

Problema 1

a)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2 \sin x_1 - D x_2 + \mu \end{cases} \quad D > 0$$

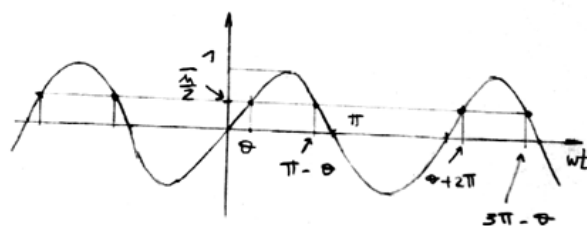
$$\begin{aligned} \underline{PE} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \\ \mu(t) \equiv \bar{\mu} &\therefore \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -2 \sin \bar{x}_1 - D \bar{x}_2 + \bar{\mu} = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \arcsen\left(\frac{\bar{\mu}}{2}\right) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

solución $\exists \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{\mu}}{2} \right| \leq 1$

$-2 \leq \bar{\mu} \leq 2$

$$PE := \left\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) / \bar{x}_1 = \arcsen\left(\frac{\bar{\mu}}{2}\right), \bar{x}_2 = 0 \right\}$$

b) como el seno es una fc periódica la solución de (1) nos da un número infinito y no numerable de puntos que se pueden



clasificar en dos grupos (según sea la derivada de la función seno en el punto)

$$\mathcal{X}_{1p} = \left\{ x_1 / x_1 = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{X}_{1i} = \left\{ x_1 / x_1 = -\theta + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2) Se enfoca primero el estudio de la estabilidad con el primer teorema de Lyapunov.

MILIN

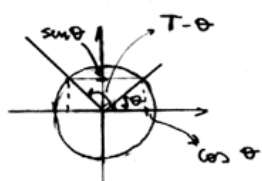
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\cos \bar{x}_1 & -D \end{bmatrix}_{|_{PE}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ Para los puntos $\bar{x}_{1p}$, $\bar{x}_r = \begin{bmatrix} \theta + 2k\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\cos\theta & -D \end{bmatrix}$ 2

→ Para los puntos $\bar{x}_{1i}$, $\bar{x}_r = \begin{bmatrix} -\theta + (k+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\cos\theta & -D \end{bmatrix}$

para las 3 entradas $(\bar{u} = \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1)$, $\cos\theta \triangleq \delta > 0$



$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$$

$$\text{Y } \cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$$

$$\therefore A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\delta & -D \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\delta & -D \end{bmatrix}$$

Autovalores

Para $\bar{x}_p$, $\det(\lambda I - A_p) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + D\lambda + 2\delta = 0$

$\Downarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 8\delta}}{2}, \text{ siendo } \Delta = D^2 - 8\delta$$

Y $\exists$ 3 posibilidades según sea Δ

- $\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \text{ y } \operatorname{Re}\{\lambda_{1,2}\} = -\frac{D}{2} \Rightarrow \text{Estable} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2} \Rightarrow \text{Estable} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-D - \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-D + \sqrt{\Delta}}{2} < 0, \text{ porque } \sqrt{\Delta} < D \end{cases} \\ \text{Y como ambos autovalores } < 0 \text{ es Estable} \end{cases}$

Para $\bar{x}_i$, $\det(\lambda I - A_i) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + D\lambda - 2\delta = 0$

$\Downarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 + 8\delta}}{2}, \text{ siendo } \Delta = D^2 + 8\delta$$

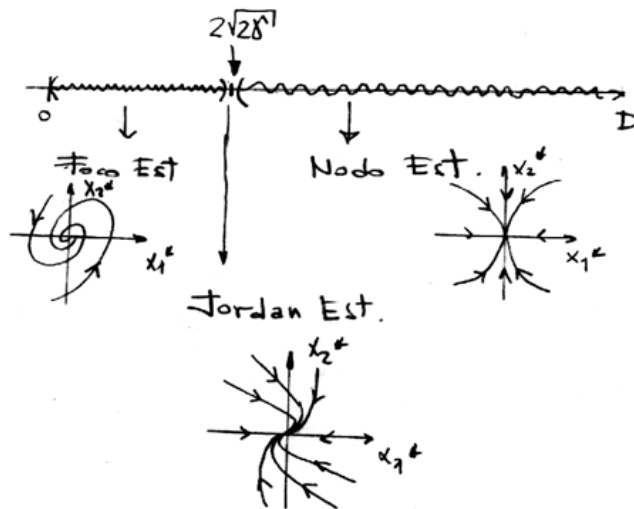
Y como $\delta > 0$, $\Delta > D \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-D - \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-D + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Inestable}$

3) a) Para el análisis local de las trayectorias del SNL se verifican las hipótesis del Teorema de Hartman y Grobman, es decir para todos los autovalores calculados en el punto anterior se satisface $\text{Re}\{\lambda_i\} \neq 0$.

