(\vec{r}, t)}{dt} \cdot dV$$

$$\rightarrow \quad \phi_a = \int_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot dV \quad \text{Ec.46}$$

Calculamos el calor ϕ_c conducido por unidad de tiempo a partir de la ley de Fourier:

$$\phi_c = \iint_A (-\lambda \cdot \text{grad } \theta(r, t)) \cdot dA = - \int_V \lambda \cdot \text{div grad } \theta \cdot dV \quad \text{Ec.47}$$

Recordamos la expresión del campo vectorial

$$\text{grad } \theta = \nabla \theta = \vec{i} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \vec{j} \cdot \frac{d\theta}{dy} + \vec{k} \cdot \frac{d\theta}{dz}$$

y la del campo escalar

$$\text{div grad } \theta = \nabla^2 \theta = \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dy^2} + \frac{d^2 \theta}{dz^2}$$

Reuniendo los tres términos en el primer miembro

$$\int_V \left(\gamma_G - \rho \cdot c_p \cdot \frac{d\theta}{dt} + \lambda \cdot \nabla^2 \theta \right) \cdot dV = 0 \quad \text{Ec.48}$$

o, equivalentemente, en forma diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \nabla^2 \theta + \frac{\gamma_G}{\rho \cdot c_p} \quad \text{Ec.49}$$

Esta EDeP inhomogénea de segundo orden es el modelo que gobierna la dinámica del campo de temperaturas en las condiciones tratadas. Se trata obviamente de un fenómeno inestacionario.

En el caso homogéneo, la velocidad de nivelación de la temperatura de distintos lugares es determinada por el coeficiente $\lambda/(\rho \cdot c_p)$, cuyas unidades son m^2/s . Es una especie de coeficiente de difusión de la temperatura y se lo denomina *termodifusividad*. También puede encontrarse el nombre de *conductividad de temperatura* (Distinguirlo de λ conductividad del calor o térmica).

Para resolver esta ecuación deben conocerse las condiciones iniciales y las de contorno.

La condición inicial describe el campo de temperatura en un instante dado t_0 :

$$\theta_0 = \theta(\mathbf{r}, t_0) \quad \text{Ec.50}$$

Las condiciones de contorno pueden ser de distinto tipo:

- C.C. de Dirichlet: aquí $\theta(\mathbf{r}_{\text{cont}}, t)$ es una información disponible. Podría decirse que se supone al cuerpo inmerso en una fuente de temperatura conocida.
- C.C. de Neumann: se da como dato el flujo de calor ϕ normal a la superficie de contorno del cuerpo. Podríamos hablar de una fuente de flujo de calor actuando sobre el cuerpo.
- C.C. mixtas: combinan ambas anteriores.

Resolver este tipo de problemas es tarea de la física aplicada y de la física matemática. Es un campo de intensa investigación y de búsqueda y prueba de métodos numéricos avanzados.

Su tratamiento excedería largamente los objetivos de este curso e inclusive las necesidades que en cuanto a modelos matemáticos se plantean desde una práctica corriente en control y automatización de sistemas.

Lo que haremos será, mediante hipótesis simplificadoras, transformar los problemas de parámetros distribuidos en unos más simples, de parámetros concentrados, descriptos por EDOs.

2.2 Modelos térmicos de parámetros concentrados.

2.2.1 Metodología

El pasaje del modelo dinámico EDeP al modelo dinámico EDO implica la eliminación del espacio como variable absoluta.

La distribución de los fenómenos sobre un continuo espacial hace necesaria la descripción con magnitudes dependiendo de cada instante y de cada punto del espacio. Así es como en los modelos que expresan la rapidez de cambio de las variables descriptivas aparecen las derivadas parciales, para tener en cuenta la variación espacial, tal como se vio en el ejemplo anterior.

Para obtener una EDO, se hace una partición geométrica del volumen considerado en dominios finitos, a cada uno de los cuales se le asigna una distribución uniforme (igual valor en toda su extensión) de las variables descriptivas (temperatura promedio en cada volumen o

flujo de calor promedio en su frontera). A causa de esta premediación desaparecerá la dependencia espacial de las variables descriptivas, obteniéndose un número finito de señales temporales, tanto para cada dominio como para el todo.

No es posible dar una receta general para hacer la partición. Ello depende de los materiales y fenómenos intervinientes en el proceso, de la extensión física del sistema, etc.; siempre en relación con la finalidad del modelo buscada.

Los ejemplos que trabajaremos permitirán ir formando un criterio sobre este problema.

Simultáneamente, o después de haber hecho la partición geométrica, hay que determinar los fenómenos elementales de mayor importancia en cada dominio finito.

El almacenamiento de energía, que se traduce en un aumento de temperatura, según:

$$m.c.(\theta_f - \theta_i) = Q_{\text{neto}} \quad \text{Ec.51}$$

es el causante de la dinámica, lo que puede verse matemáticamente en la expresión diferencial, involucrando el tiempo, de la ecuación anterior:

$$m.c. \frac{d\theta}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{Ec.52}$$

donde se trabaja con las hipótesis:

θ : temperatura uniforme en el volumen parcial

ϕ : flujo de calor neto promediado en y a través de las paredes o de la frontera del dominio finito.

