SISTEMAS FLUIDODINAMICOS.

A04C03.95
D · S · F

RESUMEN:

En este apunte se hace una breve descripción de las propiedades y leyes fundamentales de los flúidos. Además se modelizan los elementos básicos de los sistemas hidráulicos como resistencias y capacidades hidráulicas.

SISTEMAS FLUIDODINAMICOS

A04C03.95
D · S · F

DINAMICA DE LOS SISTEMAS FISICOS A-344/

1.- INTRODUCCION

1.1.- Propiedades Especiales de los Flúidos

a) **Movilidad de las partículas.** Los líquidos y los gases en estado de reposo no experimentan tensiones transversales, de modo que sólo desarrollan presiones normales a la superficie de los cuerpos que los contienen. Los líquidos y los gases se adaptan a la forma de los cuerpos que los contienen sin ofrecer resistencia.

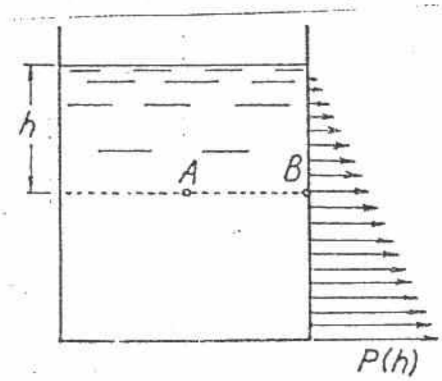
b) **Compresibilidad.** Los gases pueden variar de volumen de un modo cualquiera. Los líquidos son casi completamente incompresibles (aunque a veces para altas presiones debe tenerse en cuenta la compresión). Para los gases el efecto de compresibilidad es menor cuando son altas las presiones de trabajo y las velocidades no superan la mitad de la del sonido. En general puede tratarse casi siempre a todos los fluídos como si fuesen líquidos.

c) **Variación del volumen con la temperatura.** El peso específico de los líquidos varía con la temperatura.

d) **Viscosidad.** Sea una corriente de fluído de distinta velocidad en distintos lugares. Este estado del fluído no es de equilibrio y se producirán procesos que tiendan a igualar la velocidad de la corriente. Estos procesos se denominan viscocidad o fricción interna e involucran una pérdida de energía disipada en forma de calor.

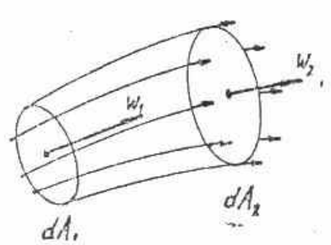
1.2.- Leyes fundamentales de los fluídos

a) **Ley de Pascal.** (Estática) La presión en un punto de un líquido en reposo es independiente de la inclinación de la superficie sobre la cual actúa.



Aplicacioń: La presión en un depósito de líquido en un punto A es $P= h\gamma$ (kg/cm^2) donde γ es el peso específico del líquido y h la profundidad respecto del nivel superficial. La misma presión actúa sobre la pared en B. Por consiguiente la presión en un punto del seno del líquido aumenta en razón directa a la distancia al nivel del líquido (fig.1).

b) **Ecuación de la continuidad.** (Dinámica) La masa de flúido pasante por unidad de tiempo a través de una determinada sección debe ser igual, simultaneamente a la masa por unidad de tiempo pasante por cualquier otra sección de un determinado conducto.



Este principio elemental se expresa mediante la ecuación

$$w_1\, dA_1 = w_2\, dA_2$$

para cualquiera sean las secciones A_1, A_2 de conducto consideradas (fig.2).

Esta ecuación es válida siempre que se considere que la densidad del fluído es constante.

c) **Ecuaciones de movimiento.** (Dinámicas) Si w_s es la velocidad en una dirección cualquiera s, se tendrá en general que

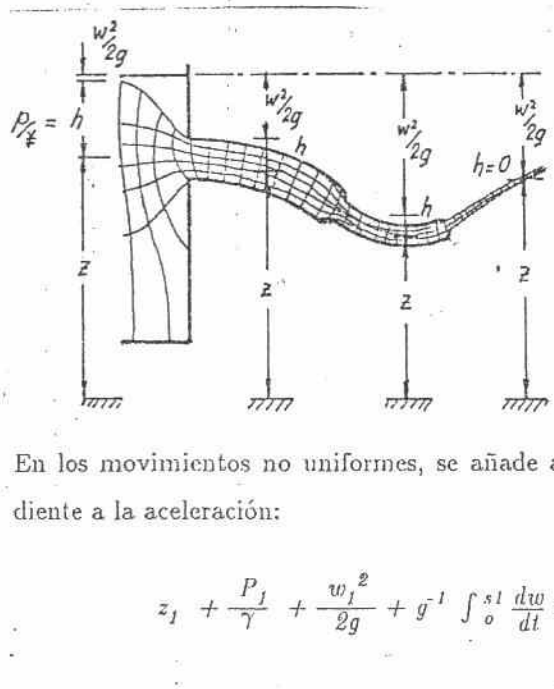
$$\frac{dw_s}{dt} = -\frac{g}{\gamma}\,\frac{d(\,P + z\,\gamma\,)}{ds}$$

donde z es la posición en altura por encima de un cierto nivel elegido como referencia.

Para movimiento uniforme (cuando la velocidad en un punto no varía con el tiempo) se tiene:

$$H = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{{w_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{{w_2}^2}{2\,g}$$

donde H es una constante denominada altura piezométrica. Esta es la ecuación de Bernoulli y es aplicable a los líquidos sin rozamiento e indica que la energía total expresada en metros de columna de líquido, cuando ρ viene dado en kg/m^2 y γ en kg/m^3, es constante en todos los puntos (fig.3).