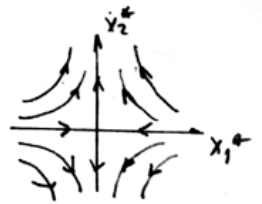
b) i) Para los pto. $\bar{x}_{1p}$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Leftrightarrow D < 2\sqrt{28} \text{ y } \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \text{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0 \Rightarrow \text{Foco Estable} \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow D = 2\sqrt{28} \text{ y } \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2}, \text{ Autovalores iguales } \textcircled{2} \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow D > 2\sqrt{28} \text{ y } \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow \text{Nodo Estable} \end{cases}$$

② Autovalores iguales, A no diagonal $\Rightarrow$ Jordan Estable



Para los pto. x_{1r} , $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ Ensilladura $\neq D$



c) i)

$\omega_{\text{opto}} = \sqrt{3}$
 $\text{ y } D = \sqrt{2}$

$$\bar{x}_p = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \omega\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow D < 2\sqrt{28} \Rightarrow \text{Foco estable}$$

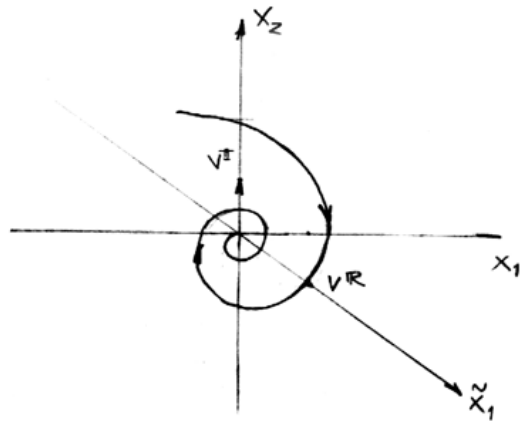
$$\text{ y } A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Autovectores

4

$$(\lambda_1 I - A_T) V_1 = \vec{0}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} V_1 = \vec{0}$$

$$V^R = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad V^I = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

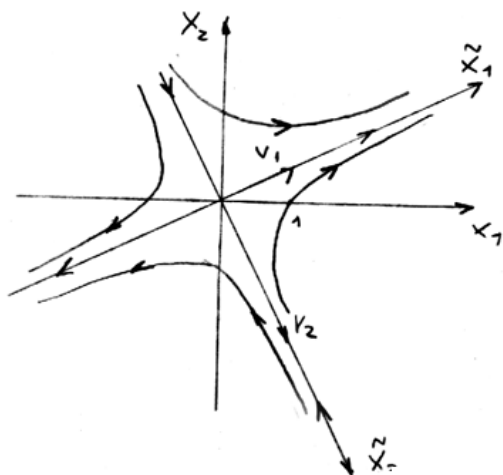


$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

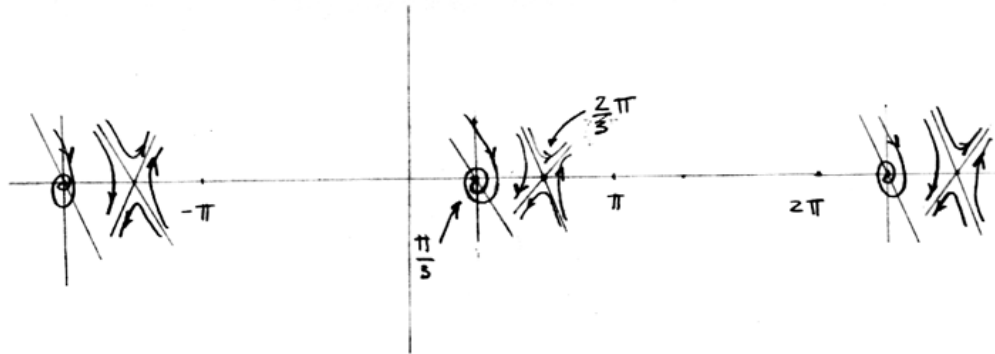
Autovectores

$$\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

c) ii)