De esta manera θ es naturalmente la variable de estado, en correspondencia con su carácter representativo de la energía interna del medio considerado (a excepción de la energía puesta en juego en cambios de fase, como por ejemplo calor latente de fusión).

Definimos como capacidad térmica al coeficiente.

$$C = m.c \quad \text{Ec.54}$$

Rigurosamente la ecuación 53 es alineal, ya que $c = c(\theta)$. En muchos casos, según el rango de temperaturas de trabajo, puede tomarse un valor promedio y, en consecuencia, un modelo lineal.

En lenguaje DB:

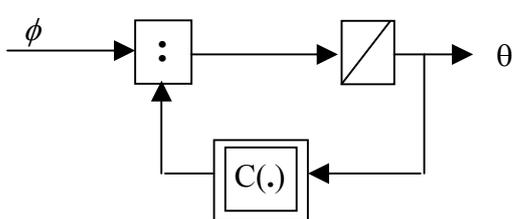


Figura 8.a: alineal con $c = c(\theta)$

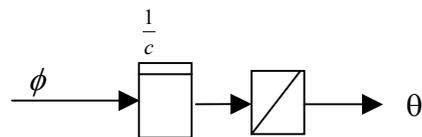


Figura 8.b: lineal con c promedio

Dado que ϕ representa un flujo neto, puede descomponerse en flujo recibido (ϕ_r) y flujo entregado (ϕ_e):

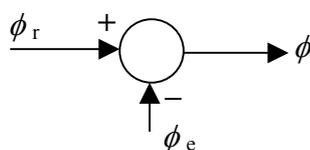


Figura 9

Ambos pueden ser independientes del sistema en cuestión, caso en que se modeliza con ayuda de fuentes (si fuera necesario habría que modelar también su dinámica), o pueden ser dependientes de otras magnitudes del propio sistema.

Considerando por ejemplo *conducción* desde el volumen parcial contiguo V_c supuesto a una temperatura mayor θ_c , hacia el que estamos modelando. Tenemos un flujo ϕ_r a través de la pared divisoria (que puede o no existir como ya veremos).

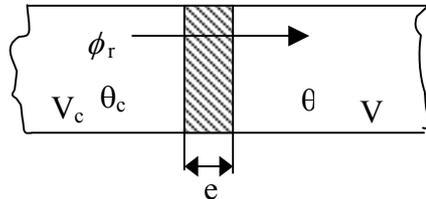


Figura 10

Esto se puede modelar con ayuda de la ley de Fourier, que aquí se escribe

$$q = \frac{\phi_r}{A_{pared}} = \frac{\lambda \cdot (\theta_c - \theta)}{e} \quad \text{Ec.55}$$

$$\phi_r = \frac{\lambda \cdot A_p \cdot (\theta_c - \theta)}{e} \quad \text{Ec.56}$$

Se ha despreciado totalmente la capacidad de almacenar energía de la pared.

Dado que de acuerdo al principio cero, las diferencias de temperaturas tienden a anularse produciendo un flujo de calor, suele establecerse la analogía eléctrica:

Térmico	Eléctrico
$\Delta\theta$	Diferencia de potencial
ϕ	Corriente

En este esquema es inmediata la definición del coeficiente

$$R = \frac{e}{A \cdot \lambda} \quad [R] = \text{K/W} \quad \text{Ec.57}$$

como resistencia térmica.

Un modelo de un sistema simple, incluyendo una fuente de energía, nos dará una idea de cómo tratar estos fenómenos.

Con este coeficiente no debe asociarse un elemento resistor en el sentido de los diagramas de enlace, ya que ϕ y θ no son variables de potencia en ese contexto.

Ejemplo: Trampa solar

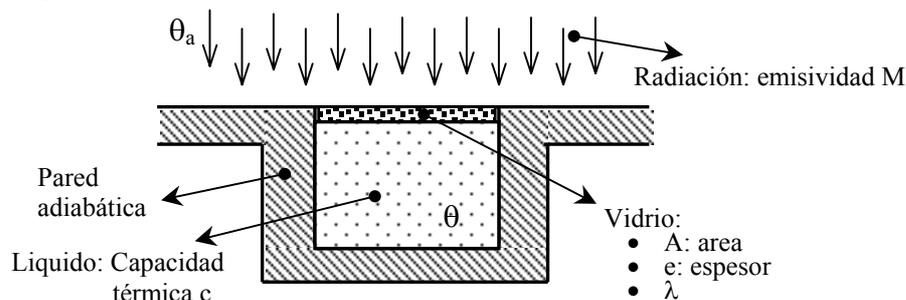


Figura 11

Tenemos:

- Una fuente de flujo de calor $\phi_r = A.M$
- Una fuente de temperatura θ_a
- Un capacitor
- Un resistor

Conviniendo $\theta > \theta_a$, el modelo resulta:

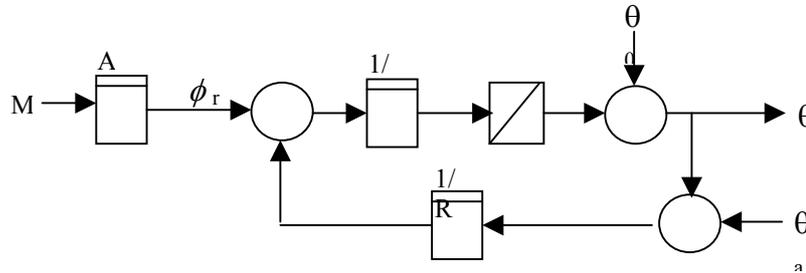


Figura 12

Este modelo responde, tanto a M como a θ_a , como un P_{T1} . Las respuestas a sendos escalones y a una condición inicial θ_0 serían:

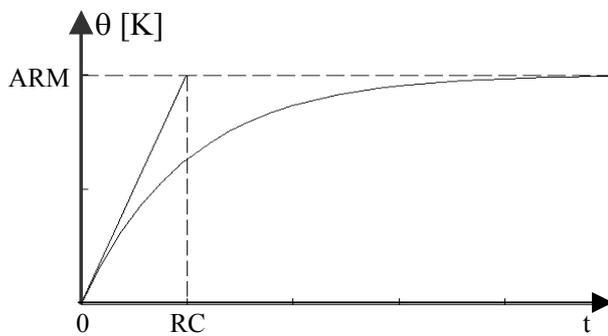


Figura 13

$$G_{rad.}(S) = \frac{A.R}{1 + R.C.S}$$

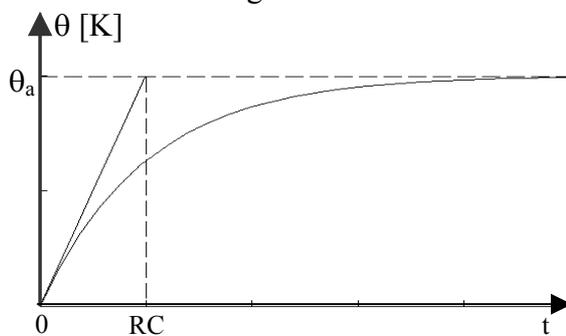


Figura 14

$$G_{amb.}(S) = \frac{1}{1 + R.C.S}$$

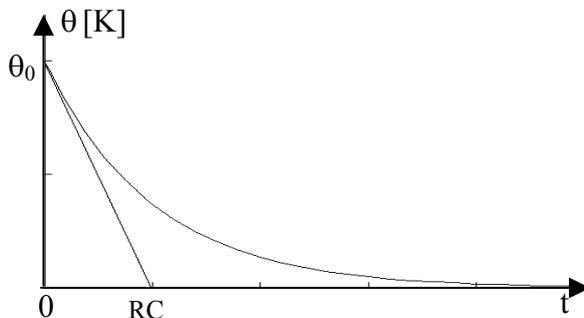


Figura 15

$$G_{cl.}(S) = \frac{R.C.S}{1 + R.C.A}$$

(pseudo-FT, ante un pseudo escalón: θ_0/S)

La evolución real sería la dada por la suma de las tres curvas:

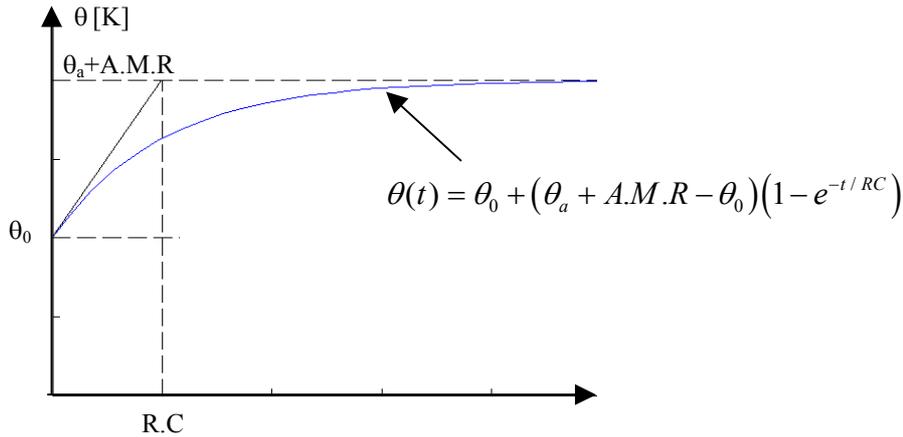


Figura 16

La exponencial resultante tiene la misma constante de tiempo común a sus tres componentes. Debe observarse que cada una de las componentes o respuestas parciales carece de sentido, ya que en ningún caso se calienta (o enfría) el medio desde (hasta) el cero kelvin. Por esta razón los sistemas térmicos se estudian en general para temperaturas incrementales referidas a una temperatura de equilibrio, muy frecuentemente la temperatura ambiente θ_a que se supone independiente de la dinámica del proceso modelado. En esta situación hay que recordar que los Kelvin o los grados Celsius siempre refieren valores relativos a la temperatura de referencia. En el ejemplo, el modelo se modifica así:

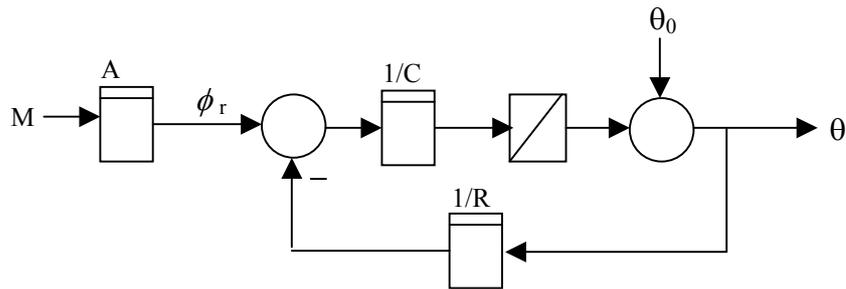


Figura 17

La respuesta a la radiación de intensidad M es idéntica a la anterior e indica cuanto se calienta el líquido por encima de la temperatura ambiente.