$\frac{w^2}{2g}$ representa la energía dinámica, z la de posición estática y $\frac{p}{\gamma}$ la energía debida a la presión. En una tubería sin diferencia alguna de nivel , la ecuación anterior se simplifica y es

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{{w_1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{{w_2}^2}{2g} = H$$

En los movimientos no uniformes, se añade además a la ecuación de Bernoulli un término correspondiente a la aceleración:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{{w_1}^2}{2g} + g^{-1}\int_0^{s1} \frac{dw}{dt}\,ds = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{{w_2}^2}{2g} + g^{-1}\int_0^{s2} \frac{dw}{dt}\,ds$$

Para grandes velocidades, desde unos 150 m/s, hay que tener en cuenta la compresibilidad de los gases, la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = constante$$

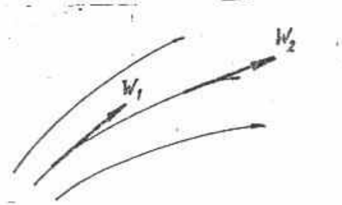
teniendo en cuenta que en las variaciones de presión deben involucrarse las leyes de la termodinámica. En el caso de fluídos con rozamiento interno, deben tenerse en cuenta fenómenos originados por la viscosidad. Cuando un fluído real circula a grandes velocidades se producen efectos de turbulencia en las corrientes que no son facilmente descriptos en modelos matemáticos. El límite entre lo que se denomina un régimen de circulación laminar y uno turbulento se determina por medio de un coeficiente Re que depende de la velocidad del flúido, de la viscosidad del mismo y de las dimensiones del conducto. Re es el coeficiente de Reynold y representa la relación entre las fuerzas de inercia y viscosidad.

$$Re = w\,\frac{d}{v}$$

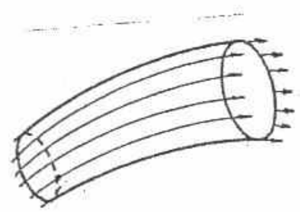
Donde v es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluído (m^2/s) y d es la longitud de medida tipo (m)

1.3. Algunos conceptos importantes de fluidodinámica

a) Líneas de flujo. Son una serie de curvas de forma tal que el vector velocidad de cada punto perteneciente a esa curva es tangente a la misma



Línea de flujo


Tubo de flujo

b) Tubo de flujo. Es una superficie delimitada por líneas de flujo y que representa una porción elemental de flujo.

c) Turbulencia. Se dice que una corriente es turbulenta cuando el movimiento principal es perturbado por otros movimientos desordenados que se mezclan con aquél. Las líneas de flujo no se presentan como curvas suaves.

d) Corriente laminar. La corriente se llama laminar cuando no existen fluctuaciones ni en la magnitud ni en la dirección de la corriente.

El curso de la corriente se ha comprobado que está influenciado por el coeficiente Re de Reynold. Para Re menor que 2320, la corriente en los tubos rectos es laminar; para Re mayor que 2320, casi siempre es turbulenta.

e) **Viscosidad.** El coeficiente u identifica la viscosidad absoluta (dinámica) y tiene dimensión $Nseg/m^2$. u es igual a la tensión transversal que se presenta cuando la velocidad del flúido disminuye en 1 m/s a la distancia de la pared que limita la circulación de $1m$. La viscosidad absoluta sirve escencialmente para el cálculo de las fuerzas que se producen como consecuencia del rozamiento de los flúidos. Suele preferirse el uso de la viscosidad cinemática $v = u\ g/\gamma\ (m^2/seg)$, siendo como ya se mencionó, γ el peso específico del flúido. La viscosidad dinámica u disminuye con la temperatura en los líquidos y aumenta en los gases.

2. HIPOTESIS BASICAS PARA EL MODELADO

Los fenómenos de mecánica de flúidos se cuentan entre los más difíciles de modelar y analizar en sus aspectos dinámicos. Para flúidos compresibles en general es insoslayable tener en cuenta la variación temporal y espacial de las magnitudes físicas que los describen. Esto los categoriza como sistemas de parámetros distribuidos, y conduce a su tratamiento con modelos dinámicos en derivadas parciales (las leyes fundamentales que gobiernan estos fenómenos están resumidas en las ecuaciones de Navier-Stokes). Por otra parte los cambios en las variables descriptivas de los flúidos originan cambios en su temperatura, de la cual a su vez dependen los parámetros físicos de aquellos. Este fuerte acoplamiento fluidomecánico - térmico viene a aumentar la complejidad de las descripciones más detalladas.

No obstante hay en la técnica un subconjunto muy importante de sistemas fluidodinámicos que se pueden describir con un muy buen grado de aproximación con modelos de parámetros concentrados. Esto significa que en determinadas regiones espaciales las magnitudes físicas pueden considerarse uniformes (constantes en el espacio), teniendo sólo variación temporal. Esto conduce a su descripción dinámica con ecuaciones diferenciales ordinarias. Este subconjunto de sistemas es designado usualmente como "sistemas hidráulicos". El flúido es en general agua o aceite. Siendo muy baja su compresibilidad, muy altas la presiones de trabajo, y bajas las velocidades aún para caudales importantes, se pueden hacer una serie de hipótesis simplificatorias que permitan tratarlos como circuitos hidráulicos. En Ingeniería es usual plantear las ecuaciones de balance de materia a través de caudal volumétrico en vez de caudal másico. En general en estas notas depreciaremos la interacción con efectos térmicos.

En algunos casos trataremos fenómenos con flúidos altamente compresibles con las técnicas desarrolladas para sistemas hidráulicos. Este enfoque tendrá validez a condición de considerar pequeñas variaciones dinámicas de las variables en torno a sus puntos estáticos de operación.

3.- ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

3.1. Resistor fluidodinámico

El resistor fluidodinámico es un elemento que modela la caída de presión en un conducto debido a la pérdida de energía (fricción interna en el flúido y de éste con las paredes del conducto).

Relaciona la presión y el caudal a través de su RelaC.

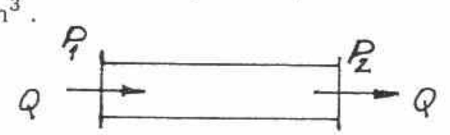
La RelaC es en general una función del siguiente tipo:

$$Fr(\Delta P,Q)=0$$

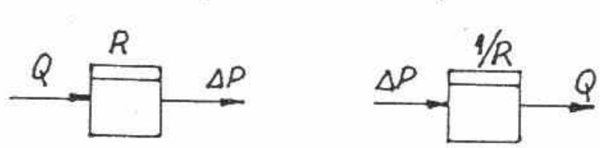
En general los resistores fluidodinámicos serán elementos no lineales, aunque para ciertas hipótesis de trabajo puedan aproximarse por medio de un modelo lineal.