Problema 2

$$1) \quad \begin{aligned} x_1 &\hat{=} \gamma \\ x_2 &\hat{=} \dot{\gamma} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - d x_2 + \gamma_M \end{cases}$$

$$2) \quad \underline{PE} \quad \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 - d \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 (1 - \bar{x}_1^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_1 = \pm 1 \end{cases}$$

$$PE_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad PE_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad PE_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Estabilidad PE_1

$$MIL_{lin} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2\bar{x}_1 & -d \end{bmatrix} \Big|_{PE_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + d\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4}}{2} > 0 \\ \frac{-d - \sqrt{d^2 + 4}}{2} < 0 \end{cases}$$

tengo un autovalor positivo $\Rightarrow$ Inestable!
1º teorema
Lyapunov

4) Adopto $V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$, def. positiva ($k_{1,2} > 0$) o indeterminados ⁶

$$\dot{V} = k_1 x_1 \dot{x}_1 + k_2 x_2 \dot{x}_2$$

$\Rightarrow \dot{V} = k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2 (x_1 - x_1^3 - \delta x_2 + \delta m)$ debe ser definida o semidef. negativa

$$\dot{V} = x_2 \left(\underbrace{k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_1^3 + k_2 \delta m}_{\text{negativa } \forall x_2} \right) - \underbrace{k_2 \delta x_2^2}_{\text{negativa } \forall x_2}$$

elijo una $m(x_1, x_2)$ que fuerce la anulación de este término

ley de control $\rightarrow m = \frac{1}{\delta k_2} (k_2 x_1^3 - (k_1 + k_2) x_1) = \frac{x_1^3}{\delta} - \frac{(k_1 + k_2)}{\delta k_2} x_1$ ①

con esta m , $\dot{V} = -k_2 \delta x_2^2$ ② es semidef. negativa, en consecuencia se puede decir que en lazo cerrado el origen es (por lo menos) Lyapunov estable.

5) a) EE en LC

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \delta x_2 + \delta \left(\frac{1}{\delta k_2} (k_2 x_1^3 - (k_1 + k_2) x_1) \right) = -\frac{k_1}{k_2} x_1 - \delta x_2 \end{cases}$$

El Σ en LC es lineal, estacionario, libre.

El SNL original (= lazo abierto) es a lineal, estacionario, si $m \neq 0$ forzado.

b)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -\frac{k_1}{k_2} \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

El SNL original (LA) tiene 3 pto. de equil., con la ley de control ① el Σ en LC tiene 1 solo pto. de equil. (el origen).

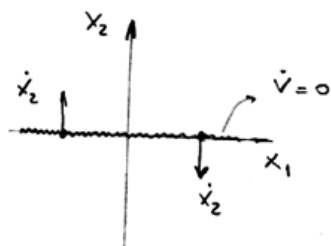
c) El Σ en lazo cerrado es lineal,

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{k_2} & -d \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4k_1/k_2}}{2} \Rightarrow \text{Re}\{\lambda_{1,2}\} < 0$$

↓
Estable 1º Teor. Lyap.

Otra opción: con la expresión ③ el origen es Lyapunov estable, puedo aplicar La Salle

$$\therefore \dot{V} = -k_2 x_2^2, \quad \dot{V} = 0 \text{ si } x_2 = 0, \forall x_1$$



$$\text{Si } x_2 = 0 \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_1 \end{cases} \begin{cases} \forall x_1 > 0 \Rightarrow \dot{x}_2 < 0 \\ \forall x_1 < 0 \Rightarrow \dot{x}_2 > 0 \end{cases}$$



Por La Salle, el origen es asintóticamente estable!

El dominio de atracción es todo el espacio de estado.