La respuesta a la condición inicial cambia cuantitativamente, indicando como se enfría el líquido hasta la temperatura ambiente (el cero de la escala).

La respuesta real es igual a la anterior, vista en una escala con el cero desplazado desde el cero absoluto hasta θ_a [K]

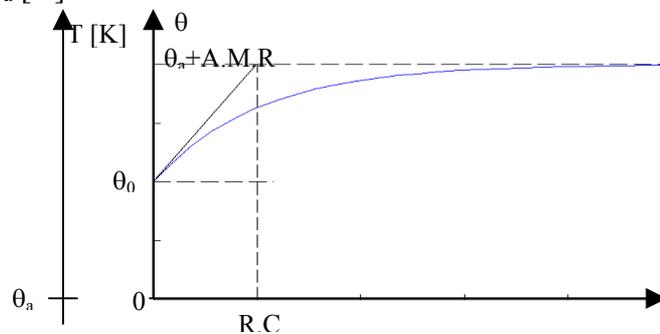


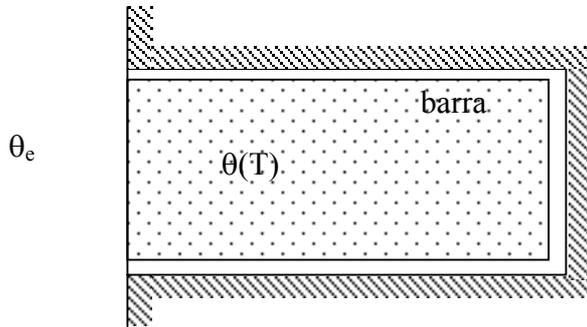
Figura 18

De ahora en más mediremos las temperaturas a partir de la referencia temperatura ambiente, salvo indicación en contrario.

2.2.2 Casos ejemplares

Caso a: Conducción de calor en una barra uniforme

Supongamos que la barra tiene una envoltura adiabática, excepto en un extremo, por donde se comunica con un medio a temperatura independiente $\theta_e(t)$



Propiedades físicas

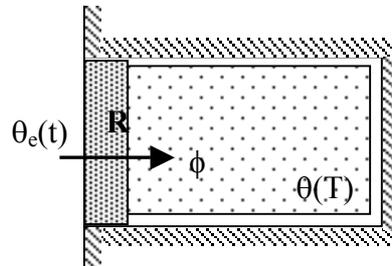
- Calor específico c
- Densidad ρ
- Conductividad térmica λ

Propiedades geométricas

- Longitud l
- Sección transversal A

Figura 19

Para el modelo más simple consideramos dos fenómenos elementales en un único dominio finito: almacenamiento y resistencia.



convención $\theta_e > \theta$

Figura 20

Determinamos las Relacs de ambos elementos idealizados a partir de las propiedades físicas y geométricas del material:

$$R = \frac{l}{\lambda \cdot A}, \quad C = m \cdot c = \rho \cdot A \cdot l \cdot c \quad \text{Ec.58}$$

El DB:

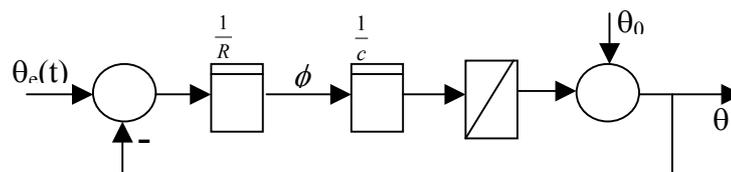


Figura 21

Supongamos que la barra se saca de un horno a θ_H y que $\theta_e = \theta_a (=0)$. Del modelo se obtiene las siguientes curvas de enfriamiento y de conducción:

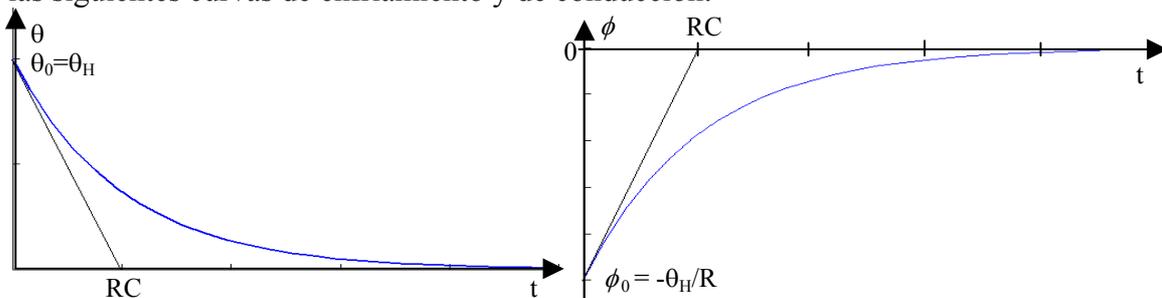


Figura 22

Ejercicio: Suponga que la barra estaba a θ_a y se pone en contacto con el medio a $\theta_e = \text{cte.}$, $\theta_e > \theta_a$. Obtenga las evoluciones de $\theta(t)$ y $\phi(t)$.