En el caso lineal resultará : $RQ-\Delta P=0$

donde R es un coeficiente que solo puede definirse constante en el caso lineal y cuyas unidades son $[R] = Pa\ s/m^3$.



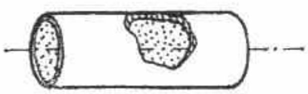
$$\Delta P := P_1 - P_2$$



Casos particulares

a.- Acople rugoso: la pérdida de presión se debe a fuerzas de fricción viscosas originadas en el rozamiento del flúido contra las paredes rugosas del acople o tubo. Puede aproximarse linealmente y el valor de R es un dato obtenido experimentalmente.

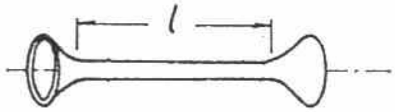
$$\Delta P = RQ$$



b.- Tubo capilar: el fenómeno de capilaridad se produce cuando existen conexiones de longitud considerable que limitan el paso de flúido con una fuerte estricción. Se produce una caida de presión proporcional a la viscosidad del flúido y a la longitud del tramo de estricción, e inversamente proporcional al diámetro de la estricción.

$$\Delta P = RQ \qquad \text{donde } R = \frac{128\ u\ l}{3{,}14\ d^4}$$

u: viscosidad $Nseg/\ m^2$
l: longitud de la estricción en metros
d: diámetro de la estricción en metros



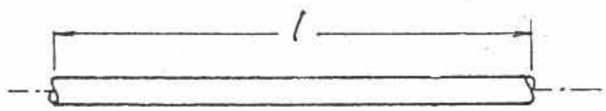
c.- Tramo de línea largo: en este caso es útil calcular el número de Reynols Re dado por:

$$Re = \frac{4\,\rho\, Q}{3.14\ d\ u} \quad \text{donde } \rho \text{ es la densidad del flúido}$$

Si Re es bajo (alrededor de 2000) entonces estaremos en régimen laminar y las fuerzas predominantes son las debidas a rozamiento viscoso y puede utilizarse la ecuación presentada b.- . A mayores valores de Re el flujo deviene turbulento y la relación entre caida de presión y caudal es considerablemente no-lineal. El punto de transición de régimen laminar a turbulento depende de las dimensiones del tubo , l y d , la rugosidad de la superficie de las paredes y de las propiedades del flúido.
Para un Re de 5000 puede aproximarse una expresión general:

$$\Delta P = a_t\ Q\,|\,Q|^{3/4}$$

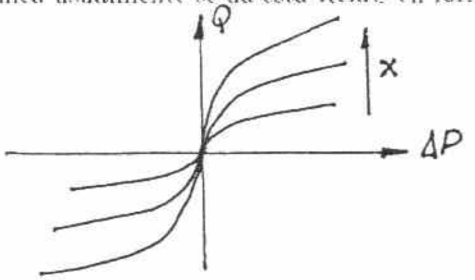
donde el valor absoluto es necesario para que el signo de ΔP sea negativo cuando Q lo sea, y a_t es una constante a menudo determinada experimentalmente. De todas maneras cabe destacar que ésta es una aproximación gruesa ya que en régimen turbulento existe una multiplicidad de fenómenos en el seno del flúido que no pueden representarse en forma sencilla en el lenguaje matemático.



d.- Orificio y válvula: las figuras respectivas muestran tres importantes casos en los cuales la caida de presión ocurre en tramos cortos de línea. El orificio (d.1) es una estricción de área fija A_o. A través del uso de relaciones entre el régimen del flúido, propiedades del mismo y configuración geométrica del problema (forma del orificio por ej.) se llega a una relación de proporcionalidad entre la caída de presión a lo largo del orificio y el caudal que por éste fluye. Una forma de esta relación es:

$$\Delta P = \frac{\gamma\, Q\,|Q|}{2\,g\,C_d^2\,A_o^2} \qquad\qquad Q = \left(\frac{2\,g}{\gamma}\,C_d^2\,A_o^2\;\;|\Delta P|\right)^{1/2} sgn(\Delta P)$$

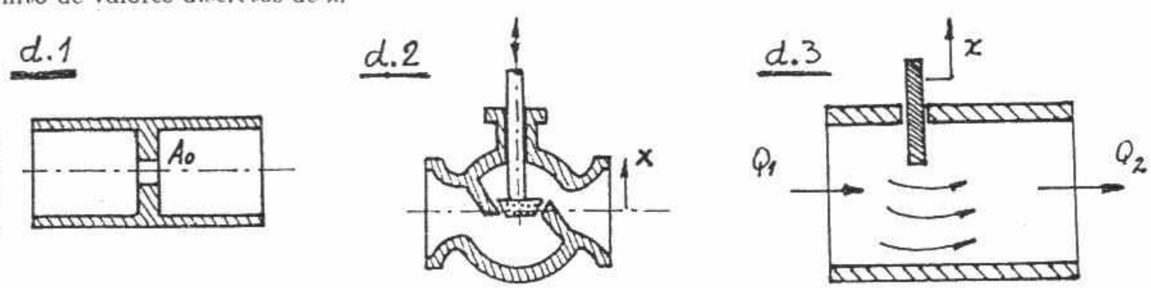
donde γ es el peso específico del flúido.
En la técnica usualmente se da esta RelaC en forma gráfica:



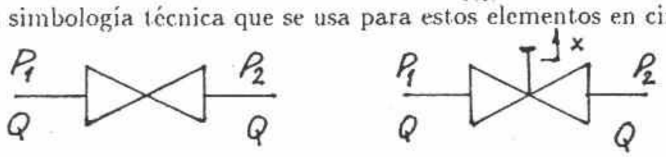
El valor absoluto aparece nuevamente para asegurar diferencia de presión negativa para caudal negativo. C_d es el coeficiente de descarga, g la aceleración de la gravedad, y A_o es el área del orificio. Para orificios redondos de bordes afilados , $C_d = 0.62$.
Las válvulas (d.2) y (d.3) son estricciones de área variable $A(x)$, donde x representa una posición de grado de apertura de la válvula $(A(0)=0)$.
Para las válvulas $A(x)$ juega el rol A_o, y C_d también varía según la posición de la válvula, de esta manera una ley más general sería:

$$\Delta P = \frac{\gamma\, Q\,|Q|}{2\,g\,C_d^2(x)\,A^2(x)}$$

Aquí hay en juego tres variables contínuas $(\Delta P,\ Q,\ x)$. En la técnica suele representarse la relación $(\Delta P,\ Q)$ parametrizada por x, i.e., se da una familia de curvas $(\Delta P,\ Q)$ correspondiente a un número finito de valores discretos de x.



La simbología técnica que se usa para estos elementos en circuitos hidráulicos es la siguiente:



3.2. Capacitor fluidodinámico

El capacitor fluidodinámico representa el fenómeno de almacenamiento de energía potencial en un flúido. Puede modelar almacenamiento de energía potencial del campo gravitatorio, (en un tanque por ej.), o de energía potencial elástica. En el último caso puede darse por acumulación de materia en un volumen fijo dado (flúido compresible — la presión aumenta al aumentar la densidad del flúido), o por acumulación de materia (flúido incompresible) en un recipiente de paredes elásticas, o por una combinación de ambos efectos a la vez. Como en estas notas elementales trabajaremos con caudal volumétrico (m^3/s) y no con caudal másico (kg/s), trataremos el primer fenómeno como si fuera el segundo; es decir supondremos incompresible al flúido y le atribuiremos elasticidad a las paredes del recipiente, de manera de lograr un efecto equivalente (ver esquema idealizado con membrana elástica). De esta manera, el capacitor fluidodinámico vincula presión e integral de caudal (volumen almacenado) y su RelaC podría expresarse en forma genérica:

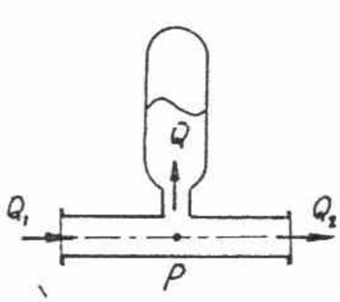
$$F_c\,(P,\,V)=0\,, \qquad V=\int Q(t)\,dt$$

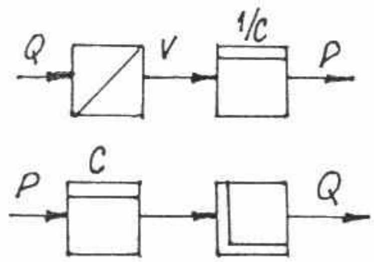
En el caso lineal : $CP-V=0$

donde C es un coeficiente llamado capacidad. que representa la pendiente de la recta que define la RelaC lineal de un capacitor fluidodinámico. Las unidades de C son:

$$[C]=m^3/Pa$$

Los capacitores modelan todo efecto de almacenamiento de volumen de flúido (la presencia efectiva de algún tipo de recipiente en la línea de flúido, flexibilidad en las paredes de los conductos, o el hecho de considerar la compresibilidad del flúido).



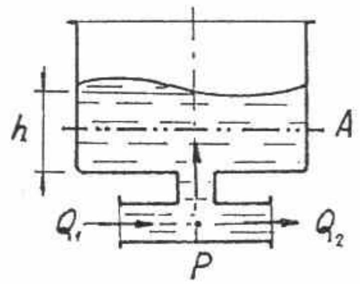


$Q=Q_1-Q_2$

Casos particulares: (se considera que no existe ningún otro efecto aparte del capacitivo.)
a.- Tanque de área constante: (considerando la acción de la gravedad)
La presión P en la base del tanque debida exclusivamente a la columna líquida es:

$$P=\gamma\,h=\frac{\rho g}{A}\,V=\frac{1}{C}\,V \qquad\qquad C=\frac{A}{\rho\,g}$$

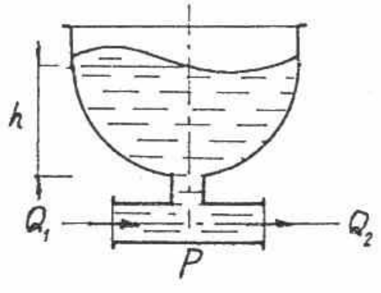
la RelaC en este caso es lineal puesto que el área A de la base del tanque es constante .



b.- Tanque de área no constante (respecto de la altura): En este caso la RelaC no será lineal, puesto que la relación entre altura del líquido h y volumen almacenado V no es constante. Genéricamente:

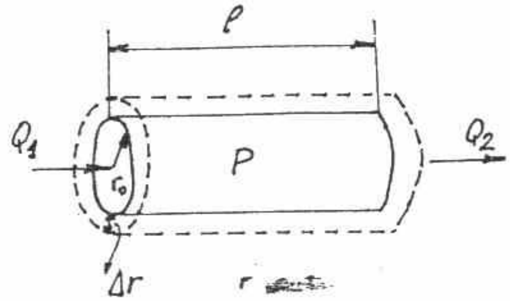
$$P=\gamma\,h=\gamma\,f(V)$$

En este caso no puede definirse una capacidad C como coeficiente constante.

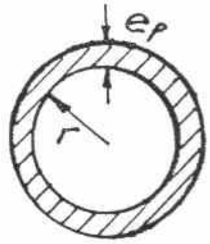


*c.- **Flúido incompresible. Caño elástico:*** el almacenamiento de flúido tiene lugar en el volumen extra que se expande el recipiente, que es el notado V en la RelaC $F_c(P,\ V)=0$. No confundirlo con el volumen del caño deformado: $V(r)=V(ro)+V=Vs+V$. En este caso la presión originada por almacenamiento de flúido estará relacionada con la mayor o menor elasticidad del material del caño.