Problema 3

1) Teorema de existencia y unicidad

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

H) a) si f es continua en el rectángulo R :

$$|t - t_0| \leq a, \quad |x - x_0| \leq b$$

entonces existe un límite superior en R para f , $|f| \leq M$ en un pto $\in R$

b) si f satisface la condición de Lipschitz en R :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq N |x_1 - x_2|, \text{ siendo } N \text{ cte Lipschitz}$$

T) $\Rightarrow \exists$ una solución del problema del valor inicial en el intervalo

$$|t - t_0| \leq \alpha \text{ donde}$$

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N} \right)$$

y esta solución es única.

$$2) \begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

a) en un rectángulo R : $|t| \leq a$ $|x| \leq b$ f es continua

$$\text{opción 1) } |x_1^2 + 1 - (x_2^2 + 1)| \leq N \cdot |x_1 - x_2|$$

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq N |x_1 - x_2|$$

$$\text{para } \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 - x_2 \neq 0} \quad |x_1 + x_2| \leq N$$

$$|x_1 + x_2| \leq N$$

y los valores máximos de x_1 y x_2 son b

$$\Rightarrow |x_1 + x_2| \underset{\uparrow}{=} \overset{\text{MAX}}{2b} \leq N \Rightarrow \text{adapto } \underline{\underline{N = 2b}}$$

opción 2) como $\exists \frac{df}{dx} = 2x$ y $\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{df}{dx} = 2b$, adopto $N = 2b$.

opción 3) plantear $x_1 = b - d$
 $x_2 = b - d$

$$|(b-d)^2 - (b-d)^2| \leq N |b-d - b+d|$$

$$|b^2 - 2bd + d^2 - b^2 + 2bd - d^2| \leq N |d - d|$$

$$|2b(d-d) - \underbrace{(d^2 - d^2)}_{(d-d)(d+d)}| \leq N |d-d|$$

$$|2b - (d+d)| \leq N$$

y el máximo de esta expresión es para $d, d \rightarrow 0 \Rightarrow N = 2b$
 [con cualquiera de estas opciones llego a la misma expresión $N = 2b$]
 $\Rightarrow \exists$ una solución del problema en el intervalo $|t| \leq \alpha$

para determinar α encuentro $M = \max(f)_{\mathbb{R}} = b^2 + 1$

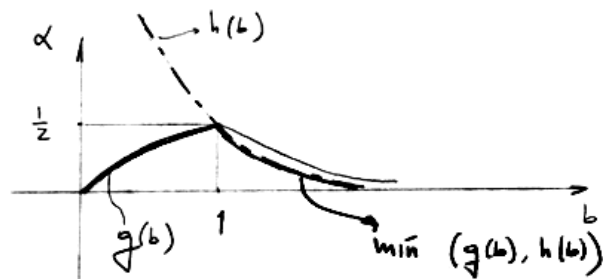
$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right) = \min\left(\infty, \frac{b}{b^2+1}, \frac{1}{2b}\right) = \min\left(\underbrace{\frac{b}{b^2+1}}_{g(b)}, \underbrace{\frac{1}{2b}}_{h(b)}\right)$$

la función $g(b)$ tiene un máximo

$$g'(b) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{-b^2+1}{(b^2+1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b^2 = \pm 1 \quad (b = -1, \text{ sol. ajena al problema})$$

$\Downarrow$
 b tiene un máximo en 1 y vale $\frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

la función $h(b)$ es siempre decreciente



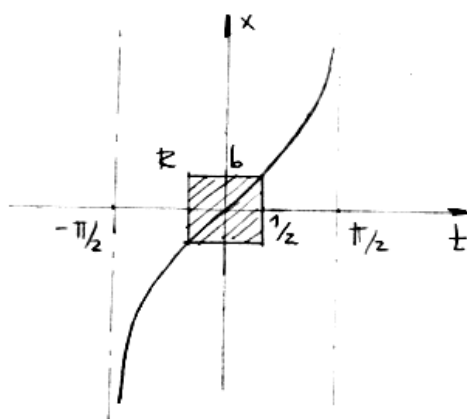
el máximo de $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow |t| < \frac{1}{2}$

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = dt$$

$$\arctg(x) = t \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{tg}(t)}$$

$$x_0 = \operatorname{tg}(0) = 0 \quad \checkmark$$



El intervalo en el cual existe la solución de la ec. dif. es mayor que el predicho por el teorema.