Observe que en el esquema idealizado que propusimos (Fig.20), la resistividad térmica aparece concentrada a la izquierda, como si hubiese una pared con esa propiedad. Tal pared no existe, es un recurso de modelado. Si quisiéramos obtener más precisión en nuestros resultados, por ejemplo, si la barra fuese muy larga, convendría dividirla en n dominios finitos de longitud l/n cada uno.

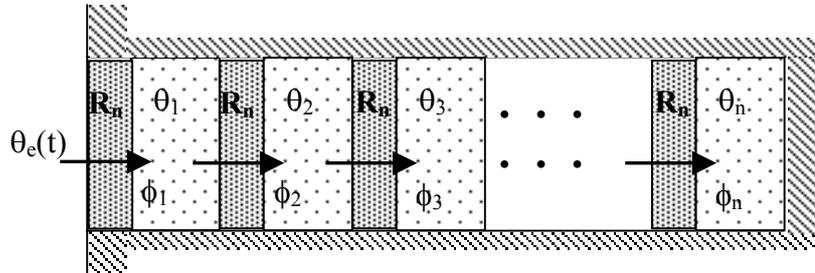


Figura 23

Tenemos ahora n capacidades iguales

$$C'_n = \frac{\rho \cdot A \cdot l}{n} c = \frac{C}{n} \quad \text{Ec.59}$$

junto a n resistores (paredes inexistentes iguales)

$$R'_n = \frac{l}{n \cdot \lambda \cdot A} = \frac{R}{n} \quad \text{Ec.60}$$

En este esquema, el DB de la etapa i -ésima resulta:

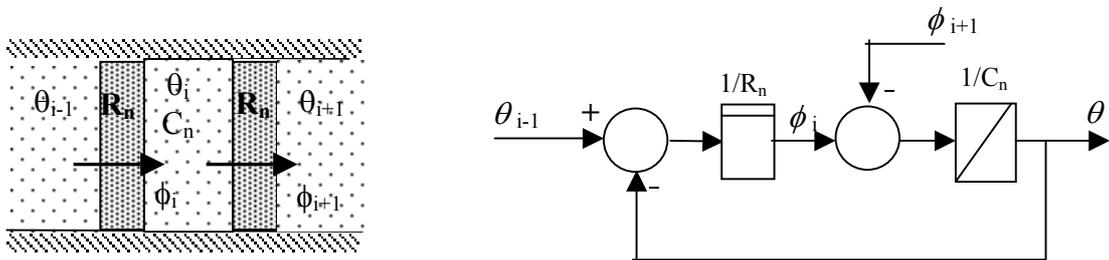


Figura 24

Para $i = 1$: $\theta_{i-1} = \theta_e$; para $i = n$: $\phi_{n+1} = 0$

Estudie el caso $n = 2$

El DB resulta:

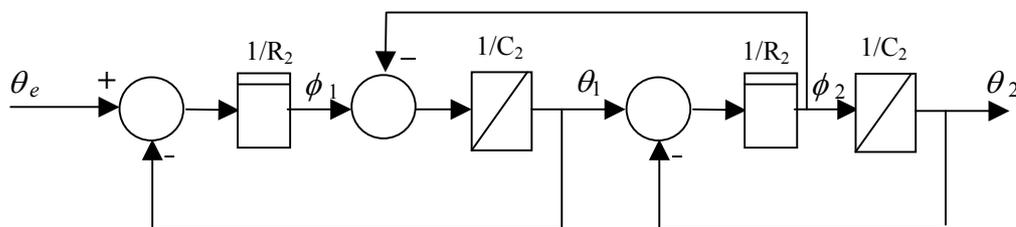


Figura 25

Aplicando inversión salen rápidamente las FT para θ_1 y θ_2

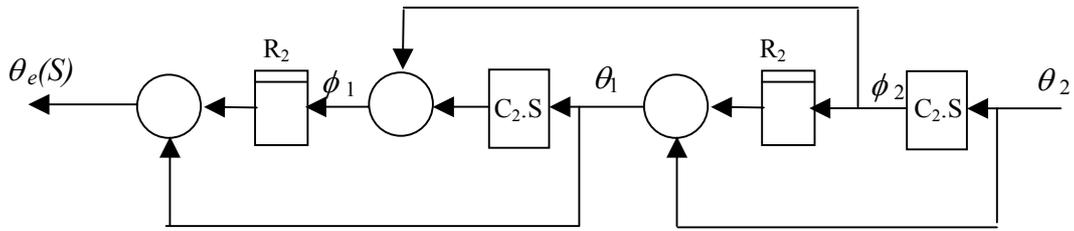


Figura 26

$$\theta_1(S) = G_1(S) \cdot \theta_e(S) = \frac{1 + R_2 \cdot C_2 \cdot S}{(R_2 \cdot C_2)^2 \cdot S^2 + 3 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot S + 1} \cdot \theta_e(S) \quad \text{Ec.61}$$

$$\theta_2(S) = G_2(S) \cdot \theta_e(S) = \frac{1}{(R_2 \cdot C_2)^2 \cdot S^2 + 3 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot S + 1} \cdot \theta_e(S) \quad \text{Ec.62}$$

El comportamiento de G_2 es del tipo P_{T2} y el de G_1 es PD_{T2} . Los denominadores son obviamente idénticos y de la forma $T^2 \cdot S^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot S + 1$, de donde se deduce que $\xi = 1,5$. Por lo tanto las evoluciones son sobreamortiguadas sin oscilaciones.