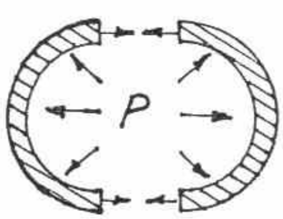
$$P=\frac{E\ e_p}{2\ ro\ Vs}\ V$$

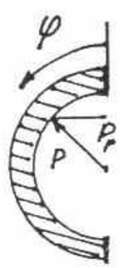


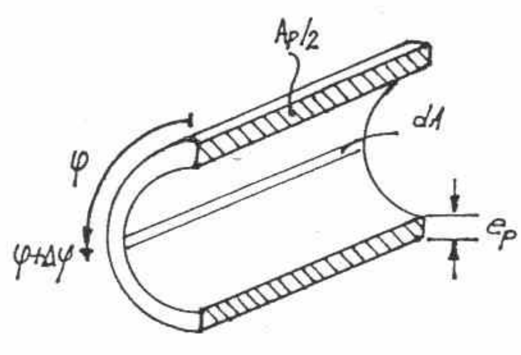
E: módulo de Young de elasticidad del material
e_p: espesor del caño ($\ll$ ro)
Vs: volumen sección caño sin deformar
Veamos la deducción de esta RelaC:
analicemos que pasa en una sección de caño de longitud l.



Tratemos de encontrar la relación entre tensión σ y presión P dividiendo la sección del caño longitudinalmente:







sabemos que σ es

$$\sigma=\frac{Fuerza}{Apared} \qquad Ap(\acute{a}rea\ pared)=2\ l\ e_p$$

para un diferencial de área dA cualquiera la fuerza que aporta para la tensión σ en la pared es:

$$dF=P_p\,dA$$

donde
$$P_p=P sen\phi$$
$$dA=l\ r\ d\phi$$
$$dF=P\,l\ r\,sen\phi\ d\phi$$

la fuerza total (sobre toda la pared) resulta entonces:

$$F=\int_0^{\pi} P\ r\,sen\phi\ d\phi=2\,l\,r\,P$$

con lo cual la tensión es:

$$\sigma = \frac{2\,l\,r\,P}{2\,l\,\epsilon_p} = \frac{r}{\epsilon p}\,P \qquad (1)$$

La ley de Hooke para zona elástica nos dice que:

$$\sigma = E\,\epsilon \qquad (2)$$

donde ϵ es la deformación relativa, y para el caso de la circunferencia nos queda:

$$\epsilon = \frac{\Delta circunf.}{circunf.} = \frac{\Delta r}{ro} \qquad (3)$$

ro =radio sin deformar.
La deformación relativa para el caso volumétrico es:

$$V(r) = \pi\,r^2\,l = \pi\,(ro + \Delta r)^2\,l = \pi\,ro^2\,l + 2\pi\,l\,ro\,\Delta r + \pi\,l\,\Delta r^2$$

$$V(r) = \pi\,ro^2\,l + \pi\,l\,(2\,ro + \Delta r)\,\Delta r = Vs + V$$

donde:

$$V = \pi\,l\,(ro + \Delta r)\,\Delta r \approx 2\pi\,l\,ro\,\Delta r \qquad (4)$$

puesto que $\Delta r \ll ro$.
Reemplazando (4) en (3) nos queda:

$$\epsilon = \frac{V}{2\pi\,l\,ro^2} \qquad (5)$$

con (1), (2) y (5) tenemos:

$$E\epsilon = \frac{r}{\epsilon p}\,P \Rightarrow \frac{E}{2\pi\,l\,ro^2}\,V = \frac{ro + \Delta r}{\epsilon p}\,P \approx \frac{ro}{\epsilon p}\,P$$

finalmente queda:

$$P = \frac{E\,\epsilon p}{2\,ro\,Vs}\,V$$

definimos entonces:

$$C = \frac{2\,ro\,Vs}{E\,\epsilon p}$$

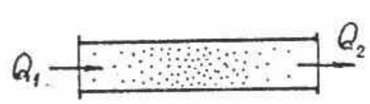
En este caso el modelo también es lineal

d.- Líquido compresible. Caño rígido: supongamos que tenemos una sección de caño con líquido circulando en régimen estacionario, (el caudal de entrada es igual al caudal de salida y la presión dentro del caño tiene un cierto valor Po). Si en determinado momento se incrementa el caudal de entrada en un cierto valor, ésto no se traduce en una variación instantánea del caudal de salida, sino que _ dado que el flúido se comprime_, existirá un aumento de densidad y consecuentemente de presión dentro del conducto. Este fenómeno puede modelarse como un capacitor que "computa" el valor incremental a partir de un volumen incremental ΔV equivalente de líquido comprimido. En base a la definición de módulo de compresibilidad de un líquido puede aproximarse la RelaC:

$$P = \frac{B}{Vs}\,V$$

$C = Vs/B$ en este caso el modelo es lineal

donde:
B: módulo de compresibilidad del líquido
Vs: volumen del tramo de caño considerado (corresponde al mismo volumen de líquido sin comprimir)



e.- Caño elástico. Flúido compresible: En este caso se combinan los efectos anteriormente modelados y puede pensarse el siguiente modelo lineal:

$$Ceq = C_{comp.} + C_{incomp.} = Vs\ (B^{-1} + \frac{2\ ro}{E\ ep})$$

Pensando al condensador como análogo eléctrico, puede verse fácilmente que corresponde sumar las capacidades. En efecto que haya una sola presión en la sección equivale a una única tensión, o sea condensadores en paralelo, se suman las capacidades.

f.- Gas compresible. Caño rígido. Ejemplo de modelo equivalente: consideraremos un tramo de línea de volumen *Vs* por el cual circula un gas. En régimen estacionario, el caudal de entrada Q_1 es igual al de salida Q_2. Una variación dinámica en el valor de Q_1 no se trasladará instantáneamente a la salida, puesto que suponemos el flúido compresible y por lo tanto existirán:

i.- variación del volumen específico *Ve* del gas

ii.- variación de la masa *M* del gas dentro del tramo considerado

Recordemos que *Ve* es el recíproco de la densidad del gas (m^3/Kg). Puesto que el sector del caño es rígido, el volumen de gas es invariable y no podríamos asociar el fenómeno capacitivo con un almacenamiento de volumen, aunque sí existe una acumulación de materia por ser el flúido compresible.