Problema 4

Teorema de unicidad

ver libro Elgolts 47, Lin. Segel 60

Problema 5

a) Σ 3^{er} orden $\Rightarrow$ 3 autovalores

$e^{\lambda_i t}$, es el modo natural del sistema, un sist. de 3^{er} orden puede tener 3 modos distintos

④ Los modos son absolutamente independientes entre sí y se manifiestan en forma pura en la dirección de cada autovector.

Para excitar un único modo, el i-ésimo, se deberá partir de una condición inicial proporcional al i-ésimo autovector v_i .

Cada variable de estado "original" es la combinación lineal de todos los automovimientos del Σ cuyos modos han sido excitados.

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n c_{ji} e^{\lambda_i t}$$

de las tres trayectorias se puede deducir los tres modos del Σ

e^{-t} , e^{-3t} y e^{-5t} , que están asociados a los autovalores

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -5$ respectivamente.

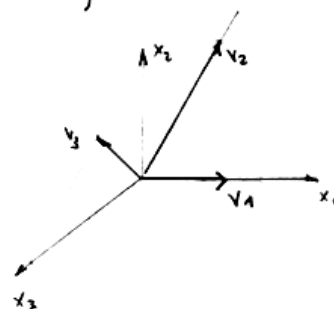
b) como se menciona en ④, se puede ver que en la primera trayectoria solo se excita el 1^o modo (e^{-t}), y por ello esta trayectoria está en la dirección de un autovector. Vale lo mismo para las otras trayectorias.

Un posible conjunto de autovectores resulta:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) para $t=0$ las 3 Cond. iniciales son

$$x_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{20} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{30} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



4) Cálculo de la matriz de transición $\Phi(t)$

Cualquier solución satisface

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x_0, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \varphi_{13}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \varphi_{23}(t) \\ \varphi_{31}(t) & \varphi_{32}(t) & \varphi_{33}(t) \end{bmatrix}$$

Esto vale para las 3 soluciones dadas y las 3 c.i. calculadas.

Agrupándolas:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & | & e^{-3t} & | & e^{-5t} \\ 0 & | & 2e^{-3t} & | & 2e^{-5t} \\ 0 & | & 0 & | & 2e^{-5t} \end{bmatrix}} = \Phi(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{x_0}$$

(Esto se llama una matriz fundamental $M(t)$ del sistema dinámico asociado $\dot{x} = A \cdot x$)

Como las 3 c.i. son l.i. $\Rightarrow \exists$ la matriz inversa de x_0

$$\Phi(t) = M(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = M(t) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{e^{-3t} - e^{-t}}{2} & \frac{e^{-5t} - e^{-3t}}{2} \\ 0 & e^{-3t} & e^{-5t} - e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$5) \quad \dot{\Phi}(t) = A \Phi(t) \quad (\text{propiedad})$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\Phi}(0) = A \Phi(0) = A I_{3 \times 3} = A$$

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & -3e^{-3t} + e^{-t} & -5e^{-5t} + 3e^{-3t} \\ 0 & -3e^{-3t} & -5e^{-5t} + 3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -5e^{-5t} \end{bmatrix} \Rightarrow \uparrow_{t=0}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Autovalores!

Otra opción, para calcular A y Φ

Dados los autovectores l.i. calculados en el pto. 5.2) podemos escribir la siguiente transformación de semejanza:^①

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(definiendo $x = T \tilde{x}$)

① Si consideramos al espacio de estados como un espacio geométrico la transf. de semej T puede ser interpretada como una transf. de coordenadas. Es decir $T \equiv V$, siendo V la matriz de autovectores.

Para los modelos homogéneos ($\dot{x} = Ax$ y $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$) equivalentes existe la siguiente relación:

$$\begin{array}{ccc} \dot{\tilde{x}} & \xleftarrow{T} & \dot{x} \\ & \xrightarrow{T^{-1}} & \\ A \downarrow & & \downarrow \tilde{A} \\ x & \xleftarrow{T} & \tilde{x} \\ & \xrightarrow{T^{-1}} & \end{array}$$

entonces $A = T \tilde{A} T^{-1}$ ②

y $\Phi = T \tilde{\Phi} T^{-1}$ ③

siendo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ y $\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$

Obtenga T^{-1} , resuelva las expresiones ② y ③ verificando los resultados obtenidos en la página 12.