Frente a un escalón $\theta_e(t) = \theta_e \cdot \mu(t)$ por sobre θ_a , a la cual supondremos inicialmente a la barra, tenemos:

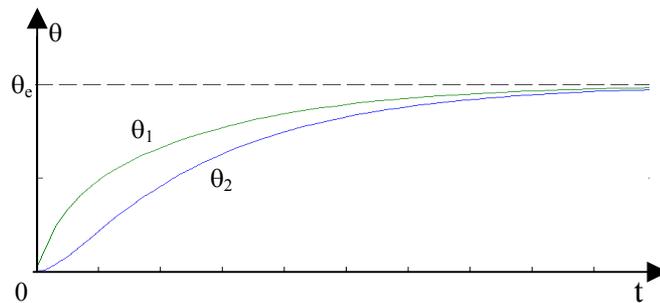


Figura 27

Como ejercicio, grafique $\phi_{1,2}$ vs. t en un mismo par de ejes ϕ, t . Analice comparativamente θ_1 vs. θ_2 y ϕ_1 vs. ϕ_2 .

El sobreamortiguamiento es una característica de los sistemas cuando se modelan estrictamente fenómenos térmicos: no hay oscilaciones armónicas entre sus modos. Ello se debe a que, a diferencia de los otros dominios físicos, hay una sola clase de almacenadores de energía, aquí asimilados a capacidades. Son fenómenos del tipo difusivos, si hablamos en relación con su sentido espacial (un flujo oscilatorio podría ser negativo, lo que significaría un cambio en el sentido de conducción de calor, cosa que no ocurre en difusión).

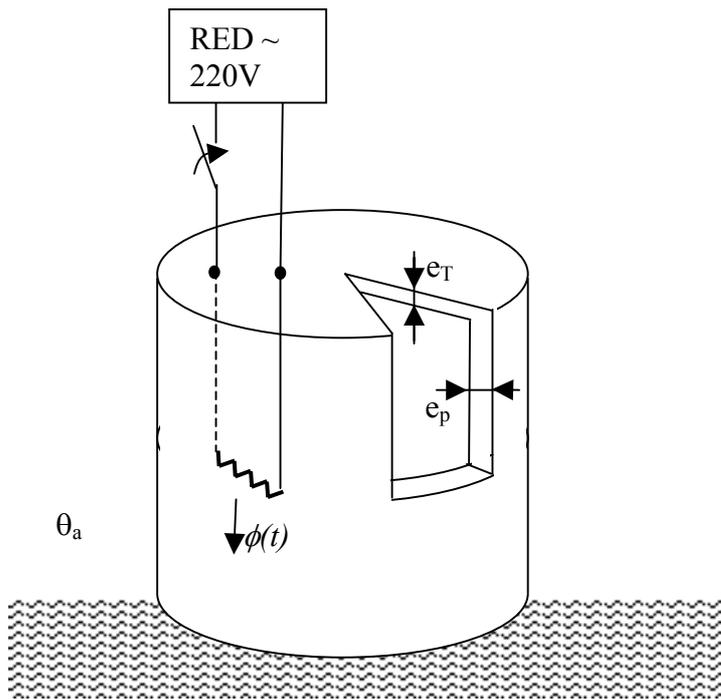
Esta propiedad debe verificarse, naturalmente, en el caso de dividir la barra en n dominios. Es cómodo estudiar los autovalores de la matriz de evolución de un modelo EE, todos los cuales deben ser reales.

Ejercicio: Haga un circuito eléctrico análogo al sistema térmico que acabamos de modelar.

Ejercicio: Reflexione lo siguiente:

Supongamos dos experimentos. En uno, la barra (con su envoltura) se saca del horno y se sumerge en una pileta con agua. En otro, se la deja en contacto con el aire. Tanto el aire como el agua se suponen a θ_a . ¿En que experimento se enfría más rápido la barra? ¿Como se contempla esta circunstancia en un modelo? ¿Esta incorporada en el diagrama anterior?

Ejercicio: Tacho cilíndrico.

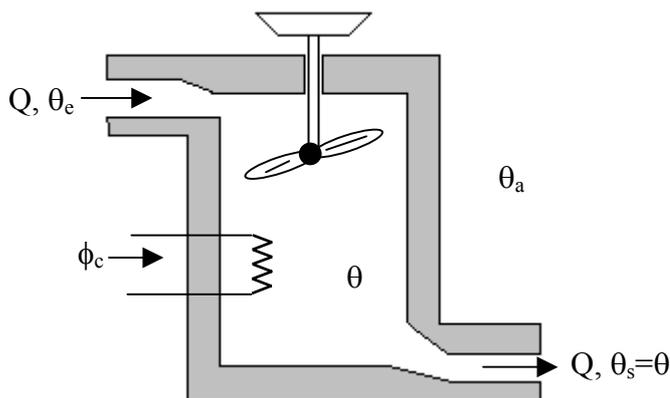


λ_T : conduct. térmica tapas
 e_T : espesor tapas
 λ_p : conduct. térmica paredes
 e_p : espesor paredes
 h : altura
 D : diámetro
 c, ρ : calor específico y densidad del fluido