Veamos como podría formularse una representación idealizada equivalente del problema, acorde con la forma de modelizar capacidades fluidodinámicas que seguimos en los ejemplos anteriores.

Dado que $Vs = M\ Ve$, entonces

$$\frac{\partial Vs}{\partial t} = M\frac{d\ Ve}{dt} + Ve\frac{dM}{dt} \equiv 0$$

puesto que el es caño rígido. Refiriendo esta ecuación a un punto genérico de operación estático ($M=\overline{M}$ y $Ve=\overline{V}$) *queda :*

$$\overline{M}\frac{d\ Ve}{dt} + \overline{V}\frac{dM}{dt} = 0$$, o también

$$\frac{d(\ \overline{M}\ Ve)}{dt} + \frac{d\ (\overline{V}\ M)}{dt} = 0$$

que puede interpretarse como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d\ Vc}{dt} + \frac{d\ Vi}{dt} = 0$$

Vc: variación de volumen de un flúido compresible (*M* constante)

Vi: variación de volumen de un flúido incompresible (*Ve* const.)

Luego como la variación de volumen con respecto al tiempo es caudal, la última ecuación puede escribirse:

$$Qc + Qi = 0$$

interpretando que hay una disminución del volumen específico Ve al existir compresión (aumenta la desidad) que es compensada por el ingreso de más flúido al tramo considerado (aumento de masa *M*). Entonces

$$Qi = -Qc$$

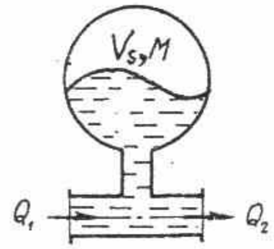
siendo

$$Qi = \frac{d\ Vi}{dt} = Q_1 - Q_2$$ el caudal neto que ingresa al tramo

Puede plantearse la siguiente representación idealizada equivalente: trabajamos con flúido incompresible, incluyendo el tramo de línea considerado un receptáculo con una burbuja de gas compresible con un volumen de régimen *Vs*, igual al del tramo en cuestión, y a una presión $\overline{P}$.

Para incrementos finitos:

$$\Delta V = \Delta Vc + \Delta Vi = 0$$
$$\Delta Vi = -\Delta Vc$$



Ahora pensando el problema con el modelo equivalente podemos ver que al existir un incremento del caudal de entrada, habrá un almacenamiento de un flúido en la cámara que producirá una compresión de la burbuja allí encerrada que aumentará la presión en un valor incremental proporcional a la cantidad de flúido almacenada.
Este incremento de presión puede evaluarse como:

$$\Delta P = \frac{1}{C}\,\Delta Vi$$

donde C es una constante que representa la capacidad del segmento de línea considerado y que puede ser determinada del siguiente planteo:
Para la masa de gas contenida en la burbuja por leyes termodinámicas para un sistema sin intercambio de calor con el medio, como suponemos a éste, se cumple la siguiente relación:

$$P(V_G)^{\gamma} = constante$$

así

$$\frac{d(PV_G{}^{\gamma})}{dt} = \frac{dP}{dt}(V_G)^{\gamma} + \gamma\,\overline{P}\,(V_G)^{\gamma-1}\frac{dV_G}{dt} = 0$$

por lo tanto $V_G\, dP + \gamma\,\overline{P}\, dV_G = 0 \;\; \Rightarrow dP = -\,\dfrac{\gamma\,\overline{P}}{V_G}\, dV_G$

o bien, pasando a incrementos

$$\Delta P = \frac{\gamma\,\overline{P}}{V_G}\;(-\Delta V_G) \;=\; \frac{\gamma\,\overline{P}}{Vs}\;\Delta V_i \qquad \text{asumiendo } V_G = Vs$$

con lo que $C = \dfrac{Vs}{\gamma\,\overline{P}}$

Observación: γ es una constante dependiente del gas considerado. Se ha modelado la compresibilidad del flúido con un elemento capacitivo lineal. Notar que para presiones elevadas de trabajo $\overline{P}$ este efecto se atenúa lo que nos indica cuándo podemos despreciarlo.

Nota: En su apartado #3, estas notas siguen estrechamente el desarrollo del Capítulo 8 del libro "Karnopp & Rosenberg: *Introduction to Physical System Dynamics*, Mc Graw-Hill, 1983, NY".
Para mayor claridad hemos creído conveniente replantear la presentación global, cambiar alguna notación, e incorporar alguna deducción.

PROBLEMA RESUELTO DE HIDRÁULICA

Este problema es sobre un sistema alineal constituido por un sensor-comparador-actuador que mediante una referencia variable fija la altura del líquido en un tanque. Se proporciona un criterio para encontrar la causalización de las ecuaciones y la estructura topológica del DB, luego se obtiene el DB, la EE, EDO y la ES del sistema.

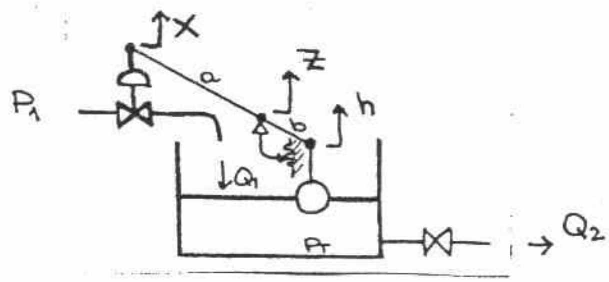


Fig. 1 Sistema físico idealizado

Hemos introducido una variante en el planteo respecto de como se presenta en la práctica publicada (P02.C03.94). Esta es una referencia variable z para poder fijar a voluntad el nivel del tanque deseado. Como primer paso en la obtención del DB dibujemos en forma más esquemática el sistema (Fig. 2).

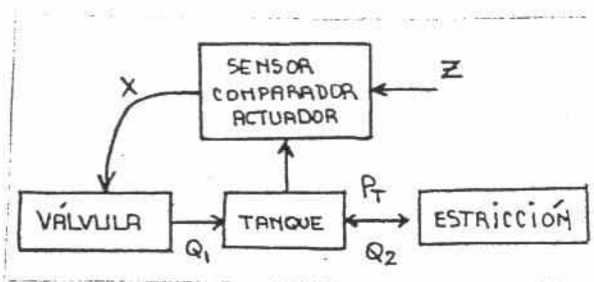


Fig. 2 Estructura sistémica

En este diagrama esquemático del sistema hemos puesto de manifiesto los elementos del mismo y sus interrelaciones. Notemos que las interacciones pueden ser de "ida y vuelta" de la información, como en el caso tanque-estricción 2; o bien sólo en un sentido (válvula → tanque, tanque → sensor, etc)
A aquellas interacciones como la de tanque-estricción las llamaremos "interacciones de potencia" pues marcan un intercambio de potencia entre los elementos. El par de variables asociadas - en este caso la presión del tanque P_T, y el caudal a través de la estricción Q_2 - son tales que su producto mutuo tiene unidades de potencia.
Las interacciones de tipo unidireccional sólo llevan información en un solo sentido, es decir, no existe para el elemento que envía información una "vuelta". A este tipo de interacción la llamaremos "interacción de señal".
El diagrama esquemático de la figura 2 nos permite agrupar el conjunto de relaciones constitutivas (RelaCs) asociadas a las características particulares de cada dispositivo, y el de las relaciones estructurales (RelEsts) según la forma en que éstos se interrelacionan entre sí.

Sensor-comparador-actuador

(1) $x - K_z z + K_h h = 0$

(2) $h - \frac{V}{A_T} = 0$

Tanque

(4) $P_T - \frac{\gamma}{A_T} V = 0$

(5) $\dot{V} - Q_1 + Q_2 = 0$

Válvula

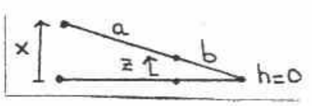
(3) $P_1 - \frac{\rho |Q_1| \, Q_1}{2\, C_v^{\,2}(x)\; A_v^2(x)} = 0 \quad (*)$

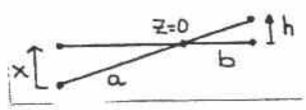
Estricción

(6) $P_T - \frac{\rho\, |Q_2|\, Q_2}{2\, C_e^{\,2}\; A_e^2} = 0 \; (*)$

ρ: densidad del líquido
$C_{v,e}$: coeficientes de descarga de válvula y estricción respectivamente
$A_{v,e}$: áreas efectivas de válvula y estricción respectivamente

La ecuación (1) surge del siguiente planteo:





con h fijo ,varío z, luego
x debida a z:

$x = \frac{a+b}{b} z \qquad K_z = \frac{a+b}{b}$

con z fijo, varío h, luego
x debida a h:

$x = -\frac{a}{b} h \qquad K_h = \frac{a}{b}$

Aplicando superposición se arriba a (1).

Notemos que la ecuación (5) es una relación de tipo estructural que asociamos al tanque, pero la ecuación propia del tanque (RelaC) es la (4), donde V representa el volumen de líquido almacenado.
El siguiente paso para la obtención de un DB es la causalización de las ecuaciones (1)-(6). Para ello, partiremos buscando en el conjunto de ecuaciones las que tengan a la variable que me interesa tener como salida del DB, en este caso: h.
Lo que se busca es dar un "orden" al grupo de ecuaciones implícitas haciéndolas explícitas, de forma que represente el camino que siguen las señales en un modelo del sistema.
En las ecuaciones (1) y (2) aparece h, variable de salida. De cuál de ellas despejo h?. El criterio es "remontar" la causalidad, recorriendo el esquema de la figura 2 en el sentido de la "búsqueda de la causa". Debemos entonces elegir la (2) como ecuación de partida pues aparecen h y su causa: V y no la (1) donde aparecen h y su efecto: x.
Así en la (2) encontramos h, para la que necesitamos conocer V. Buscamos en el resto de las ecuaciones sin causalizar aún y encontramos a V en la (4) y en la (5). En la (4) está claro que P_T es un efecto de V y no una causa, luego despejamos V de la (5). En los casos en que no estuviera muy claro cuál es efecto y cuál es causa, debe tener prioridad en la elección la ecuación que tiene la variable de interés derivada la mayor cantidad de veces. Así despejamos a V de la (5) y buscamos en el resto de las ecuaciones Q_1 y Q_2 y así continuamos hasta haber pasado por todas las ecuaciones.
El camino seguido puede sintetizarse en el grafo de la fig. 3 y nos muestra además una estructura topológica que coincide con la del DB que queremos obtener. Se han marcado dos bucles: I y II y hay además dos entradas externas: P_1 y z.

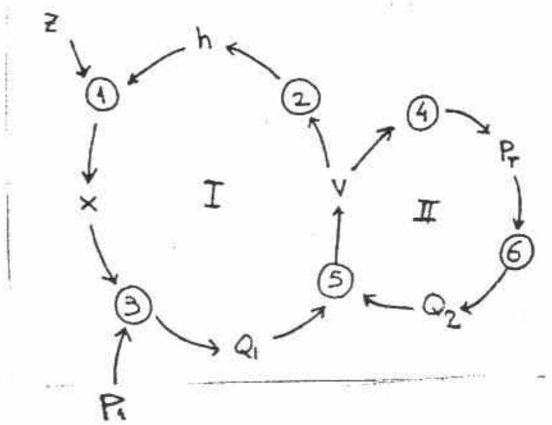
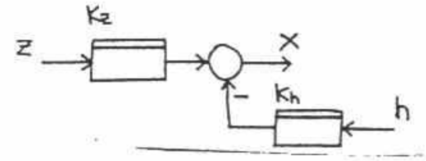


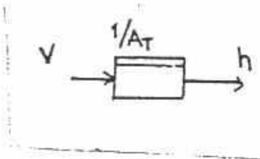
Fig.3 Estructura topológica del DB y orden de causalización de las ecuaciones.

Reescribimos las ecuaciones pero ahora causalizadas:

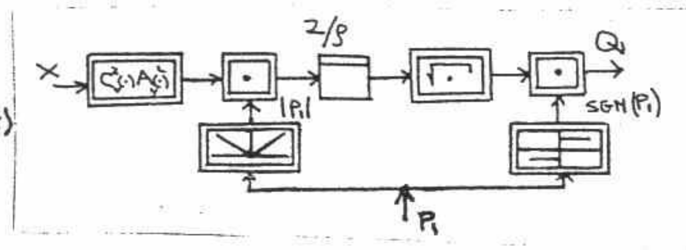
(1) $x = K_z\, z \;-\; K_h\, h$



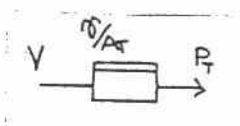
(2) $h = \frac{1}{A_T}\;\; V$



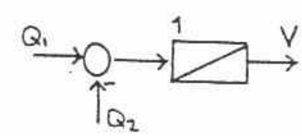
(3) $Q_1 = \sqrt{2\,\frac{1}{\rho}\,|P_1|\,C_v{}^2(x)\;A_v{}^2(x)}\quad \mathrm{sgn}(P_1)$ (*)



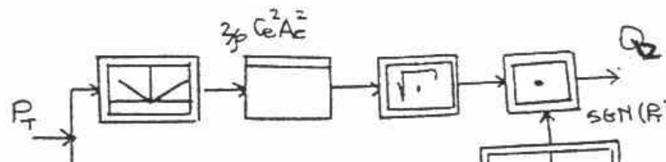
(4) $P_T = \frac{\gamma}{A_T}\;\; V$



(5) $V = \int (\,Q_1 \;- Q_2)\;\, dt$



(6) $Q_2 = \sqrt{2\,\frac{1}{\rho}\,|P_T|\,C_e^2\,A_e{}^2}\;\; \mathrm{sgn}(P_T)$ (*)



L

Observación importante: En las ecuaciones marcadas con (*) se usó el valor absoluto de presiones y caudales para reflejar el hecho de que si el caudal cambia de sentido (signo), la diferencia de presión también debe hacerlo. Esto contempla la situación más general posible. No obstante en este problema (ver Fig.1) los caudales y diferencias de presión siempre mantienen el sentido definido positivo. Por ello en el DB siguiente se usa una versión simplificada de las RelaCs mencionadas, prescindiendo de los valores absolutos y de las funciones signo.

Concatenando los mini DB obtenidos de cada ecuacion, llegamos al siguiente DB del sistema:

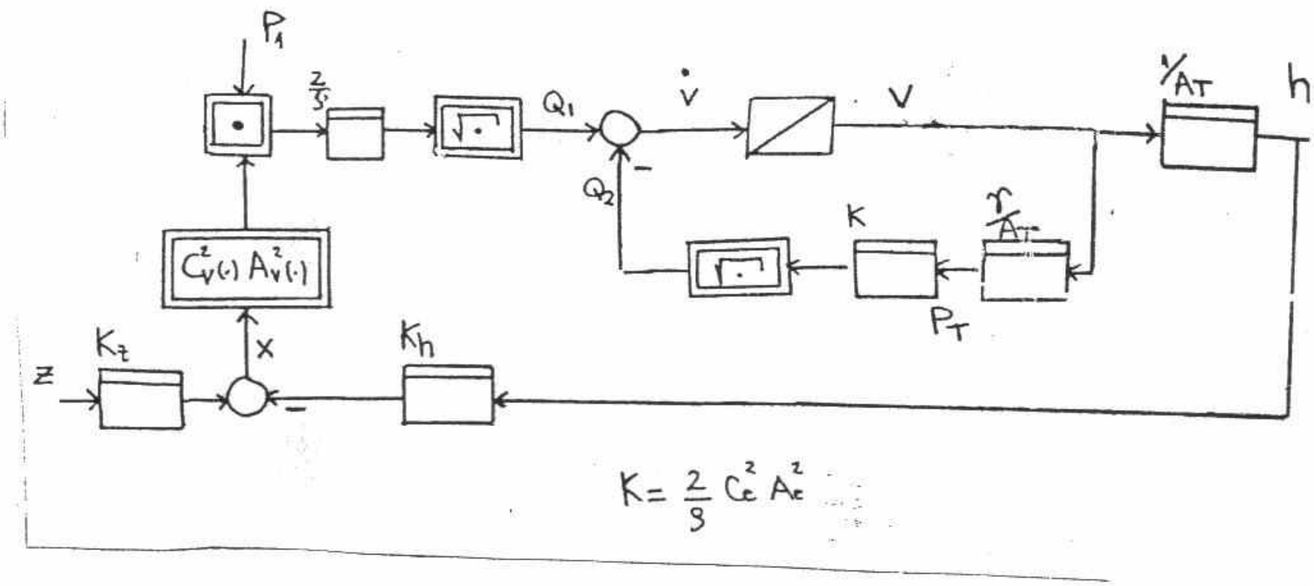


Fig. 4 Diagrama de bloques

Notemos que, como adelantamos, el DB tiene la misma estructura que el grafo de la fig.3: dos bucles 1 y 2, y dos entradas: P_1 y z.
La EDO se obtiene simplemente por lectura del DB. Partiendo desde la entrada al integrador.

$$\dot{V} = Q_1 - Q_2$$

se obtiene

$$\dot{V} = -\sqrt{2\, \rho^{-1}\, C_e^2\, A_e^2\, \frac{\gamma}{A_T} V} + \sqrt{2\, \rho^{-1}\, C_v^2(x)\, A_v^2(x)\, P_1} \qquad \text{EDO o EE}$$

$$h = \frac{1}{A_T} V \qquad \text{ES}$$

Analizando la EE podemos clasificar este sistema como:

alineal
de primer orden
estacionario

Para este sistema no puede obtenerse función transferencia ya que es alineal.