- Determine $\phi(t)$ si la resistencia eléctrica del calentador es $R = 40\Omega$. (Observe que, usualmente, la dinámica de la corriente eléctrica es mucho más rápida que la del sistema térmico),
- Haga sendos análogos eléctrico y mecánico, observe la analogía estructural.
- Haga un DB,
- Grafique $\theta(t)$ del fluido y $\phi_p(t)$ pérdida de energía al exterior, si en $t = 0$ cierra la llave L con $\theta(0) = \theta_a$.

Caso b

Un líquido circulando con caudal Q pasa por una cámara de precalentamiento, a temperatura θ uniforme debido a un agitador. La temperatura de entrada es θ_e , y la de salida $\theta_s = \theta$.



Los términos en el balance de energía térmica son:

- El aporte $\phi_c(t)$ del calentador.
- La pérdida $\phi_a = (\phi - \phi_a)/R$ al medio ambiente.
- El aporte ϕ_e transportado por el material ingresante al recipiente
- La pérdida ϕ_s transportada por la materia que egresa.

Figura 23

Una cantidad de masa Δm lleva consigo la energía térmica $\Delta \epsilon$ que determina su temperatura absoluta θ

$$\Delta\varepsilon = \Delta m \cdot c \cdot \theta \quad \text{Ec.63}$$

En términos del volumen ΔV ocupado por Δm

$$\Delta\varepsilon = \rho \cdot \Delta V \cdot c \cdot \theta \quad \text{Ec.64}$$

Por lo tanto, la cantidad de energía que fluye por unidad de tiempo, o flujo de calor, puede ponerse:

$$\phi = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \frac{c \cdot \theta \cdot \Delta m}{\Delta t} = c \cdot \theta \cdot \dot{m} \\ \frac{\rho \cdot c \cdot \theta \cdot \Delta V}{\Delta t} = \rho \cdot c \cdot \theta \cdot Q \end{cases} \quad \text{Ec.65 y 66}$$

según usemos el caudal másico $\dot{m}(t)$ o el caudal volumétrico $Q(t)$.

El flujo neto de transporte es

$$\phi = \phi_e - \phi_s = \rho \cdot c \cdot \theta_e \cdot Q - \rho \cdot c \cdot \theta_s \cdot Q = \rho \cdot c \cdot Q \cdot (\theta_e - \theta_s) = \frac{C}{V} \cdot Q \cdot (\theta_e - \theta_s) \quad \text{Ec.67}$$

Con esta deducción realizamos el DB siguiente

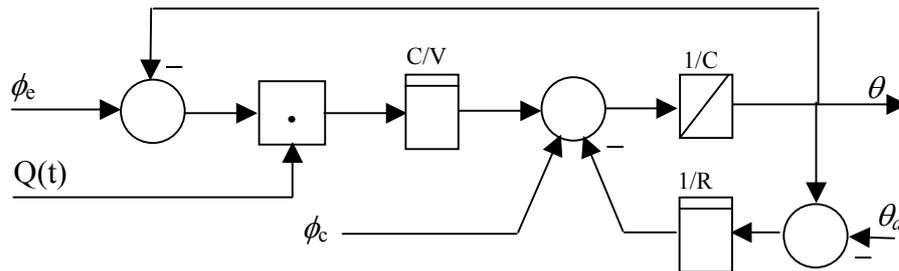


Figura 30

Debido a la alinealidad, y para evitar posibles confusiones entre temperatura de trabajo y de referencia, aquí no conviene considerar como temperatura relativa a la del ambiente, sino a la de trabajo $\bar{\theta}$. Esta se calcula con la condición $\dot{\theta} = 0$, que se tiene a la entrada del integrador en equilibrio, y arroja:

$$\bar{\theta} = \frac{R \cdot V}{V + \bar{Q} \cdot R \cdot C} \cdot \bar{\phi}_c + \frac{R \cdot C}{V + \bar{Q} \cdot R \cdot C} \cdot \bar{\theta}_e \cdot \bar{Q} + \frac{V}{V + \bar{Q} \cdot R \cdot C} \cdot \bar{\theta}_a \quad \text{Ec.68}$$

o bien:

$$\bar{\theta} = \frac{1/C}{1/R \cdot C + \bar{Q} \cdot /V} \cdot \bar{\phi}_c + \frac{1/V}{1/R \cdot C + \bar{Q} \cdot /V} \cdot \bar{Q} \cdot \bar{\theta}_e + \frac{1/R \cdot C}{1/R \cdot C + \bar{Q} \cdot /V} \cdot \bar{\theta}_a \quad \text{Ec.69}$$

para un juego de entradas constantes $\bar{\phi}_c$, $\bar{\theta}_e$, \bar{Q} y $\bar{\theta}_a$.

Como puede verse la temperatura de equilibrio sería:

- $\bar{\theta} = \bar{\theta}_a$ si no hubiese aporte del calentador ($\bar{\phi}_c = 0$) ni del fluido ($\bar{Q} = 0$).
- $\bar{\theta} = \bar{\theta}_e$ para un caudal Q (infinitamente) grande
- $\bar{\theta} = \left(\frac{V}{\bar{Q} \cdot C} \right) \cdot \bar{\phi}_c + \bar{\theta}_e$ si la pared fuese adiabática ($R = \infty$)

Alrededor del punto de operación calculado puede hacerse el siguiente modelo incremental lineal

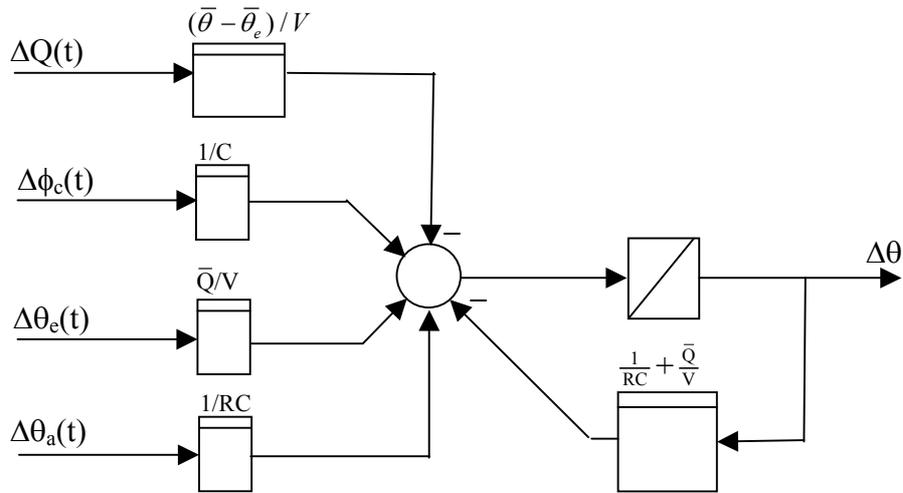
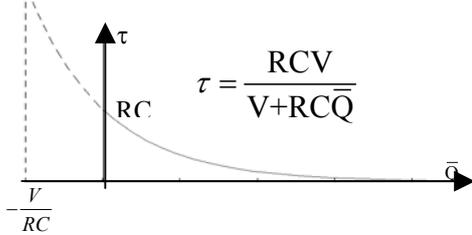


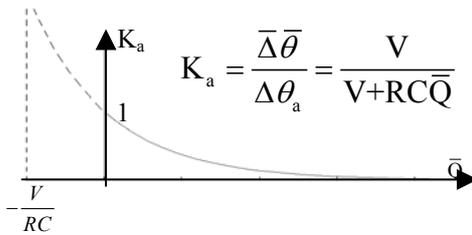
Figura 31

El lazo de temperatura tiene la constante de tiempo τ , la cual decrece rápidamente según la hipérbola:

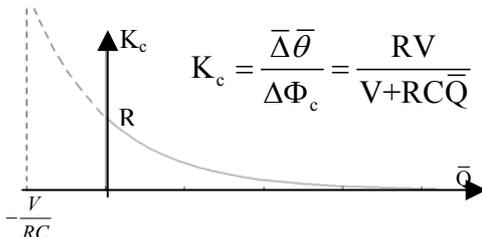


Ec.70

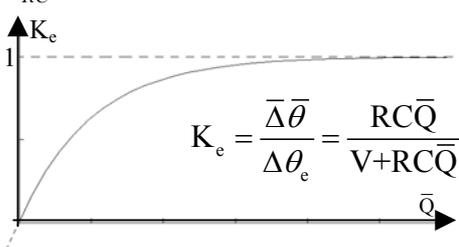
Las ganancias estáticas incrementales son:



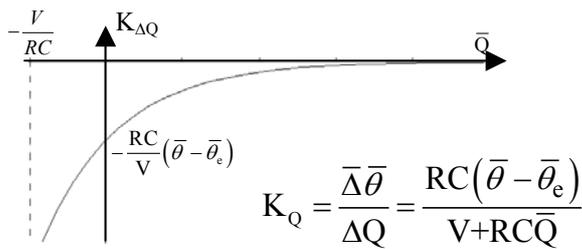
Ec.71



Ec.72



Ec.73



Ec.74

Vemos que a mayor caudal de trabajo \bar{Q} el modelo incremental es más rápido, es decir, alcanza su valor final en menos tiempo. Pero, obsérvese simultáneamente, que el valor final (correspondiente a mayor Q) es más pequeño, excepto para un incremento $\Delta\theta_e$. De la Ec73 vemos que la ganancia estática en este caso aumenta con la componente \bar{Q} del punto de operación.

Puede interesar automáticamente contra $\bar{\theta}$ la temperatura del sistema. En este caso se recurre a manipular la variable de control $\phi(t)$: sobre el valor $\bar{\phi}_c$ establecido para lograr $\bar{\theta}$ en presencia de θ_a , \bar{Q} y θ_e , se suma una señal $\Delta\phi_c(t)$ para compensar la diferencia $\Delta\theta(t) = \theta(t) - \bar{\theta}$, debido a posibles perturbaciones $\Delta\theta_a(t)$, $\Delta Q(t)$ y $\Delta\theta_e(t)$.

Para ello, se implementa un esquema de tipo realimentado:

